УДК 517. 519.2, 004:512

В.М. Ильман, В.И. Шинкаренко

КОНСТРУКТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОЖЕСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ И ИХ СВОЙСТВА

На основе конструктивной структуры предложено унифицированное представление гибридных множественных объектов. Рассмотрены алгебраические свойства и операции над этими объектами.

Введение

Множественные структуры играют важную роль не только в классической математике, но и во многих приложениях [1]. Так множественные структуры интерпретируют и отражают технологические процессы предметных областей, являются атрибутами структур данных, языков программирования, используются в сетях Петри, базах данных, в языках запросов и др. И, следовательно, для этих структур во многих прикладных пакетах предусмотрены способы их задания [2], над ними предусмотрены некоторые операции, например, в [3, 4] операции объединения (union), пересечения (intersect), разности (minus) и пр.

Обычно, классические множества принято считать абстрактными не имеющими семантики, т. е. их элементы лишены смыслового признака кроме возможного смысла определяющего универсума. Используя прием именования элементов нетрадиционных множеств последние можно представить в классическом виде. Однако, тогда элементы поименованных представлений множеств приобретают определенный семантический признак, который, как правило в искусственных системах закрепляется синтаксическими правилами или иначе. Например, в языках программирования это типы, структуры данных и др. Еще одно последствие именования проявляется в том, что при «работе» с такими множествами часто необходимо иметь значения элементов (имен-знаков) или их составных частей. Решение этого вопроса возможно с помощью номинативных отношений [5] или более обще – функций множеств [1].

Существует большое разнообразие подходов для задания множеств. Это линейные подходы на основе правил перечисления, функциональные на основе характеристических и других функций, геометрические и алгебраические подходы на основе преобразований, конструктивные на основе формальных грамматик, автоматов, сетей, алгоритмические и иные подходы. Среди множественных объектов по структурному признаку можно выделить классические множества, множества-списки, мультимножества, нечеткие множества, множества с предопределенными свойствами и прочие.

В прикладных областях среди нетрадиционных множественных структур встречаются конструкции с повторяющимися свободными элементами – мультимножества и закрепленными элементами – списки. Достаточно широкий обзор приложений этих структур в компьютерных и других науках дан в работе [6] и частично в материалах конференции [7]. В своей работе Д. Кнут [8] обратил внимание на то, что строки программ следует трактовать как мультимножества. Однако в реальности строки программ представляют более сложные множественные структуры, которые в приложениях необходимо применять на «полную силу».

Исследованию сложных (гибридных) множественных структур на основе мультимножеств и списков посвящена настоящая работа. Подход к представлению технологических процессов, а также программированию на основе гибридных множественных моделей более полно отражает специфику процессов и технологию программирования. Известно, что предметные области и соответственно их множественные модели существенно влияют на представления объектов исследований. Поэтому важен вопрос унификации представления множеств и задание алгебры над унифицированными множественными объектами.

В работе рассмотрены некоторые подходы к заданию множеств и показано, что конструктивные модели построения множественных объектов, их анализ, и «работа напрямую» с такими объектами предпочтительнее. Алгебраический анализ множеств, классов множеств и сложных множеств выполняется на множественных объектах порожденных, предложенной в работе, унифицированной конструктивной моделью. Рассмотрены некоторые операции над множественными объектами.

Представления множественных объектов

Пусть E некоторый (символьный) универсум. Для представления множественных объектов введем нейтральный (пустой) символ ε, такой, что $\varepsilon \in E$ и $\{\varepsilon\} = \varnothing \bigcup \{\varepsilon\}$ [1] и предположим, что $K \subseteq \mathbb{N}$ пусть $K \bigcup \{\varepsilon\} = K_\varepsilon$.

Множество A на универсуме E можно задать перечислением его элементов, т. е. $A = \{a_i\},\, i \in I \subset \mathbb{N},\ \ \forall a_i \in E$ & $\forall a_k, a_j \in A \ \ a_k \neq a_j$, тогда $A \subseteq E$ или функционально, посредством характеристической функции

$$\lambda_A(a) = \begin{cases} 1,\ \forall a \in A; \\ 0,\ a \notin A; \end{cases} \qquad (1)$$

или иным известным способом.

Можно использовать и конструктивный подход к формированию множеств (set) на универсуме E. Так схема-генератор построения любого перечислимого множества $A \subseteq E$ при начальном множестве $E_1 = E \setminus \{\varepsilon\}$ на основе подстановок может быть такой:

$$\begin{cases} \beta \to \{\sigma\}; \\ \sigma \to \eta, \sigma; \\ \sigma \to \varepsilon; \\ \eta \to a \in E_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $\beta \to \{\sigma\}$ – начальная подстановка, а подстановка $\eta \to a \in E_1$ для любого выбранного a применяется один раз в процессе построения множества A, что можно осуществить подстановкой с логическим выводом $\eta \to a \in E_1 \Rightarrow E_1 = E_1 \setminus \{a\}$. Следует отметить, что схема (2) задает как множество $\{\varepsilon\}$, так и любое другое, содержащее пустой элемент ε.

Нетрудно убедиться в том, что представления множества $A = \{a_i\},\, i \in I$, в виде (1) и (2) взаимнооднозначно.

Рассмотрим другую множественную конструкцию – мультимножество. Используем термин мультимножество, введенный Кнутом [9] при рассмотрении элементов комбинаторной математики. Мультимножество M по Кнуту – множество $A = \{a_i\};\, i \in I \subseteq \mathbb{N}$ с повторяющимися элементами кратности k. Если на обычном множестве $B \subset E$ задать отношение повторяемости элементов $\rho^2 : B \times \mathbb{N} \to$ $\to \rho(b,k)$, получим мультимножество M. Очевидно, отношение ρ не рефлексивно, не симметрично, не транзитивно, но упорядочено по представлению пар (b,k). Поэтому, его поименованная структура в скобочной форме имеет вид

$$M = \{(a_i, k_i);\ a_i \in E,\ i \in I,\ k_i \in \mathbb{N}\}. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что из мультимножества (3) как частный случай получается обычное множество

$$M = \{(a_i, k_i);\ k_i = 1,\ \forall i \in I\} =$$

$$= \{(a_i, 1);\ i \in I\} = A.$$

При функциональном подходе – если $f : A \to \mathbb{N}$, то мультимножеству M можно сопоставить характеристическую функцию

$$\lambda_f(a) = \begin{cases} f(a),\ \forall a \in M, \\ 0,\ a \notin M, \end{cases} \qquad (4)$$

которая при значениях $f(a)=1,\ \forall a \in A$ является характеристикой (1) для множества A.

