УДК 510.2:004.8

Д.О. Терлецький

КОНСТРУКТОРИ МНОЖИН ТА МУЛЬТИМНОЖИН ОБ'ЄКТІВ

Пропонуються певні операції над об'єктами, що описують деякі сутності, досліджується процес утворення множин та мультимножин об'єктів та пропонуються конструктивні методи їх створення (автоматичної генерації), що дозволяє будувати, класифікувати та порівнювати об'єкти та множини або мультимножини об'єктів, виділяти нові класи об'єктів, генерувати множини та мультимножини об'єктів за певним класом, що дозволяє у певному сенсі практично реалізувати для машини здатність оперувати такими базовими категоріями людського мислення як «множина» та «мультимножина».

Вступ

Поняття «множина» є центральним для теорії множин і одним із базових понять для математики в цілому. Окрім цього це поняття має дуже важливе та глобальне значення, в життєдіяльності людини, оскільки ми повсякденно використовуємо множини в своїй розумовій діяльності в процесі сприйняття, аналізу, порівняння, пошуку, класифікації тощо. Ми свідомо чи підсвідомо оперуємо ними, створюючи та змінюючи їх, застосовуючи до них різні операції. Проте аналізуючи визначення поняття «множина», наведені в [1–3] виникають питання про походження «конкретних» множин.

Згідно з класичною теорією множин, «нові» множини можна отримувати шляхом застосування теоретико-множинних операцій до «вже існуючих» множин і це дійсно так. Проте не зникають питання про походження цих так званих «вже існуючих» множин, їхню кількість, їх види і так далі.

Дана стаття є продовженням досліджень розпочатих в [4], де були запропоновані основи конструктивної версії теорії множин (CST) у рамках якої вводиться новий рівень – рівень об'єктів, які є складовими для створення множин; концепція класу об'єктів, що дозволяє в певному сенсі формалізувати класифікацію самих об'єктів. В основу CST покладається принцип нескінченності за Брауером та відкидаються такі поняття як «одноелементна множина» та «пуста множина».

Використовуючи базові поняття CST визначимо деякі операції над об'єктами та детально розглянемо процеси утворення множин та мультимножин об'єктів.

Об'єкти, класи об'єктів та множини об'єктів

Об'єкти. Відомо, що будь-яка множина складається з елементів, які її утворюють (визначають). Як елементи множини можуть виступати будь-які предмети, явища нашої уяви або навколишнього світу, називатимемо такі елементи *об'єктами*. Розглянемо такий об'єкт, як натуральне число, очевидно, що кожне натуральне число має бути цілим та бути додатнім – що є за суттю характеристичними властивостями натуральних чисел, звідси не важко переконатися, що 8 це дійсно натуральне число, а − 4 або 2.9 – не є такими. Аналізуючи вище наведені факти, можна зробити висновок, що будь-який об'єкт володіє певними властивостями, які є для нього характеристичними і визначають його, як деяку сутність та дозволяють відрізняти його від інших об'єктів.

Об'єкт A – це носій деякої сукупності характеристичних властивостей та ознак $P(A)=(p_1(A),\dots,p_n(A))$, яка називається специфікацією об'єкта A і визначає його, як деяку сутність. Будемо позначати довільний об'єкт наступним чином:

$$A = A/P(A) = A/(p_1(A),\dots,p_n(A)).$$

Очевидно, що специфікація будь-якого об'єкта містить певну кількість властивостей, тому доцільно ввести поняття розмірності об'єктів.

Розмірність об'єкта $D(A)$ це натуральне число n, яке визначає кількість властивостей об'єкта A, що входять до його специфікації $P(A)$.

Об'єкти A і B є однотипними тоді й тільки тоді коли вони мають однакову розмірність і їм властива одна і та ж специфікація.

Властивості об'єктів глобально можна поділити на два типи – якісні та кількісні. Кількісні властивості представлятимемо наступним чином:

$$p_i(A) = (v(p_i(A)), u(p_i(A))),$$

де $p_i(A)$ – ідентифікатор i-ї властивості, $v(p_i(A))$ – кількісне значення, $u(p_i(A))$ – одиниці вимірювання кількісного значення властивості. Якісні властивості представлятимемо наступним чином:

$$p_i(A) = f_i(A),$$

де $f_i(A)$ – функція перевірки виконання властивості p_i для об'єкта A і приймає значення з множини $M \in [0,1]$. Якщо $f_i(A) = 1$, то властивість p_i виконується для об'єкта A, якщо $f_i(A) = 0$, то властивість p_i не виконується для об'єкта A і якщо $f_i(A) = k$, де $k \in [0,1]$, то властивість p_i частково виконується для об'єкта A, тобто виконується з певною мірою.

Класи об'єктів. У загальному об'єкти можна поділити на конкретні (реально матеріально існуючі) та абстрактні. Кожен конкретний об'єкт, не залежно від того коли і як він був створений, є нічим іншим, як матеріальною реалізацією свого абстрактного образу – прототипу. Кожен прототип за суттю, є абстрактною специфікацією для створення майбутніх реальних об'єктів. Окрім властивостей об'єктів також варто виділити операції (методи), які можна застосувати до об'єктів враховуючи особливості їх специфікації. В об'єктно-орієнтованому програмуванні [5], використовують специфікацію та сигнатуру об'єкта без самого об'єкта називаючи це типом або класом об'єкта, тому використавши цю ідею сформулюємо визначення класу об'єктів.

Клас об'єктів – це абстрактна специфікація та набір операцій (сигнатура) певної кількості довільних об'єктів. Позначатимемо клас об'єктів наступним чином:

$$T = (P(T), F(T)) =$$

$$= ((p_1(T),..., p_n(T)), (f_1(T),..., f_k(T))),$$

де T – ім'я класу, $P(T)$ – абстрактна специфікація, а $F(T)$ – набір операцій (методів), які можна застосовувати до об'єктів класу T враховуючи особливості їх специфікації.

Клас об'єктів є однорідним тоді і тільки тоді коли до нього відносяться лише однотипні об'єкти.

Якщо клас T – однорідний клас, то його специфікація матиме наступний вигляд:

$$P(T) = (Core(T)),$$

де $Core(T)$ – ядро специфікації $P(T)$, що містить властивості, які є спільними для всіх об'єктів класу T.

Якщо клас T – неоднорідний клас, то його специфікація матиме наступний вигляд:

$$P(T) = (Core(T), pr_1(A_1),..., pr_n(A_n)),$$

де $pr_1(A_1),..., pr_n(A_n)$ – проекції об'єктів $A_1,..., A_n$, що містять властивості які виконуються лише для цих об'єктів. Зрозуміло, що $Core(T)$ існуватиме лише тоді, коли специфікації $P(A_1),..., P(A_n)$, міститимуть хоча б одну спільну властивість.

Важливою особливістю неоднорідних класів є те, що до цих класів можуть належати об'єкти, що володіють різними специфікаціями, на відміну від ООП, де кожен конкретний об'єкт, що належить до певного класу володіє у повній мірі всією специфікацією батьківського класу, а також до нього можна застосувати всі методи, які оголошені в даному класі.

Очевидно, що будь-який об'єкт A належить, як мінімум до одного класу T_A, проте це все залежить від того, як трактувати поняття належності. Спираючись на роботу Л. Заде [3], множна виділити три типи належності – повна, часткова і нульова.

Для формального представлення належності, особливо часткової, Л. Заде використовує характеристичну функцію $\mu(x) \in [0,1]$, яка відображає міру належності елемента x до деякої нечіткої множини A. Використаємо цю ідею у нашому випадку і опишемо належність об'єкта A до однорідного та неоднорідного класу.

Розглянемо будь-який однорідний клас T, який описується деякою специфікацією $P(T) = (p_1(T),..., p_n(T))$ та будь-який об'єкт A, що описується специфікацією $P(A) = (p_1(A),..., p_n(A))$.

Якщо $D(A) \neq D(T)$ або $\exists i$, $i = \overline{1,n}$ $v(p_i(A)) \neq v(p_i(T))$, або $u(p_i(A)) \neq$ $\neq u(p_i(T))$, або $f_i(A) \neq f_i(T)$, то об'єкт A не належить до однорідного класу T, тобто $\mu(A \in T) = 0$ – нульова належність.

Якщо $D(A) = D(T)$ та $\forall i$, $i = \overline{1,n}$ $v(p_i(A)) = v(p_i(T))$ та $u(p_i(A)) = u(p_i(T))$ або $f_i(A) = f_i(T)$, то об'єкт A належить до однорідного класу T, тобто $\mu(A \in T) = 1$ – повна належність.

Якщо $D(A) = D(T)$ та $\exists i$, $i = \overline{1,n}$ $v(p_i(A)) < v(p_i(T))$ і $u(p_i(A)) = u(p_i(T))$ або $f_i(A) \leq f_i(T)$, то об'єкт A належить до однорідного класу T частково, тобто $\mu(A \in T) = k$, де k визначається наступним чином:

$$k = \frac{v(p_i(A))}{v(p_i(T))},$$

коли $p_i(A)$ та $p_i(T)$ – кількісні властивості об'єкта A;

$$k = \frac{f_i(A)}{f_i(T)},$$

коли $p_i(A)$ та $p_i(T)$ – якісні властивості об'єкта A.

Якщо клас T – неоднорідний клас, то він описується наступною специфікацією $P(T) = (p_1(T),..., p_m(T))$.

Якщо $D(A) > D(T)$ або $\exists i, j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ $v(p_i(A)) \neq v(p_i(T))$ або $u(p_i(A)) \neq u(p_i(T))$, або $f_i(A) \neq f_i(T)$, то об'єкт A не належить до неоднорідного класу T, тобто $\mu(A \in T) = 0$ – нульова належність.

Якщо $D(A) \leq D(T)$ та $\forall i$, $i = \overline{1,n}$ і $\exists j$, $j = \overline{1,m}$ для яких $v(p_i(A)) = v(p_j(T))$ та $u(p_i(A)) = u(p_j(T))$ або $f_i(A) = f_j(T)$, то об'єкт A належить до неоднорідного класу T, тобто $\mu(A \in T) = 1$ – повна належність.

Якщо $D(A) \leq D(T)$ та $\exists i, j$, $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,m}$ для яких $v(p_i(A)) < v(p_j(T))$ і $u(p_i(A)) = u(p_j(T))$ або $f_i(A) \leq f_j(T)$, то об'єкт A належить до неоднорідного класу T частково, тобто $\mu(A \in T) = k$, де k визначається наступним чином:

$$k = \frac{v(p_i(A))}{v(p_j(T))},$$

коли $p_i(A)$ та $p_i(T)$ – кількісні властивості об'єкта A;

$$k = \frac{f_i(A)}{f_j(T)},$$

коли $p_i(A)$ та $p_i(T)$ – якісні властивості об'єкта A.

Множини об'єктів. Спираючись на поняття «об'єкт» і «клас об'єкта», сформулюємо визначення поняття «множина об'єктів».

Множина об'єктів S – це об'єднання, що задовольняє одну із наступних схем:

$$S1): O_1 \cup ... \cup O_n = S / T_S,$$

$$S2): S_1 \cup ... \cup S_m \cup O_1 \cup ... \cup O_n = S / T_S,$$

$$S3): S_1 \cup ... \cup S_m = S / T_S,$$

де O_i, $i = \overline{1,n}$ – це об'єкти, S_j, $j = \overline{1,m}$ –

множини об'єктів, при цьому O_i та S_j можуть відноситись до абсолютно різних класів, а T_S – клас новоутвореної множини об'єктів S, специфікація якого має наступну структуру:

$$P(T_S) = (Core(T_S), pr_1(O_1),..., pr_n(O_n)),$$

де $Core(T_S)$ – ядро специфікації класу T_S, що включає у себе властивості, які є спільними для специфікацій об'єктів $O_1,...,O_n$, а $pr_1(O_1),..., pr_n(O_n)$ – проекції об'єктів, що містять властивості, які властиві лише об'єктам $O_1,...,O_n$.

Елементами множини об'єктів можуть бути лише об'єкти.

Множина об'єктів S_1 є підмножиною множини об'єктів S тоді і тільки тоді коли всі її об'єкти також входять до множини об'єктів S. Тобто, якщо $S_1 = \{A, B\}$, а $S = \{A, B, C, D\}$, то $S_1 \subseteq S$.