Если снять ограничения по четвертой подстановке в схеме (2), то предыдущая схема (2) порождает мультимножество M на универсуме E с произвольной (заранее неопределенной) кратностью элемента. Устранить этот недостаток можно, введя логический вывод и номинативное отношение $(\mapsto)$ [5] над вторым местом пары (η,α). Так, если принять $E_0 \subset E$ за начальное множество в рекурсивном правиле из (2), то получим иную схему-генератор построения мультимножества

$$\begin{cases} \beta \to \{\sigma\}; \\ \sigma \to (\eta,\alpha),\sigma; \\ \sigma \to \varepsilon; \\ \eta \to a \in E_0;\ \&\ a \in E_0 \Rightarrow E_0 := E_0 \setminus \{a\}; \\ \alpha \mapsto k \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь замечания относительно аксиомы и четвертой продукции остаются теми же, что и в схеме (2).

Так же как предыдущая схема (2), схема (5) генерирует пустое мультимножество и любое другое множество с нейтральным символом. Кроме того, между представлением мультимножества в виде (3) и заданием генератором (5) взаимнооднозначное.

На множестве M может быть задана, посредством указателей (связыванием элементов), как в программировании, или закреплением мест, неявная списочная структура $\bar{M} = \{[a_i, k_i]\}$. Явную структуру списка определим, задав отношение на декартовом произведении $M \times K_\varepsilon \times \mathbb{N}$ так, что $\theta^3 : M \times K_\varepsilon \times \mathbb{N} \to \theta(a, m \mid \varepsilon, k)$ или задав отношение связывания элементов $\vartheta^2 : M \times M \to \vartheta(a,b)$, позволяющие представить список скобочными формами:

$$\bar{M}_N = \{((a_i, m_{ij}), k_i);\ a_i \in M,\ m_{ij} \in K_\varepsilon,$$
$$k_i \in \mathbb{N},\ j = j_1, j_2, \ldots, j_{k_i}\} \qquad (6)$$

$$\bar{M}_Z = \{(a_i, a_j)\};\ a_i, a_j \in M. \qquad (6')$$

В списочном представлении (6) m_{ij} – порядковый номер элемента a_i в последовательности или нейтральный символ, а k_i – кратность этого элемента во множестве $\bar{M}_N$. Представление (6’) указывает на связь элемента a_j с предшественником a_i. Представления (6) и (6’) могут задавать связанные и не связанные списки, однорядные и многорядные и другие списки. Пусть однорядные связанные списки образуют *списочный базис*. Тогда с помощью операций над базисом можно построить другие списочные конструкции. Базисная структура (6) переопределена, так как кратность элемента a_i может быть подсчитана через количество мест этого элемента в списке, однако для дальнейшего удобно использовать это представление. Если в базисной структуре (6) воспользоваться условием

$$\{\varepsilon\} \times E = E \times \{\varepsilon\} = E \times \varnothing = E, \qquad (7)$$

то $\forall a \in E$ имеем $(a,\varepsilon) = a$. Тогда мультимножество является частным случаем списка $\bar{M}$.

Заметим, что отношение θ является отношением частичного порядка по второму месту. Отношение ϑ, вообще говоря, также обладает свойством частичного порядка.

Характеристическая функция базисного списка (6) имеет вид (4), в котором $f : A \to K_\varepsilon \times \mathbb{N}$. При условии $\{\varepsilon\} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}$ эта характеристика λ_f определяет мультимножество M. Для базисного списка со связыванием (6’) характеристическую функцию простого вида построить сложно.

Конструктивно список можно построить на некотором заданном множестве с помощью операций переименования по второму (и третьему) месту.

Определение 1. Операцией переименования f^t по параметру t на множестве K_ε назовем унарное отображение $t: K_\varepsilon \to K_\varepsilon$. Операцией переименования φ^t по двухместному параметру t на множестве M назовем бинарное отображение $t: M \times M \to M \times M$.

Из определения следует, что операции f^t и φ^t неоднозначные, однако, если указать конкретные образы отображений, тогда неоднозначность операций устраняется, и в этом случае обозначим эти операции так f_r^t и $\varphi_{a,b}^t$.

Для списков $\bar{M}_N$ справедлива теорема.

Теорема 1. Если для списков $\bar{M}_N = \{((a_i, m_{ij}), k_i)\}$ и $\bar{M}_N{}' = \{((a'_q, m'_{ql}), k'_q)\}$ имеют место условия: $\#\bar{M}_N = \#\bar{M}'_N$ & $(\forall a_i \in M, \exists a'_q \in M')$ и наоборот; если $a_i = a'_q$ & $k_i = k'_q$, то $\bar{M}_N \xleftrightarrow{f_r^t} M$, $\bar{M}_N \xleftrightarrow{f_r^t} \bar{M}'_N$.

Здесь символ # обозначает мощность множества.

Доказательство теоремы основано на условии (7) и операциях переименования.

Аналогичная теорема имеет место и для списков со связыванием элементов $\bar{M}_z$.

Другие конструктивные схемы генерирования списков (6) и (6') могут быть следующие

$$\begin{cases} \beta \to \{\sigma\}; \\ \sigma \to ((\eta, \alpha), \gamma), \sigma; \\ \sigma \to \varepsilon; \\ \eta \to a \in E; \\ \alpha \mapsto m \in K_\varepsilon; \\ \gamma \mapsto k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \begin{cases} \beta \to \{\sigma\}; \\ \sigma \to (\eta, \alpha), \sigma; \\ \sigma \to \varepsilon; \\ \eta \to a \in E; \\ \alpha \to b \in E. \end{cases} \qquad (8)$$

В схемах (8) $-\beta$ начальный символ и правило $\eta \to a \in E$ применяется как для различных элементов универсума, так и одинаковых элементов – причем места элементов в списке должны быть различными. Пропущенные места в сформированном списке по первой схеме из (8) заполняются нейтральным элементом. Во второй схеме, чтобы список был базовым, должно выполняться условие, по которому в смежных парах первый элемент второй пары обязательно равнялся второму элементу первой пары. Такое задание конструктивных схем списков является упрощенным и частично формальным. Более полной формализации первой схемы из (8) можно достичь с помощью логических выводов на подстановках и последующей операции морфизма μ по схеме (9).