Потужність множин об'єктів S – це кількість об'єктів, що відносяться до цієї множини. Позначатимемо потужність множини об'єктів $|S| = n$.

Операції над об'єктами

В класичній теорії множин [3] визначають операції об'єднання, перетину, різниці, доповнення та симетричної різ-ниці. Ці ж самі операції визначаються і в теорії нечітких множин [6, 7], де окрім класичних операцій визначають ще операції алгебраїчного добутку та суми, декартового добутку, концентрації, деконцентрації та декомпозиції, що базується на понятті α-розрізу. Проте всі вище згадані операції визначені на множинах, в нашому ж випадку визначимо операції на об'єктах, як складових частинах множин і цим самим введемо новий рівень у теорії множин – рівень об'єктів, який є нижчим ніж рівень множин, які вони утворюють.

Об'єднання (схема 1). Об'єднання $\cup$ в єдине ціле не менше ніж двох довільних об'єктів довільних класів – це множина об'єктів S, що визначається наступним чином:

$$S = A_1 / T_{A_1} \cup ... \cup A_n / T_{A_n} = \{A_1,...A_n\} / T_S,$$

де T_S – клас новоутвореної множини, який утворюється, як $T_{A_1} \cup ... \cup T_{A_n} = T_S$ і його специфікація має наступну структуру:

$$P(T_S) = (Core(T_S), pr_1(A_1),..., pr_n(A_n)),$$

де $Core(T_S)$ – це ядро специфікації класу T_S, що включає у себе властивості, які є спільними для специфікацій об'єктів $A_1,..., A_n$, а $pr_1(A_1),..., pr_n(A_n)$ – це проекції об'єктів, що містять властивості, які властиві лише об'єктам $A_1,..., A_n$.

Об'єднання (схема 2). Об'єднання $\cup$ в єдине ціле не менше ніж деякої однієї множини об'єктів $S_1 = \{B_1,..., B_m\}$ та не менше ніж одного довільного об'єкта довільного класу – це множина об'єктів S, що визначається наступним чином:

$$S = S_1 / T_{S_1} \cup A_1 / T_{A_1} = \{B_1,..., B_m, A_1\} / T_S,$$

де T_S – клас новоутвореної множини, який утворюється, як $T_{S_1} \cup T_{A_1} = T_S$, а його специфікація має наступну структуру:

$$P(T_S) = (Core(T_S), pr_i(B_i), pr_{m+1}(A_1)), i = \overline{1, m}$$

де $Core(T_S)$ – це ядро специфікації класу T_S, що включає у себе властивості, які є спільними для специфікацій об'єктів $B_1,..., B_m, A_1$, а $pr_i(B_i), pr_{m+1}(A_1)$ – це проекції об'єктів, що містять властивості, які властиві лише об'єктам $B_1,..., B_m, A_1$.

Об'єднання (схема 3). Об'єднання $\cup$ в єдине ціле не менше ніж двох довільних множин об'єктів довільних класів $S_1 = \{A_1,..., A_n\}$ та $S_2 = \{B_1,..., B_m\}$ – це множина об'єктів S, що визначається наступним чином:

$$S = S_1 / T_{S_1} \cup S_2 / T_{S_2} = \{A_i, B_j\} / T_S,$$

$i = \overline{1, n}$, а $j = \overline{1, m}$, де T_S – клас новоутвореної множини, утворений, як

$T_{S_1} \cup T_{S_2} = T_S$, а його специфікація має наступну структуру:

$$P(T_S) = (Core(T_S), pr_i(A_i), pr_j(B_j)),$$

$i = \overline{1,n}$, а $j = \overline{n,n+m}$, де $Core(T_S)$ – це ядро специфікації класу T_S, що включає у себе властивості, які є спільними для специфікацій об'єктів $A_1,...,A_n$, $B_1,...,B_m$, а $pr_1(A_1),..., pr_n(A_n)$, $pr_1(B_1),..., pr_m(B_m)$ – це проекції об'єктів, що містять властивості, які властиві лише об'єктам A_i, B_j.

Приклад 1. Розглянемо три об'єкти A_1, A_2, A_3, що описують деякі геометричні фігури, зокрема об'єкта A_1 відповідатиме квадрат, об'єкта A_2 – паралелограм, а об'єкта A_3 – трапеція. Опишемо їх за допомогою наступної специфікації:

$$P(A_i) = (p_1(A_i), p_2(A_i), p_3(A_i), p_4(A_i)),$$

де $p_1(A_i)$ – кількість сторін, $p_2(A_i)$ – кількість вершин, $p_3(A_i)$ – площа фігури і $p_4(A_i)$ – периметр фігури.

Кожен з цих об'єктів належить до певного класу, зокрема, об'єкт A_1 належить до класу T_{A_1}, об'єкт A_2 до класу T_{A_2} і об'єкт A_3 до класу T_{A_3}. Застосуємо операцію об'єднання до цих об'єктів та створимо множину S

$$S = A_1 / T_{A_1} \cup A_2 / T_{A_2} \cup A_3 / T_{A_3} =$$

$$= \{A_1, A_2, A_3\} / T_S.$$

Створивши множину S, ми цим самим створили новий клас T_S, який є класом множини об'єктів S і має наступну специфікацію:

$$P(T_S) = Core(T_S),$$

де

$$Core(T_S) = (p_1(A_1, A_2, A_3), p_2(A_1, A_2, A_3),$$

$$p_3(A_1, A_2, A_3), p_4(A_1, A_2, A_3)),$$

оскільки об'єкти A_1, A_2, A_3 описуються одною і тою ж специфікацією, при цьому кожен з них відповідає цій специфікації «по-своєму», з чого випливає однорідність класу T_S. Отже, клас T_S – це клас, що описує квадрати класу T_{A_1}, паралелограми класу T_{A_2} та трапеції класу T_{A_3}, відповідно множина об'єктів S – це множина квадратів класу T_{A_1}, паралелограмів класу T_{A_2} та трапецій класу T_{A_3}.

Приклад 2. Розглянемо два об'єкти A_1 та A_2, що описують деякі геометричні фігури, зокрема об'єкта A_1 відповідатиме трикутник, а об'єкта A_2 – паралелепіпед. Опишемо їх за допомогою наступних специфікацій:

$$P(A_1) = (p_1(A_1), p_2(A_1), p_3(A_1), p_4(A_1)),$$

$$P(A_2) = (p_1(A_2), p_2(A_2), p_3(A_2), p_4(A_2)),$$

де $p_1(A_1)$ – кількість сторін; $p_2(A_1)$ – кількість вершин; $p_3(A_1)$ – площа фігури; $p_4(A_1)$ – периметр фігури; $p_1(A_2)$ – кількість сторін; $p_2(A_2)$ – кількість вершин; $p_3(A_2)$ – кількість граней; $p_4(A_2)$ – об'єм фігури.

Кожен з цих об'єктів належить до певного класу, зокрема, об'єкт A_1 належить до класу T_{A_1}, а об'єкт A_2 – до класу T_{A_2}. Застосуємо операцію об'єднання до цих об'єктів та створимо множину S

$$S = A_1 / T_{A_1} \cup A_2 / T_{A_2} = \{A_1, A_2\} / T_S.$$

В результаті створення множини ми також отримали новий клас T_S, який є класом множини об'єктів S і має наступну специфікацію:

$$P(T_S) = (Core(T_S), pr_1(A_1), pr_2(A_2)),$$

де

$$Core(T_S) = (p_1(A_1, A_2), p_2(A_1, A_2)),$$

$$pr_1(A_1) = (p_3(A_1), p_4(A_1)),$$

$$pr_1(A_2) = (p_3(A_2), p_4(A_2)),$$

Оскільки специфікації $P(A_1)$ та $P(A_2)$

мають спільні властивості $p_1(A_1) \equiv p_1(A_2)$, $p_2(A_1) \equiv p_2(A_2)$, проте ці властивості не повністю не вичерпують специфікації $P(A_1)$ та $P(A_2)$, чим власне і пояснюється існування проекцій $pr_1(A_1)$ та $pr_2(A_2)$, з чого випливає неоднорідність класу T_S. Отже новоутворений клас T_S – це клас, що описує трикутники класу T_{A_1} та паралелепіпеди класу T_{A_2}, відповідно множина об'єктів S – це множина трикутників класу T_{A_1} та паралелепіпедів класу T_{A_2}.

Перетин. Перетин $\cap$ двох довільних об'єктів, A_1 та A_2 – це абстрактний об'єкт A класу T_A, специфікація якого визначається наступним чином:

$$P(T_A) = \begin{cases} p_{i_1}(A_1), Eq(p_{i_1}(A_1), p_{i_2}(A_2)) = 1; \\ break, i_1 \vee i_2 > \min(D(A_1), D(A_2)), \end{cases}$$

де $p_{i_1}(A_1)$ та $p_{i_2}(A_2)$ – властивості специфікацій $P(A_1)$ та $P(A_2)$.

Приклад 3. Розглянемо два об'єкти A_1 та A_2, що описують натуральні числа 1563725 та 382729 відповідно. Опишемо об'єкти A_1 та A_2, за допомогою наступних специфікацій:

$$P(A_1) = (p_1(A_1),..., p_{10}(A_1)),$$
$$P(A_2) = (p_1(A_2),..., p_9(A_2)),$$

де $p_1(A_1),..., p_7(A_1)$ та $p_1(A_2),..., p_6(A_2)$ – цифри з яких складається число, $p_8(A_1)$ та $p_7(A_2)$ – кількість цифр у числі, $p_9(A_1)$ та $p_8(A_2)$ – кількість парних цифр у числі і $p_{10}(A_1)$ та $p_9(A_2)$ – кількість непарних цифр у числі. Застосуємо операцію перетину до об'єктів A_1 та A_2 (табл. 1). В результаті отримаємо новий абстрактний об'єкт A

$$A_1 / T_{A_1} \cap A_2 / T_{A_2} = A / T_A,$$

який матиме наступну специфікацію:

$$P(A) = (p_1(A),..., p_6(A)).$$

Таблиця 1. Результати операції перетину об'єктів A_1 та A_2

$p_j(A_i) / A_i$	A_1	A_2	A
p_1	1	3	3
p_2	5	8	7
p_3	6	2	2
p_4	3	7	3
p_5	7	2	1
p_6	2	9	2
p_7	5	6	
p_8	7	3	
p_9	2	3	
p_{10}	5		

В результаті операції перетину об'єктів A_1 та A_2 ми отримали новий об'єкт A, який має специфікацію $P(A)$, де $p_1(A),..., p_3(A)$ – це цифри з яких складається число, $p_4(A)$ – кількість цифр у числі, $p_5(A)$ – кількість парних цифр у числі і $p_6(A)$ – кількість непарних цифр у числі.

Різниця. Різниця \ двох довільних об'єктів A_1 та A_2 – це абстрактний об'єкт A класу T_A, специфікація якого визначається наступним чином:

$$P(T_A) = \begin{cases} p_{i_1}(A_1), Eq(p_{i_1}(A_1), p_{i_2}(A_2)) = 0; \\ break, i_1 > D(A_1), \end{cases}$$

де $p_{i_1}(A_1)$ та $p_{i_2}(A_2)$ – властивості специфікацій $P(A_1)$ та $P(A_2)$.

Приклад 4. Розглянемо об'єкти A_1 та A_2 з прикладу 3, та застосуємо до них операцію різниці (табл. 2). В результаті отримаємо нові абстрактні об'єкти $A_{1\backslash 2}$ та $A_{2\backslash 1}$

$$A_1 / T_{A_1} \setminus A_2 / T_{A_2} = A_{1\backslash 2} / T_{A_{1\backslash 2}},$$

$$A_1 / T_{A_1} \setminus A_2 / T_{A_2} = A_{1\backslash 2} / T_{A_{1\backslash 2}},$$

які матимуть наступні специфікації:

$$P(A_{1\backslash 2}) = (p_1(A_{1\backslash 2}),..., p_7(A_{1\backslash 2})),$$

$$P(A_{2\backslash 1}) = (p_1(A_{2\backslash 1}),..., p_5(A_{2\backslash 1})).$$

Таблиця 2. Результати операції різниці об'єктів A_1 і A_2 та A_2 і A_1

$p_j(A_i)/A_i$	A_1	A_2	$A_{1\backslash 2}$	$A_{2\backslash 1}$
p_1	1	3	1	8
p_2	5	8	5	9
p_3	6	2	6	2
p_4	3	7	5	1
p_5	7	2	4	1
p_6	2	9	1	
p_7	5	6	3	
p_8	7	3		
p_9	2	3		
p_{10}	5			