В схеме-генераторе (9) введены обозначения: $|a|$ – значение имени a, $|$ – символ «или». Отметим, что символ a в правилах p_5 повторяется k раз, если это имя в цепочке l образует подцепочку $l_1 = a^k$.

$$S_E = \begin{cases} p_1 : \delta \to \{\sigma\} \Rightarrow i \mapsto 0; \\ p_2 : \sigma \to \varepsilon; \\ p_3 : \sigma \to \gamma m \tau \sigma \Rightarrow m \mapsto 0 \ \& \\ \tau \mapsto k \in \mathbb{N}; \\ p_4 : \begin{pmatrix} \gamma m \tau \to \beta\alpha), \gamma m \tau \ \& \\ |m| < |\tau| \Rightarrow m \mapsto |m| + 1 \ \& \\ i \mapsto |i| + 1 \ \& \ \alpha \mapsto |i| \,|\, \varepsilon \end{pmatrix} \& \\ \begin{pmatrix} \gamma m \tau \to \varepsilon \ \& \ |m| \geq |\tau| \Rightarrow l = \\ = \beta\alpha), \beta\alpha), \ldots \beta\alpha), \\ \varepsilon = \left(\beta\alpha),\right)^{\tau - 1} \beta\alpha), \varepsilon \end{pmatrix}; \\ p_5 : \mu(l) = \left(\mu(\beta\alpha),)\right)^{\tau-1} \mu(\beta\alpha), \varepsilon); \\ \left(\mu(\beta\alpha),)\right) = \\ = \mu(\beta)\mu(\alpha)\mu())\mu(,); \\ \\ \mu(\beta) = (a,; \ \forall a \in E, \\ \mu(\alpha) = |\alpha|; \mu()) =); \mu(,) =,; \mu(,\varepsilon) = \varepsilon. \end{cases} \qquad (9)$$

После конструирования множества в схеме (9) к его элементам применяется свойство поглощения нейтрального символа [10], т. е.

$$x\varepsilon = \varepsilon x = x\,. \qquad (10)$$

Отметим, что рекурсивное правило p_3 частично определяет структурный уровень, конструируемого множества.

Предложенный генератор является унифицированной в том смысле, что он обобщает построения множеств по схемам (2), (5) и больше того, может конструировать гибридные множества, составленные из списков и мультимножеств. Так сложное множество $\bar{M}_1 = \{a,(b,2),(b,3),\varepsilon,c\}$ на части $\{a,b,c,\varepsilon\} \subset E$ может быть получено по схеме (9) – (10) в результате применения последовательности правил:

$$P_1 = (p_1, p_3, p_3, p_3, p_3, p_2, p_{4,1}(1), p_{4,2}, p_5(a), p_{4,1}(2), p_{4,1}(3), p_{4,2}, p_5(b), p_{4,1}(4), p_{4,2}, p_5(\varepsilon), p_{4,1}(5), p_{4,2}, p_5(c)).$$

Последовательность P_1 по правилу p_3 является четырех уровневой, а по правилу $p_{4,1}$ – двух уровневой и образует конструкцию $\{(a,\varepsilon)\varepsilon,(b,2),(b,3)\varepsilon,(\varepsilon,\varepsilon)\varepsilon,(c,\varepsilon)\varepsilon\}$. Теперь используя свойство поглощения пустого символа (10) и учитывая условие (7), получаем множество $\bar{M}_1$. В полученном множестве свободные элементы a, c и ε образуют мультимножество ограниченное первым, четвертым и пятым местами их возможного расположения. Поэтому множество $\bar{M}_1$ можно записать и так $\{\varepsilon,c,a,(b,3),(b,2)\}$ или иначе. Представление сложного множества $\bar{M}_1$ в виде $\{a,(b,2),(b,3),\varepsilon,c\}$ назовем его *нормальной формой*.

Сложное множество $\bar{M}_1$ можно также построить на мультимножестве $M = \{\varepsilon,a,b,c,b\}$, используя операции переименования и результаты теоремы 1, так имеем:

$$\{\varepsilon,a,b,c,b\} = \{(\varepsilon,\varepsilon),(a,\varepsilon),(b,\varepsilon),(c,\varepsilon),(b,\varepsilon)\} \xrightarrow{f_r^t} \{\varepsilon,(b,2),(b,3),a,c\}.$$

Таким образом, унифицированное представление сложных множеств осуществляется через наборы списков (мультимножеств) $\bar{M}_r$. Например, в языковых средах программирования, языках баз данных и др. можно сконструировать сложные множественные структуры: на множествах множеств, множества списков и пр. Эти сложные структуры можно представить единообразно с представлением (6) и (6’) $\bar{M} = \{((\bar{M}_r, m_{rj}), k_r)\}$ или

$$\bar{M} = \{(\bar{M}_r, \bar{M}_i)\}\,. \qquad (11)$$

Выражения (11) несмотря на свою компактность, могут иметь довольно сложные структуры, в них могут разнообразно сочетаться списочные и мультимножественные конструкции и даже незанятые места – «дыры». Для устранения дыр, как и в схемах (8) на свободных местах следует использовать нейтральный элемент.

Например, комбинация схемы мультимножества типа (2) со второй списочной схемой (8) дает конструктивную схему-генератор

$$G_E = \begin{cases} \beta \to \{\sigma\}; \\ \sigma \to (\alpha,\gamma),\sigma; \\ l = (\alpha,\gamma),(\alpha,\gamma),\cdots(\alpha,\gamma),\sigma; \\ \sigma \to \eta,\sigma; \\ l \to vh\omega;\ h = (\alpha,\gamma),(\alpha,\gamma),\cdots(\alpha,\gamma); \\ \sigma \to \varepsilon; \\ \gamma),(\alpha \to \chi),(\chi; \\ \chi \to c;\ \forall c \in E; \\ \eta \to a \in E; \\ v(\alpha \to \varepsilon(b;\ \forall b \in E; \\ \gamma)\omega \to d),\sigma;\ \forall d \in E, \end{cases},$$

порождающую сложные множества. Можно также воспользоваться при конструировании сложных множеств приемом многоуровневого проектирования, как в программировании [11], используя схему-генератор (9).

Множества множеств (11) могут иметь еще более сложные представления через структуры объектов. Так, например, элементами множеств могут быть объекты связанных элементов (концов) универсума с бинарными связями типа интервалов [12], с n-арными связями типа графовых и др., атрибутивные множественные структуры и прочее. Однако, используя прием именования объектов множеств в (11) всегда можно перейти к представлению множеств в виде (6) или (6').

Утверждение 1. Конструктивные схемы-генераторы (2), (5) и S_E, G_E порождают перечислимые множества.

Дадим несколько необходимых понятий и определений.

Определение 2. Множественным объектом (МО) $\bar{M}$ назовем конструктивное множество, которое сгенерировано схемой S_E или G_E (теоремой 1) и представленное в нормальной форме.

Так как элементы мультимножеств этих гибридных объектов могут располагаться на различных свободных местах, то представление множественных объектов генератором (9) являются *многоэкземплярным*. Так для рассмотренного выше объекта $\bar{M}_1$ в схеме S_E, имеем шесть экземпляров форм представления $\{a,(b,2),(b,3),\varepsilon,c\}$, $\{a,(b,2),(b,3),c,\varepsilon\}$, $\{c,(b,2),(b,3),\varepsilon,a\}$, $\{c,(b,2),(b,3),a,\varepsilon\}$, $\{\varepsilon,(b,2),(b,3),a,c\}$ и $\{\varepsilon,(b,2),(b,3),c,a\}$. Очевидно, количество экземпляров m представления МО определяется параметрами входящего в него мультимножества M. Если $\#M = n$ и k_j, $j=1,2,\dots,s$ кратности элементов множества M такие что, их сумма $\sum_{j=1}^{s} k_j = n$, то m – полиномиальный коэффициент равный $n!\Big/\prod_{j=1}^{s} k_j!$. В дальнейшем примем $\bar{M} = \{\bar{M}_i\}_{i=1}^{m}$. При значении $m=1$ множественный объект вырождается в список или мультимножество.

Определение 3. Множество всех МО объектов, порожденных генератором S_E (G_E), образуют класс – E^* (E_G^*).

Утверждение 2. Классы E^* и E_G^* не совпадают.

В дальнейшем уделим основное внимание гибридным множествам, порождаемым генератором S_E. К порождаемому МО объекту применяются правила (7) и (10), которые не порождают объект, а только трансформирует его, поэтому можно говорить об объекте, порожденном генератором S.

Задать класс МО объектов E^* можно также с помощью формального индуктивного правила:

$\bar{M}_0 = E$ – МО нулевого уровня;

$\bar{M}_{n+1} = \{E \xrightarrow{S_E} \bar{M}_n\}, n \geq 0$;

$E \xrightarrow{S_E} \bar{M}_n$ – конечное отображение по схеме (9) – (10) до $n+1$-го уровня;

$\bar{M}_n$ – МО n-го уровня, $n = \max\limits_{i,j}\{k_i + m_{ij}\} - 1$ (использованы обозначения формулы (6)).

Если M_n^* – класс объектов n-го уровня, тогда класс МО строится на классах объектов различного уровня $E^* = \bigcup\limits_{i \geq 0} \bar{M}_i^*$.

Рассмотрим некоторые алгебраические свойства класса E^*.

Над классом E^*, как над обычным множеством объектов можно ввести *алгебру подклассов* $\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}(E^*, \{\bigcup, \bigcap, \setminus, \subset, \supset\})$.

Так как множество $\{\varepsilon\} \subset E^*$ и, если из класса E^* исключить пустое множество, то получим *подкласс* $E^+ = E^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Определение 4. Пусть подмножество $A \subseteq E$, тогда схема S_A – подсхема схемы S_E, т.е. $S_A \subseteq S_E$, а множество A по отношению к схеме S_A назовем *определяющим*.

Утверждение 3. На определяющем множестве A в схеме S_A порождается класс A^* такой, что $\varnothing \subset A^*$.

Из определений 3 и 4 и утверждений 1 и 3 имеем результат.

Теорема 2. Если $A \subseteq E$; $B, C \subset E$, то $A^* \subseteq E^*$ и $B^* \bigcup C^* \subseteq E^*$, и $B^* \bigcap C^* \subset \subset E^*$, и $B^* \setminus C^* \subset E^*$.

Если класс $A^* \subset E^*$, тогда $E^* \setminus A^* = \overline{A}^*$ есть *дополнение класса* A^* до класса E^*. Для дополнения $\overline{A}^*$ справедливы свойства.

Свойство 1. $A^* \bigcap \overline{A}^* = \varnothing$.

Свойство 2. $A^* \bigcup \overline{A}^* = E^*$.

Теорема 3. На любом определяющем множестве $A \subseteq E$ с помощью операции переименования строится тот же класс A^*, что и по схеме S_A.

Следствие 1. Алгебра $\mathfrak{A}_E$ – универсальная.

Следствие 2. Класс E^* является кольцом по включению его подклассов.

Так как из теоремы 2 имеем, что

$$\forall A^*, B^* \subset E^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^* \bigcup B^* \subseteq E^* \,\&\, A^* \setminus B^* \subset E^*.$$

Утверждение 4. По любому подклассу класса E^* однозначно восстанавливается определяющее множество соответствующей схемы.

Утверждение 5. Пустое множество – верхний предел последовательностей подклассов класса E^*.

Рассмотрим некоторые операции и отношения над множественными объектами класса E^*.

Операции и отношения над множественными объектами

В предыдущем параграфе уже рассмотрены две операции переименования и их свойства. Эти операции можно применять и ко всем МО объектам. Для корректного задания других операций над сложными множествами необходимо ввести некоторые предварительные сведения, касающиеся структуры множеств. Структуру МО объектов удобно задавать через пути их порождения генератором S.

Пусть МО $\overline{M} \in E^*$, тогда он по определению 3 порождается генератором S_E.

Определение 5. Последовательность (кортеж) правил p_i схемы S_E $P = (p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n})$ необходимых для построения МО $\overline{M} \in E^*$ назовем путем порожденного объекта или его структурой.

Отношение между путем P и порожденным им объектом $\overline{M}$ однозначное, но не взаимнооднозначное.

Определение 6. Два пути P_i и P_j эквивалентны $P_i \sim P_j$, если они порождают один и тот же множественный объект.

Отношение ~ является отношением эквивалентности. Обозначим P^* класс эквивалентности по отношению к объекту $\overline{M}$ его путей.

Путь порождения объекта может быть конечным или бесконечным. Ограничимся рассмотрением конечных путей.

Определение 7. Количество элементов кортежа пути P назовем его *длиной* $|P|$.

Допущение 1. Примем правило $p_{i_1} = p_1$ за начало пути, а заключительное правило p_{i_n} ограниченного пути – за конец пути. Концом пути в схеме S_E может быть любое правило схемы, в том числе и правила p_2 или p_5.

Определение 8. Два пути $P_i = (p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n})$ и $P_j = (p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_m})$ считаются *равными* $P_i = P_j$, если имеют место два условия:

1) $|P_i| = |P_j|$ или $n = m$,

2) имена их правил в схеме S_E на одинаковых местах совпадают.

Равенство путей (=) является отношением эквивалентности, но не задает эквивалентность этих путей.

Пусть на некотором определяющем множестве $A \subseteq E$ в схеме S_A порожден МО объект $\bar{M}$, структура порождения которого $P_i \in P_{\bar{M}}^*$ имеет вид $(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n})$.

Определение 9. Структура $P_j = (p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_m})$ в схеме S называется подструктурой пути P_i и записывается как $P_j \prec P_i$, если $m \le n$ и $p_{i_k} = p_{j_k}$, $1 \le k \le m$. Путь P_j назовем префиксом (префиксным путем) пути P_i.

Очевидно, что отношение $\prec$ на путях МО объекта задает частичный порядок.

Из допущения 1 и определения 9 имеем, что любой путь подструктуры начинается из правила p_1 схемы (9) и может оканчиваться любым из правил этой схемы, т. е. подструктура P_j может порождать или не порождать МО. Путь, порождающий МО в некоторой схеме S обозначим $\bar{P}$.

Утверждение 6. Если для определяющего множества A в схеме S_A порождены некоторые объекты со структурой $\bar{P}_i$ и $\bar{P}_j$, причем порождающая структура $\bar{P}_j$ в схеме S_B $(B \subset A)$ всегда такая, что $\bar{P}_j \prec \bar{P}_i$ в схеме S_A, то S_B является подсхемой схемы S_A, т. е. $S_B \subset S_A$.