В результаті операції різниці об'єктів A_1 і A_2 та A_2 і A_1 ми отримали нові об'єкти $A_{1\backslash 2}$ та $A_{2\backslash 1}$ відповідно, які мають специфікації $P(A_{1\backslash 2})$ та $P(A_{2\backslash 1})$, де $p_1(A_{1\backslash 2}),..., p_4(A_{1\backslash 2})$ та $p_1(A_{2\backslash 1}), p_2(A_{2\backslash 1})$ – це цифри з яких складається число, $p_4(A_{1\backslash 2})$ та $p_3(A_{2\backslash 1})$ – кількість цифр у числі, $p_5(A_{1\backslash 2})$ та $p_4(A_{2\backslash 1})$ – кількість парних цифр у числі і $p_6(A_{1\backslash 2})$ та $p_5(A_{2\backslash 1})$ – кількість непарних цифр у числі.

Симетрична різниця. Симетрична різниця $\div$ двох довільних об'єктів A_1 та A_2 – це абстрактний об'єкт A класу T_A, специфікація якого визначається наступним чином:

$$P(T_A) = \begin{cases} p_{i_1}(A_1), Eq(p_{i_1}(A_1), p_{i_2}(A_2)) = 0; \\ p_{i_2}(A_2), Eq(p_{i_2}(A_2), p_{i_1}(A_1)) = 0; \\ break, i_1 \vee i_2 > \max(D(A_1), D(A_2)), \end{cases}$$

де $p_{i_1}(A_1)$ та $p_{i_2}(A_2)$ – властивості специфікацій $P(A_1)$ та $P(A_2)$.

Приклад 5. Розглянемо об'єкти A_1 та A_2 з прикладу 3, та застосуємо до них операцію симетричної різниці (табл. 3). Як результат отримаємо новий абстрактний об'єкт A

$$A_1 / T_{A_1} \div A_2 / T_{A_2} = A / T_A,$$

який матиме наступну специфікацію:

$$P(A) = (p_1(A),..., p_9(A)).$$

Таблиця 3. Результати операції симетричної різниці об'єктів A_1 та A_2

$p_j(A_i)/A_i$	A_1	A_2	A
p_1	1	3	1
p_2	5	8	5
p_3	6	2	6
p_4	3	7	5
p_5	7	2	8
p_6	2	9	9
p_7	5	6	6
p_8	7	3	2
p_9	2	3	4
p_{10}	5		

В результаті операції симетричної різниці об'єктів A_1 та A_2 ми отримали новий об'єкт A, який має специфікацію $P(A)$, де $p_1(A),..., p_6(A)$ – це цифри з яких складається число, $p_7(A)$ – кількість цифр у числі, $p_8(A)$ – кількість парних цифр у числі і $p_9(A)$ – кількість непарних цифр у числі.

Клонування. Результатом операції клонування об'єкта A буде новий об'єкт (клон) A_i, $i = \overline{1, n}$, який володітиме такою ж специфікацією буде належати до того ж класу, що й об'єкт A, тобто $P(A_i) \equiv P(A)$ та $T(A_i) \equiv T(A)$

$$Clon(A_i) = (p_1(A),..., p_n(A)),$$

де A_i – i-й клон об'єкта A.

Мультимножини об'єктів

З робіт [8–10] відомо, що мультимножина – це множина елементи якої можуть входити до цієї множини більше ніж один раз. Тобто мультимножина це деяке узагальнення поняття множини.

Формально мультимножину визначають, як впорядковану пару (A, m), де A – множина, а m – функція, що ставить у відповідність кожному елементу множини A деяке натуральне число, яке називається кратність елемента, тобто $m: A \to N$.

Проте, як і у випадку множин, класична теорія не дає відповіді на питання про походження так званих «вже існуючих» мультимножин. Тому визначимо поняття «мультимножина об'єктів» та запропонуємо деякі методи створення мультимножин об'єктів.

Мультимножина об'єктів S – множина об'єктів, що містить не менше двох еквівалентних об'єктів і в залежності від схеми її створення для неї має виконуватися одна з наступних умов:

1. $\exists S_k$, таке що $S_k \subseteq O_1 \cup ... \cup O_n$;
2. $\exists S_k$, таке що
$$S_k \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} O_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j \right),$$
3. $\exists S_k$, таке що $S_k \subseteq S_1 \cup ... \cup S_m$;

де S_k – множина об'єктів, що містить не менше двох еквівалентних об'єктів.

Тепер введемо деякі допоміжні визначення.

Потужність мультимножини об'єктів S – це кількість об'єктів, що до неї відносяться. Позначатимемо потужність мультимножини об'єктів $|S|$.

Базисна множина S_b – це множина об'єктів, які входять хоча б один раз до мультимножини об'єктів S.

Тепер ми можемо ввести наступну операцію:

$$bs(S) = S_b,$$

де $bs(S_b)$ – операція результатом якої є базисна множина об'єктів S_b для мультимножини об'єктів S. Тобто у нас є деяка мультимножина об'єктів $S = \{A, A, B, C, C\}$, то для неї $bs(S) = S_b = \{A, B, C\}$.

Конструктори мультимножини об'єктів

Універсальний конструктор. Розглянемо деякий об'єкт A, який має специфікацію $P(A) = (p_1(A),..., p_n(A))$ та належить до класу T_A. Застосуємо до нього тричі операцію клонування

$$Clone(A) = (A_1 /(p_1(A),..., p_n(A)))/T_A;$$

$$Clone(A) = (A_2 /(p_1(A),..., p_n(A)))/T_A;$$

$$Clone(A) = (A_3 /(p_1(A),..., p_n(A)))/T_A.$$

Тепер застосуємо до об'єкта A та до його клонів A_1, A_2, A_3 операцію об'єднання та створимо множину об'єктів

$$S = A/T_A \cup A_1/T_A \cup A_2/T_A \cup A_3/T_A =$$

$$= \{A, A_1, A_2, A_3\}/T_S,$$

де T_S – клас новоутвореної множини об'єктів S, специфікація якого в загальному випадку має вигляд

$$P(T_S) = Core(T_S).$$

Очевидно, що S – однорідна мультимножина об'єктів, оскільки

$$A \equiv A_1 \equiv A_2 \equiv A_3.$$

Виходячи з всього вище сказаного, можна зробити висновок, що в загальному випадку

$$S = A \bigcup_{i=1}^{n} (Clone_i(A)),$$

де S – однорідна мультимножина об'єктів.