Определение 10. Подмножественным объектом (подмножеством, префиксным множеством) $\bar{M}_i$ генерируемым в схеме S_B объекта $\bar{M}$ $(\bar{M}_i \prec \bar{M})$ в схеме S_A $(S_B \subset S_A)$ назовем такое подмножество, порожденное путем $\bar{P}_{\bar{M}_i}$, что $\bar{P}_{\bar{M}_i} \prec \bar{P}_{\bar{M}}$. Множество всех подмножеств объекта $\bar{M}$ назовем классом подмножеств (классом префиксных множеств) $\bar{M}^* = \{\bar{M}_i\}$.

Пусть два МО объекта $\bar{M}_i, \bar{M} \in E^*$ сгенерированы в соответственных схемах S_B и S_A установим критерий, при котором объект $\bar{M}_i$ будет подмножеством объекта $\bar{M}$.

Теорема 4. Объект $\bar{M}_i$ является подмножеством объекта $\bar{M}$ тогда и только тогда, когда $B \subset A$ и для их любых порождающих путей $\bar{P}_{\bar{M}_i} = (p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m})$, $\bar{P}_{\bar{M}} = (p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_n})$ имеет место $m \le n$, $p_{i_k} = p_{j_k}$, $1 \le k \le m$, и при этом совпадающие правила порождают, точность до экземпляров объекта $\bar{M}$, одинаковые пары (a_s, z); $a_s \in B$, $z \in K_\varepsilon$.

Для рассмотренного выше примера путь порождения P_1 множественного объекта $\bar{M}_1 = \{a, (b,2), (b,3), \varepsilon, c\}$ позволяет выделить в нем подструктуры (p_1, p_2), $(p_1, p_3, p_2, p_{4,1}(\varepsilon), p_{4,2}, p_5(a))$, $(p_1, p_3, p_3, p_2, p_{4,1}(\varepsilon), p_{4,2}, p_5(a \mid \varepsilon \mid c), p_{4,1}(2), p_{4,2}, p_5(b)), \ldots$

Тогда множество подмножеств – для объекта $\bar{M}_1$ в нормальной форме, составленное из их экземпляров является

$$\bar{M}_1^* = \left\{ \begin{array}{l} \{\left(\begin{array}{l} a \\ c \\ \varepsilon \end{array}\right\}, \{\left(\begin{array}{l} a \\ c \\ \varepsilon \end{array}, (b,1)\}, \\ \{\left(\begin{array}{l} a \\ c \\ \varepsilon \end{array}, (b,1), (b,2)\}, \\ \{\left(\begin{array}{l} a \\ c \\ \varepsilon \end{array}, (b,1), (b,2), \\ \left(\begin{array}{l} \varepsilon \\ a \\ c \end{array}\right\}, \{\left(\begin{array}{l} a \\ c \\ \varepsilon \end{array}, (b,1), (b,2), \left(\begin{array}{l} \varepsilon \\ a \\ c \end{array}, \left(\begin{array}{l} c \\ \varepsilon \\ a \end{array}\right\} \end{array} \right\}, \quad (12)$$

где скобками $\left(\begin{array}{l} a \\ c \\ \varepsilon \end{array}\right.$ обозначены альтернативные элементы подмножеств, которые могут располагаться на соответствующих местах без повторений (кратность символов a, ε, c равна единице).

Замечание 1. Для класса $\bar{M}^*$ объекта $\bar{M}$ справедливо:

1) $\bar{M}^* \subset E^*$;

2) если $\bar{M}_i \in \bar{M}^*$ и $\exists \bar{M}_{i_j} \in \bar{M}^*$, $j = 1, 2, \cdots, k$; $\bar{M}_{i_1} \prec \bar{M}_{i_2} \prec \cdots \prec \bar{M}_i$, то для множественного объекта $\bar{M}_i$ имеет место *иерархия по отношению* $(\prec)$;

3) объект $\bar{M}_1 \in \bar{M}^*$ есть *минимальный префикс*, если $\nexists \bar{M}_j$ в классе $\bar{M}^*$, чтобы $\bar{M}_j \prec \bar{M}_1$;

4) в классе $\bar{M}^*$ минимальный префикс, в общем, не единственен; так для класса (12) их три $\{a\}$, $\{c\}$ и $\{\varepsilon\}$.

Так как МО объекты не однородны по составу, то для дальнейшего из них удобно выделить «однородные» части. Для этого введем две операции.

q_1 – операция извлечения приведенного списка $\bar{M}_N$ из множественного объекта $\bar{M}$, является одноуровневым морфизмом, действующим по правилу:

$$q_1(\bar{M}) = q_1(\{\ldots, a, (\cdot,\cdot), b, \ldots\}) = q_1(\{)\ldots q_1(,)$$
$$q_1(a) q_1(,) q_1((\cdot,\cdot)) q_1(,) q_1(b) q_1(,) \ldots q_1(\});$$

$$q_1(\{) = \{;\ q_1(\}) = \};\ q_1(,) = ,;\ q_1((\cdot,\cdot)) = (\cdot,\cdot);$$
$$q_1(a) = \varepsilon;\ \forall a \in E;$$

q_2 – операция извлечения мультимножества M из МО объекта $\bar{M}$, является двухуровневым морфизмом с межуровневым преобразованием, действующая по правилам:

на первом уровне

$$q_2(\bar{M}) = q_2(\{\ldots a, (\cdot,\cdot), (\cdot,\cdot), b, (\cdot,\cdot), (\cdot,\cdot)\}) =$$
$$= q_2(\{)\ldots q_2(a) q_2(,) q_2((\cdot,\cdot),) q_2((\cdot,\cdot),)$$
$$q_2(b) q_2(,) q_2((\cdot,\cdot),) q_2((\cdot,\cdot)\});$$

$$q_2(\{) = \{;\ q_2((\cdot,\cdot)\}) = (\cdot,\cdot)\};\ q_2(,) = ,;$$
$$q_2((\cdot,\cdot),) = \varepsilon;\ q_2(a) = a;\ \forall a \in E;$$

после преобразований поглощения (10) в полученном множестве, имеем $\{\ldots a, b, (\cdot,\cdot)\} = \bar{M}_2$;

на втором уровне

$$q_2(\bar{M}_2) = q_2(\{)\ldots q_2(a) q_2(,) q_2(b) q_2(,(\cdot,\cdot)\});$$

$$q_2(\{) = \{;\ \ q_2(,) = ,;\ q_2(,(\cdot,\cdot)\}) = \varepsilon\};$$
$$q_2(a) = a;\ \forall a \in E.$$

Утверждение 7. $\forall \bar{M} \in E^*$ с помощью операций q_1 и q_2 однозначно выделяются такой приведенный список $\bar{M}_N$ и мультимножество M, что $\bar{M}_N, M \in E^*$ и вообще говоря $\bar{M}_N, M \notin \bar{M}^*$.

Например, операции q_1 и q_2, извлекают из объекта $\bar{M}_1 = \{a, (b,2), (b,3)$, $\bar{M}_1 = \{a, (b,2), (b,3), \varepsilon, c\}$ приведенный список $\{[\varepsilon, (b,1), (b,2), \varepsilon, \varepsilon]\}$ и множество $\{\varepsilon, a, c\}$. Эти множества не являются подмножествами объекта $\bar{M}_1$, хотя список имеет такую же структуру порождения, как и МО, а мультимножество имеет другую структуру –

$$p_1, p_3, p_3, p_3, p_2, p_{4,1}, p_{4,2},$$
$$p_5, p_{4,1}, p_{4,2}, p_5, p_{4,1}, p_{4,2}, p_5.$$

Здесь, для отличия обычного списка от приведенного, введены скобки $([,])$.

Таким образом, операции q_1 и q_2 осуществляют однозначную декомпозицию МО объектов, кроме того, они позволяют выполнить декомпозицию и префиксных классов. Например, для класса (12) имеем декомпозицию объектов

$$M^* = \left\{ \left(\begin{matrix} \{a\} \\ \{c\}, \\ \{\varepsilon\} \end{matrix} \right. \left(\begin{matrix} \{a, \varepsilon\} \\ \{a, c\}, \{a, c, \varepsilon\} \\ \{\varepsilon, c\} \end{matrix} \right. \right\}$$

и

$$\bar{M}_N^* = \left\{ \begin{matrix} [\varepsilon, (b,2)], [\varepsilon, (b,2), (b,3)], \\ [\varepsilon, (b,2), (b,3), \varepsilon], \\ [\varepsilon, (b,2), (b,3), \varepsilon, \varepsilon] \end{matrix} \right\}.$$

Утверждение 8. Если декомпозиции M^* и $\bar{M}_N^*$ класса $\bar{M}^*$, то справедливо замечание 1.

Для преобразования приведенного списка в обычный, вообще несвязанный список, рассмотрим морфизм g рекурсивного парного группирования элементов приведенного списка с последующим применением свойств (7) и (10).

Пусть приведенный список $\bar{M}_N$ некоторого множественного объекта $\bar{M} \in E^*$ такого, что $\bar{M}_N = \{[\ldots\varepsilon, c_k, \varepsilon, \varepsilon, c_{k+3}, \varepsilon, \varepsilon]\}$, где $c_i = (a,i)$, $a \in E$, $i \in \mathbb{N}$; тогда

$$g(\bar{M}_N) = g(\{[\ldots\varepsilon, c_k, \varepsilon, \varepsilon, c_{k+3}, \varepsilon, \varepsilon]\}) =$$
$$= g(\{[)\ldots g(\varepsilon, c_k), g(\varepsilon,\varepsilon), g(c_{k+3},\varepsilon), g(\varepsilon])\};$$

$$g(\{[) = \{,\ g(\varepsilon, c_k) = (\varepsilon, c_k) = c_k,$$
$$g(\varepsilon,\varepsilon) = (\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon;$$

$$g(c_{k+3},\varepsilon) = (c_{k+3},\varepsilon) = c_{k+3},$$
$$g(\varepsilon]) = \varepsilon] =],\ g(]\}) = \};$$

$$g(\{\ldots c_k, \varepsilon, c_{k+1},]\}) = g(\{c_j \mid \varepsilon)\ldots$$
$$g(c_k,\varepsilon), g(c_{k+1},])\};$$

$$g(\{c_j) = \{c_j,\ g(\{\varepsilon) = \{\varepsilon = \{,\ g(c_{k+1},]) = c_{k+1};$$

……………………………………

Модифицированный с помощью парного группирования g приведенный список $\bar{M}_N$ обозначим, как $\bar{M}_N^g$. Список $\bar{M}_N^g$ обладает свойством частичной принадлежности к классу E^*. Устранить частичность можно с помощью операции переименования f_r^t.

Очевидно, всякий МО объект можно представить через его компоненты декомпозиции, если будет задана процедура восстановления объекта. Для этого введем операцию *композиции* (w) в определенном смысле противоположную процедуре декомпозиции.

Пусть для МО объекта $\bar{M}$ компонентами декомпозиции является приведенный список $\bar{M}_N$ и мультимножество M. Если вначале принять $T = M$, тогда операцию (w) определим через последовательную подстановку и присвоение

$$\begin{aligned} &\varepsilon \to a, \forall a \in T \,\&\, T \neq \varnothing \setminus \{\varepsilon\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T := T \setminus \{a\} \end{aligned} \tag{13}$$

ко всем нейтральным символам приведенного списка $\bar{M}_N$.

Отметим, что композицию МО объекта $\bar{M}$ можно частично осуществить и над модифицированным списком $\bar{M}_N^g$, дополняя его элементами мультимножества до связанного объекта.

Лемма 1. Для приведенного списка $\bar{M}_N$ количество подстановок (13) совпадает с порядком нейтрального элемента и мощностью мультимножества M, и по ним восстанавливается объект $\bar{M}$.

Из леммы и определения операции (w) имеем, что $\bar{M} = w(\bar{M}_N, M)$, $\bar{M}_N = w(\bar{M}_N, \varnothing)$, $M = w(\varnothing, M)$ и $\varnothing = w(\varnothing,\varnothing)$. В общем случае операция (w) не коммутативна и не ассоциативна. Кроме того, из леммы 1 также имеем.

Теорема 5. Если M^* и $\bar{M}_N^*$ компоненты композиции класса $\bar{M}^*$, то $\forall \bar{M}_N \in \bar{M}_N^*$, $\exists M \in M^*$, $w(\bar{M}_N, M) \in \bar{M}^*$.

Рассмотрим подобие теоретико-множественных операций над компонентами классов E^* и $\bar{M}^*$, при этом учитываем, что для любой из этих операций $(*)$ имеет место свойство

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 * \bar{M}_2 &= w(M_1, \bar{M}_N^1) * w(M_2, \bar{M}_N^2) = \\ &= w(M_1 * M_2, \bar{M}_N^1 * \bar{M}_N^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Известно [8, 9, 13 – 15], что к мультимножествам применимы операции обычного объединения $(\bigcup)$ и объединения со сложением $(\uplus)$, обычного пересечения $(\bigcap)$ и пересечения с умножением $(\cap)$, разности (\) и др., которые $\forall M_i, M_j \in E^*$ выполняются по правилам:

$$M_i \bigcup M_j = \{x;\ x \in M_i \mid M_j,$$
$$m(x) = \max\{m_{M_i}(x), m_{M_j}(x)\},\ m(x) \in \mathbb{N}\}.$$

$$M_i \uplus M_j = \{x;\ x \in M_i \mid M_j,$$
$$m(x) = m_{M_i}(x) + m_{M_j}(x),\ m(x) \in \mathbb{N}\}.$$

$$M_i \bigcap M_j = \{x;\ x \in M_i \,\&\, M_j,$$
$$m(x) = \min\{m_{M_i}(x), m_{M_j}(x)\},\ m(x) \in \mathbb{N}\}.$$

$$M_i \cap M_j = \{x;\ x \in M_i \,\&\, M_j,$$
$$m(x) = m_{M_i}(x) + m_{M_j}(x),\ m(x) \in \mathbb{N}\}.$$

$$M_i \supseteq M_j, M_i \setminus M_j = \{x;\ x \in M_i \,\&\, x \notin M_j,$$
$$m(x) = m_{M_i}(x) - m_{M_i \bigcap M_j}(x),\ m(x) \in \mathbb{N}\}.$$