Тепер можемо покращити цей конструктор шляхом його узагальнення на випадок неоднорідних мультимножин.

Розглядатимемо два різнотипні об'єкти A та B, що володіють різними специфікаціями $P(A)$ та $P(B)$ і належать до класів T_A та T_B відповідно. Тепер застосуємо до них операцію клонування, та двічі клонуємо об'єкт A та тричі об'єкт B, тобто:

$$Clone(A) = (A_1 /(p_1(A),..., p_n(A)))/T_A;$$

$$Clone(A) = (A_2 /(p_1(A),..., p_n(A))) / T_A;$$

$$Clone(B) = (B_1 /(p_1(B),..., p_m(B))) / T_B;$$

$$Clone(B) = (B_2 /(p_1(B),..., p_m(B))) / T_B;$$

$$Clone(B) = (B_3 /(p_1(B),..., p_m(B))) / T_B.$$

Також застосуємо до об’єктів A, B та їх клонів операцію об’єднання та створимо нову множину об’єктів

$$S = A / T_A \cup A_1 / T_A \cup A_2 / T_A \cup$$
$$\cup B / T_B \cup B_1 / T_B \cup B_2 / T_B \cup B_3 / T_B =$$
$$= \{A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, B_3\} / T_S,$$

де T_S – клас новоутвореної множини об’єктів S, специфікація якого в загальному випадку матиме вигляд

$$P(T_S) = (Core(T_S), pr_1(A), pr_2(B)).$$

Очевидно, що S – це неоднорідна мультимножина об’єктів, оскільки $A \equiv A_1 \equiv A_2$, і $B \equiv B_1 \equiv B_2 \equiv B_3$ а об’єкти A та B належать до різних класів. Спираючись на вище наведені факти можна зробити висновок, що в загальному випадку

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \bigcup_{j=1}^{n_i} \left(Clone_j(A_i) \right) \right),$$

де S – це неоднорідна мультимножина об’єктів.

Детерміновані конструктори. Запропонований вище універсальний конструктор мультимножин об’єктів дозволяє створювати довільні мультимножини об’єктів. У результаті чого ми можемо отримувати однорідні та неоднорідні мультимножини об’єктів. Проте не важко помітити, що такий підхід є досить вільним, що дозволяє адаптувати його до різних конкретних випадків, але основною його особливістю є суб’єктивний фактор.

Розглянемо декілька детермінованих конструкторів мультимножин об’єктів, які дозволяють будувати мультимножини об’єктів різних класів за певними, чітко визначеними правилами.

Конструктор-1 (К-1). Розглянемо концепцію множини всіх підмножин деякої множини наведене в [2]. Множина всіх підмножин множини A називається множиною-степенем множини A та позначається

$$P(A) = \{P \mid P \subseteq A\}.$$

Тобто, для множини $A = \{1,2,3\}$

$$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},$$
$$\{1,2,3\}, \{\varnothing\}\}.$$

Враховуючи поняття «об’єкт» та «множина об’єктів», ми приходимо до того, що множини $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ та $\{\varnothing\}$ не підпадають під наведене вище визначення множини об’єктів і тому не є такими. Проте, ми можемо використати концепцію булеану деякої множини, для побудови мультимножин об’єктів.

Розглянемо деяку множину об’єктів $S = \{A, B, C\}$. Тепер побудуємо для неї всі можливі підмножини об’єктів, тобто

$$S_1 = \{A, B\}, S_2 = \{A, C\},$$
$$S_3 = \{B, C\}, S_4 = \{A, B, C\}.$$

З роботи [2] відомо, що кількість усіх можливих підмножин деякої множини A визначається за формулою

$$|P(A)| = 2^n,$$

де $n = |A|$.

У випадку обчислення кількості усіх можливих підмножин об’єктів деякої множини об’єктів S, попередня формула зводиться до наступного вигляду:

$$q(S_w) = 2^n - n - 1,$$

де $S_w \subseteq S$, $q(S_w)$ – це кількість усіх можливих підмножин об’єктів множини об’єктів S, а $n = |S|$.

Застосуємо операцію об’єднання до множин S_1, S_2, S_3, S_4, та створимо нову множину об’єктів , тобто

$$P(S) = S_1 / T_{S_1} \cup S_2 / T_{S_2} \cup S_3 / T_{S_3} \cup S_4 / T_{S_4} =$$
$$= \{A, B\} / T_{S_1} \cup \{A, C\} / T_{S_2} \cup \{B, C\} / T_{S_3} \cup$$
$$\cup \{A, B, C\} / T_{S_4} =$$
$$= \{A, B, A, C, B, C, A, B, C\} / T_{P(S)},$$

де $P(S)$ – це мультимножина об’єктів, а $T_{P(S)}$ – її клас. Очевидно, що $P(S)$ створена за схемою $MS3$ і при цьому виконується умова 3, отже $P(S)$ – дійсно мультимножина об’єктів.

Узагальнюючи вище сказане можна прийти до висновку, що

$$P(S) = \bigcup_{w=1}^{2^n - n - 1} S_w .$$

Теорема 1. Потужність довільної мультимножини об’єктів S^*, що створена за допомогою *К-1* обчислюється за наступною формулою:

$$\left|S^*\right| = \frac{n2^n}{2} - n ,$$

де $n = |S|$, S – базисна множина для S^*.