Из приведенных правил следует, что операции $(\bigcup)$, $(\bigcap)$ и (\) – обобщения операции с обычных множеств на мультимножества, а операции $(\uplus)$ и $(\cap)$ отсутствует в классических множествах. Операция $(\uplus)$ порождает новое множество присоединением к множеству M_i множества M_j и поэтому она не коммутативна. Операция $(\cap)$ предполагает суммирование порядков общих элементов операндов-множеств.

Распространим эти операции на базисные списки $\bar{M}_i, \bar{M}_j \in E^*$. Пусть именными носителями, для списков $\bar{M}_i$ и $\bar{M}_j$ будут множества $A_i, A_j \subset E$ и носителями мест списков $N_i, N_j \subset \mathbb{N}$.

$$\bar{M}_i \bigcup \bar{M}_j = \{(x,r);\ x \in A_i \mid A_j,\ r \in N_i \mid N_j,$$
$$m(x) = \max\{m_{\bar{M}_i}(x), m_{\bar{M}_j}(x)\},\ m(x) \in \mathbb{N}\} = \bar{M}^2$$

– в общем случае двухкомпонентный (несвязанный) списочный класс такой, что $\bar{M}^2 \subset E^*$.

При этом возможны случаи:

1) если $(a_i, r_i) \in \bar{M}_i$, $(a_j, r_j) \in \bar{M}_j$ и $a_i = a_j$, $r_i = r_j$, то в классе $\bar{M}^2$ имеем общую пару $(a_{i|j}, r_{i|j})$ и $\bar{M}^2$ имеет связное двухрядное представление;

2) если $(a_i, r_i) \in \bar{M}_i$, $(a_j, r_j) \in \bar{M}_j$ и $a_i \ne a_j$, $r_i = r_j = r$, то в двухкомпонентном классе $\bar{M}^2$ имеем именную альтернативную пару $(a_i \mid a_j, r)$;

3) если $\bar{M}_i \prec \bar{M}_j$, то $\bar{M}^2 = \bar{M}_j$.

Класс $\bar{M}^2$ для первого и второго случаев является двухрядным по представлению, а в третьем случае вырождается в список класса E^*. Например, объединение $(\bigcup)$ базисных списков класса E^*, $\bar{M}_1 = \{(a,1),(b,2),(b,3),(c,4),(c,5)\}$ и $\bar{M}_2 = \{(a,1),(c,2),(b,3),(b,4)\}$ является двухрядным списком

$$\{(a \mid a,1),(b \mid c,2),(b \mid b,3),(c \mid b,4),(c,5)\}.$$

Следующую операцию присоединения списка $\bar{M}_j$ к списку $\bar{M}_i$ с последующим переименованием по второму параметру элементов – $\bar{M}_j$ зададим так, чтобы результирующий список $\bar{M}_1$ был связным, т. е. $\bar{M}_1 \in E^*$ и

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_i \uplus \bar{M}_j = \{(x,r); x \in A_i \mid A_j, r \in N_i \mid N_j,$$
$$m(x) = m_{M_i}(x) + m_{M_j}(x),\ m(x) \in \mathbb{N},$$
$$\left((x, r_j) \in \bar{M}_j\right) \xrightarrow{f_{s+j}^t} \left((x, r_{s+j}) \in \bar{M}_1\right)\}.$$

Так объединением $(\uplus)$ списков из предыдущего примера будет следующим:

$$\{(a,1),(b,2),(b,3),(c,4),(c,5),(a,6),$$
$$(c,7),(b,8),(b,9)\}.$$

Анализ операций $(\bigcup)$ и $(\uplus)$ над мультимножествами и списками показывает, что первая операция, в общем, может применяться только над множественными объектами префиксного класса $\bar{M}^*$. Другая операция может применяться без ограничений на всем классе E^*. При этом по операции $(\bigcup)$ выполняется свойство замыкания на классе $\bar{M}^*$, а по операции $(\uplus)$ – на классе E^*.

На основе операций объединения $(\bigcup)$ и $(\uplus)$ рассмотрим комбинированную операцию *частичного покрытия* $(\cup)$, для которой на мультимножествах – $\cup = \bigcup$, а на списках справедливо частичное равенство $\cup \cong \uplus$, по которому имеет место правило:

$$\bar{M}_i \cup \bar{M}_j = (\bar{M}_{i1} \uplus \bar{M}_1) \cup (\bar{M}_{11} \uplus \bar{M}_{j1}) = \\ = \bar{M}_i \uplus \bar{M}_{j1}.$$

Здесь, в списках $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_{11}$ совпадают имена элементов и их порядок следования. Операция частичного покрытия предполагает использование операции переименования по месту для связности результата.

Операция $(\cup)$ обобщает операцию $(\bigcup)$ на классе $\bar{M}^*$, ибо для подмножества $\bar{M}_i \prec \bar{M}_j$ справедливо $\bar{M}_i \cup \bar{M}_j = \bar{M}_i \bigcup \bar{M}_j$. Поэтому класс $\bar{M}^*$ частично замкнут по операции $(\cup)$.

Операция разности над списками имеет смысл тогда, когда они частично имеют одинаковые имена элементов. Рассмотрим четыре модификации этой операции.

Операция естественной разности $(\setminus)$ объектов.

$$\bar{M}_i \setminus \bar{M}_j = \{(x,r);\ (x,r) \in \bar{M}_i \,\&\, (x,r) \notin \bar{M}_j, \\ (x,r_i) \xrightarrow{f^t_{s+i}} (x, r_{s+i})\}.$$

Операция разности по имени и месту $(\setminus_0)$ – (сильная разность).

$$\bar{M}_i \setminus_0 \bar{M}_j = \begin{cases} (x,r), & (x,r) \in \bar{M}_i \,\&\, (x,r) \notin \bar{M}_j; \\ \varepsilon, & (x,r) \in \bar{M}_i \,\&\, (x,r) \in \bar{M}_j. \end{cases}$$

Операция разности по имени $(\setminus_1)$ – (обобщенная разность) [1].

$$\bar{M}_i \setminus_1 \bar{M}_j = \begin{cases} (x,r), & x \in A_i \,\&\, x \notin A_j,\ r \in N_i; \\ \varepsilon, & x \in A_i \,\&\, x \in A_j. \end{cases}$$

Результатом рассмотренных операций разности является приведенный список, который можно свести к обычному списку, используя операции g и f^t_r, такой оператор назовем разностью с переименованием $\setminus\setminus = f^t_r \circ g \circ \setminus$.