Доведення. Розглянемо множину $A = \{a, b, c\}$, що є множиною у розумінні класичної теорії множин. Відомо, що потужність її булеану $|P(A)| = 2^n = 2^3 = 8$. Побудуємо $P(A)$

$$P(A) = \{\{\varnothing\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} .$$

Можна помітити, що всі підмножин $P(A)$ містять 12 елементів, тобто

$$q(p) = \frac{3 \cdot 2^3}{2} = 12 ,$$

де p – елемент однієї з підмножин $P(A)$. Використовуючи математичну індукцію приходимо до

$$q(p) = \frac{n2^n}{2} .$$

Тепер побудуємо $P(A)$ з урахуванням поняття «множина об’єктів», тобто:

$$P(A) = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} .$$

Тому логічно, що

$$q(p) = \frac{n2^n}{2} - n .$$

Звідси випливає, що потужність мультимножини об’єктів, що створена за допомогою К-1 обчислюється за формулою

$$\left|S^*\right| = \frac{n2^n}{2} - n ,$$

що і треба було довести.

Кількість підмножин об’єктів різної потужності, що побудовані на основі деякої базисної множини об’єктів та потужності мультимножин об’єктів утворених за допомогою К-1 можна рахувати, за допомогою спеціальної матриці

$\lvert S\rvert$	$q(S_w)$	$\lvert S_b\rvert$	2	3	4	5	6	...
2	1	2	1					
9	4	3	3	1				
28	11	4	6	4	1			
75	26	5	10	10	5	1		
186	57	6	15	20	15	6	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...

,

де стовпчики $|S|$ та $q(S_w)$ відображають потужність побудованої мультимножини об’єктів, та кількість підмножин об’єктів з яких вона була утворена відповідно. Стовпчик $|S_b|$ відображає потужність базисних множин об’єктів, на основі яких генеруються відповідні мультимножини об’єктів. Перший рядок починаючи з 4-го стовпчика відображає кількість підмножин об’єктів певної потужності, де потужність збігається з значенням $a_{1, j \ge 4}$.

Елементи стовпчика $q(S_w)$ розраховуються за формулою

$$q(S_w)_k = \sum_{i \ge 2,\, j \ge 4} a_{i,j} ,$$

де i – фіксоване, або формулою

$$q(S_w)_k = 2^n - n - 1,$$

а елементи стовпчика $|S|$ за формулою

$$|S|_k = \sum_{i \ge 2,\, j \ge 4} a_{i,j} a_{1,j} ,$$

де i – фіксоване, або за формулою

$$|S|_k = \frac{n2^n}{2} - n .$$

Елементи матриці, для яких $i = \overline{2, n}$ та

$j=\overline{4,m}$ обчислюються наступним чином:

$$a_{i,j}=\begin{cases}1, & j-i=2;\\ a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j}, & j-i<2.\end{cases}$$

Конструктор-2 (К-2). Розглянемо декомпозицію множини об'єктів на такі пари підмножин об'єктів об'єднавши які можна отримати початкову множину об'єктів.

Нехай $S=\{A,B,C,D\}$ – множина об'єктів. Виконаємо її декомпозицію на підмножини об'єктів. Існує три варіанти такої декомпозиції

$$S_1=\{A,B\}, S_2=\{C,D\},$$

$$S_3=\{A,C\}, S_4=\{B,D\},$$

$$S_5=\{A,D\}, S_6=\{B,C\}.$$

Кількість усіх підмножин об'єктів множини об'єктів S які можливо утворити шляхом декомпозиції обчислюється наступним чином:

$$q(S_i)=2^n-2n-2,$$

де $n=|S|$.

Застосуємо операцію об'єднання до множин об'єктів $S_1,...,S_6$ та утворимо нову множину об'єктів, тобто:

$$D(S)=S_1/T_{S_1}\cup S_2/T_{S_2}\cup S_3/T_{S_3}\cup$$
$$\cup S_4/T_{S_4}\cup S_5/T_{S_5}\cup S_6/T_{S_6}=$$
$$=\{A,B,C,D,A,C,B,D,A,D,B,C\}/T_{D(S)},$$

де $D(S)$ – це мультимножина об'єктів, а $T_{D(S)}$ – її клас. Очевидно, що $D(S)$ створена за схемою $MS3$ і при цьому виконується умова 3, отже $D(S)$ – дійсно мультимножина об'єктів.

Узагальнюючи вище сказане можна прийти до висновку, що

$$D(S)=\bigcup_{w=1}^{2^n-2n-2}S_w,$$

де $D(S)$ – множина об'єктів, $S_w\subseteq S$, а $n=|S|$.

Лема 1. На основі будь-якої множини об'єктів потужності n можна побудувати n підмножин об'єктів розмірності $n-1$.

Доведення. Розглянемо множину об'єктів $A=\{A,B,C,D\}$. Очевидно, що на її основі можна побудувати 4 підмножини об'єктів потужності 3, тобто:

$$A_1=\{A,B,C\}, A_2=\{A,B,D\},$$

$$A_3=\{A,C,D\}, A_4=\{B,C,D\}.$$

Використовуючи математичну індукцію, приходимо до того, що на основі множини об'єктів потужності n можна побудувати n підмножин об'єктів потужності $n-1$, що і треба було довести.

Наслідок. Результатом об'єднання множини об'єктів потужності n та n підмножин об'єктів потужності $n-1$, які можна на її основі побудувати, є множина об'єктів потужності n^2.

Теорема 2. Потужність довільної мультимножини об'єктів S^*, що створена за допомогою *К-2* обчислюється за наступною формулою:

$$\left|S^*\right|=\frac{n2^n}{2}-(n^2+n),$$

де $n=|S|$ і S – базисна множина для S^*.

Доведення. Розглянемо множину об'єктів $S=\{A,B,C,D\}$, та дві мультимножини об'єктів A та B, що побудовані на її основі за допомогою К-1 та К-2 відповідно, тобто:

$$A=\{A,B\}\cup\{A,C\}\cup\{A,D\}\cup\{B,C\}\cup$$
$$\cup\{B,D\}\cup\{C,D\}\cup\{A,B,C\}\cup\{A,B,D\}\cup$$
$$\cup\{A,C,D\}\cup\{B,C,D\}\cup\{A,B,C,D\}=$$
$$=\{A,B,A,C,A,D,B,C,B,D,C,D,A,B,C,$$
$$A,B,D,A,C,D,B,C,D,A,B,C,D\};$$

$$B=\{A,B\}\cup\{C,D\}\cup\{A,C\}\cup\{B,D\}\cup$$
$$\cup\{A,D\}\cup\{B,C\}=$$
$$=\{A,B,C,D,A,C,B,D,A,D,B,C\}.$$

Дивлячись на мультимножину об'єктів B, можна помітити, що на відміну від мультимножини об'єктів A в об'єднання не потрапляють одна підмножина об'єктів потужності n та n підмножин об'єктів потужності $n-1$ (це випливає з леми 1). За теоремою 1

$$|A| = \frac{n2^n}{2} - n.$$

Враховуючи цей факт, специфіку К-1 за відношенням до К-2 та наслідок леми 1, приходимо до того, що

$$|B| = \frac{n2^n}{2} - (n^2 + n),$$

що і треба було довести.

Кількість підмножин об'єктів різної потужності, що побудовані на основі деякої базисної множини об'єктів та потужності мультимножин об'єктів утворених за допомогою К-2 можна рахувати, за допомогою спеціальної матриці,

$\lvert S\rvert$	$q(S_w)$	$\lvert S_b\rvert$	2	3	4	5	6	...
12	6	4	6					
50	20	5	10	10				
150	50	6	15	20	15			
392	112	7	21	35	35	21		
952	238	8	28	56	70	56	28	
...	...	...	...	...	...	...	...	...

,

де стовпчики $|S|$ та $q(S_w)$ відображають потужність побудованої мультимножини об'єктів, та кількість підмножин об'єктів з яких вона утворена відповідно. Стовпчик $|S_b|$ відображає потужність базисних множин об'єктів, на основі яких генеруються відповідні мультимножини об'єктів. Перший рядок починаючи з 4-го стовпчика відображає кількість підмножин об'єктів певної потужності, де потужність збігається з значенням $a_{1,\, j \ge 4}$.

Елементи стовпчика $q(S_w)$ розраховуються за формулою

$$q(S_w)_k = \sum_{i \ge 2,\, j \ge 4} a_{i,\, j},$$

де i – фіксоване, або за формулою

$$q(S_w)_k = 2^n - 2n - 2,$$

а елементи стовпчика $|S|$ за формулою

$$|S|_k = \sum_{i \ge 2,\, j \ge 4} a_{i,\, j} a_{1,\, j},$$

де i – фіксоване, або за формулою

$$|S|_k = \frac{n2^n}{2} - (n^2 + n).$$

Елементи матриці, для яких $i = \overline{2,n}$ та $j = \overline{4,m}$ обчислюються наступним чином:

$$a_{i,\, j} = \begin{cases} 6, & i = 2,\, j = 4; \\ a_{i-1,\, j-1} + a_{1,\, j+2}, & j > 4,\, j - i = 2; \\ a_{i-1,\, j-1} + a_{i-1,\, j}, & j - 1 < 2. \end{cases}$$

Загальна схема конструктора. Узагальнюючи К-1 та К-2, можна прийти до висновку, що побудову мультимножин об'єктів можна розглядати, як деяку функцію від базисної множини об'єктів, за допомогою якої власне і утворюється мультимножина об'єктів. Називатимемо таку функцію *генеруючою функцією* або просто *конструктором мультимножин*, та позначатимемо її наступним чином:

$$g(S_b) = S,$$

де S_b – базисна множина на основі якої за допомогою генеруючої функції $g(S_b)$, утворюється мультимножина об'єктів S.

Зрозуміло, що К-1 та К-2 є конкретними прикладами детермінованих конструкторів мультимножин.

Очевидно, що повинна існувати і зворотна функція до функції $g(S_b)$

$$g^{-1}(S) = S_b,$$

результатом якої буде базисна множина об'єктів S_b. Прикладом такої функції є операція $bs(S)$.

Висновки

У даній статті пропонується визначення певних операцій над об'єктами, що описують деякі сутності, визначення поняття «мультимножина об'єктів» та схеми створення однорідних та неоднорідних множин та мультимножин об'єктів у рамках CST.

Запропоновані схеми створення однорідних та неоднорідних множин і мультимножин об'єктів, дозволяють конструктивно визначити поняття «множина об'єктів» та «мультимножина об'єктів», що в свою чергу дозволяє говорити про можливість деякої практичної реалізації так званих конструкторів множин та мультимножин об'єктів.

Також у статті пропонуються два універсальних та два детермінованих конструктори мультимножин об'єктів різних класів, пропонується загальна схема конструктора мультимножин об'єктів.

Запропоновані операції над об'єктами дозволяють будувати, класифікувати та порівнювати об'єкти та множини або мультимножини об'єктів, виділяти нові класи об'єктів, генерувати множини та мультимножини об'єктів за певним класом тощо, що дозволяє у певному сенсі практично реалізувати для машини здатність оперувати такими базовими категоріями людського мислення як «множина» та «мультимножина».

Отримані результати можуть бути застосовані в області програмування, штучного інтелекту, при проектуванні та розробці інтелектуальних інформаційних систем, зокрема інтелектуальних експертних систем.

1. *Ван Хао, Мак-Нортон Р.* Аксиоматические системы теории множеств. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 56 с.
2. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – 430 с.
3. *Столл Р.Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. – 231 с.
4. *Терлецький Д.О.* Множини як сукупності-сутностей об'єктів // Комп'ютерна математика. – 2013. – № 2. – С. 64–71.
5. *Страуструп Б.* Язык программирования С++. Специальное издание. – М.: Издательство Бином, Невский диалект, 2004. – 1054 с.
6. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия-Телеком, 2006. – 452 с.
7. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets. Information and control. – 1965. – N 8. – P. 338–353.
8. *Петровский А.Б.* Пространства мно-жеств и мультимножеств.– М.: Едиториал УРСС, 2003. – 248 с.
9. *De Bruijn N.G.* Denumerations of rooted trees and multisets, Discrete Applied Mathematics. – 1983. – Vol. 6. – P. 25–33.
10. *Syropoulos A.* Mathematics of Multisets. – Proceedings of the Workshop on Multiset Processing: Multiset Processing, Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View. – London, Springer-Verlag, 2001. – P. 347–358.

Одержано 16.07.2013

Про автора:

Терлецький Дмитро Олександрович, аспірант 2-го року навчання.

Місце роботи автора:

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
факультет кібернетики,
проспект Глушкова 4д.
Тел: +38(044) 259 0511.
E-mail: dmytro.terletskyi@gmail.com