Операции разности легко переносятся на множественные объекты. Например, для множественного объекта $\bar{M}_1 = \{a,(a,2),d,(b,4),c,(c,6)\}$ и объекта $\bar{M}_2 = \{(c,1),a,c,(e,4),(d,5)\}$ разность их мультимножеств – $M_1 \setminus M_2 = \{d\}$ следовательно, $\bar{M}_1 \setminus \bar{M}_2 = \{(a,1),d,(b,3),(c,4)\}$, а обобщенная разность приведенных множеств соответственно является $\bar{M}^1_N \setminus_1 \setminus_1 \bar{M}^2_N = \{[\varepsilon,(a,2),\varepsilon,(b,4),\varepsilon,\varepsilon]\}$, поэтому $\bar{M}_1 \setminus_1 \bar{M}_2 = \{d,(a,2),\varepsilon,(b,4),\varepsilon,\varepsilon\}$ – четырехэкземплярный МО. Разность же $(\setminus\setminus)$ на МО объектах неоднозначна, так разность $\bar{M}_1 \setminus\setminus \bar{M}_2$ определяет три различных множества $\{d,(a,2),(b,3)\}$, $\{(a,1),d,(b,3)\}$ и $\{(a,1),(b,2),d\}$.

Введенные разности $(\setminus)$, $(\setminus_0)$ и $(\setminus_1)$ позволяют рассмотреть три модификации симметрической разности объектов

$$\bar{M}_1 \Delta \bar{M}_2 = (\bar{M}_1 \tilde{\setminus} \bar{M}_2) \uplus (\bar{M}_2 \tilde{\setminus} \bar{M}_1),$$

где под символом $(\tilde{\setminus})$ понимается любая из трех операций разности.

Теперь рассмотрим операцию пересечения списков в модификациях.

Сильная операция пересечения по имени и месту $(\bigcap)$.

$$\bar{M}_i \bigcap \bar{M}_j = \{(x,r);\ (x,r) \in \bar{M}_i \,\&\, \bar{M}_j, \\ m(x) = \min\{m_{\bar{M}_i}(x), m_{\bar{M}_j}(x)\},\ m(x) \in \mathbb{N}\},$$

при этом, если список $\bar{M}_i \bigcap \bar{M}_j$ не связный, то он дополняется до связного нейтральным символом необходимой кратности или переименовывается его нормальная форма по второму параметру элементов. Отметим, что условие $\min\{m_{\bar{M}_i}(x), m_{\bar{M}_j}(x)\}$ является лишним при сравнении пар объектов $\bar{M}_i$ и $\bar{M}_j$, однако необходимо для сравнения порядков нейтрального символа в приведенных списках.

Из введенного правила операции $(\bigcap)$ следует, что, если $\bar{M}_i \prec \bar{M}_j$, то $\bar{M}_i \bigcap \bar{M}_j = \bar{M}_i$ и если в списках нет общих элементов, тогда $\bar{M}_i \bigcap \bar{M}_j = \varnothing \setminus \{\varepsilon\}$.

Операция пересечения по имени $(\bigcap_1)$ объектов.

$$\bar{M}_i \bigcap\nolimits_1 \bar{M}_j = \{(x,r);\ x \in A_i \,\&\, x \in A_j,$$
$$r = \min\{r_i \in N_i, r_j \in N_j\},$$
$$m(x) = \min\{m_{\bar{M}_i}(x), m_{\bar{M}_j}(x)\},\ m(x) \in \mathbb{N},$$
$$(x, r_j) \xrightarrow{f_{s+j}^t} (x, r_{s+j})\}.$$

Операция $(\bigcap_1)$ обобщает предыдущую операцию пересечения.

Другая операция *пересечения с суммированием* $(\cap)$ над списками выполняется в три этапа

$$\bar{M}_i \cap \bar{M}_j =$$
$$= \left(\bar{M}_i \uplus \bar{M}_j\right) \bigcap\nolimits_2 \left\{(x,\varepsilon);\ x \in A_i \bigcap A_j\right\}.$$

Операции первого и второго этапов рассмотрены выше, а правило выполнения операции $(\bigcap_2)$ приведено далее [1].

Пусть $(x_i, r_i) \in \bar{M}_i$, $i = 1, 2$, тогда

$$\bar{M}_1 \bigcap\nolimits_2 \bar{M}_2 = \begin{cases} \varepsilon\varepsilon, & x_1 \neq x_2; \\ (x_1, r_1), & x_1 = x_2. \end{cases}$$

В этой операции, как и в предыдущих операциях пересечения, может использоваться операция естественной разности для исключения элементов, не попавших в пересечение мультимножеств.

Продемонстрируем это на МО объектах $\bar{M}_1 = \{a, (a,2), d, (b,4), c, (c,6)\}$ и $\bar{M}_2 = \{(c,1), a, c, (a,4), (d,5)\}$ при нахождении пересечения с суммированием.

Так как элемент d отсутствует в пересечении мультимножеств M_1 и M_2, т. е. $M_1 \cap M_2 = \{a^2, c^2\} = M$, то исключим его из первого множественного объекта $\bar{M}_1 \setminus \{d\} = \{a, (a,2), (b,3), c, (c,5)\} = \bar{M}_3$ и рассмотрим $\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 = \bar{M}_3 \cap \bar{M}_2 = \bar{M}$.

Операция $(\uplus)$ над приведенными списками $\bar{M}_N^3$ и $\bar{M}_N^2$ определяет приведенный списочный объект $\{\varepsilon, (a,2), (b,3), \varepsilon, (c,5), (c,6), \varepsilon, \varepsilon, (a,9), (d,10)\}$ и пересечение их носителей $A_3 \bigcap A_2 = \{\varepsilon, a, c\}$. Тогда после применения операции $(\bigcap_2)$ получим следующий приведенный список:

$$\bar{M}_N = \{\varepsilon, (a,2), \varepsilon\varepsilon, \varepsilon, (c,5), (c,6), \varepsilon, \varepsilon, (a,9), \varepsilon\varepsilon\}$$

и операция композиции $w(\bar{M}_N, M)$ даст результирующий множественный объект

$$\bar{M} = \{a, (a,2), \varepsilon, a, (c,5), (c,6), c, c, (a,9), \varepsilon\}.$$

Анализ применения операции $(\bigcap)$ к множественным объектам $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ позволяет заключить, что для кратности $m_{\bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_2}(\varepsilon) = \min\{m_{\bar{M}_1}(\varepsilon), m_{\bar{M}_2}(\varepsilon)\}$ справедливо

Утверждение 9. $m_{\bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_2}(\varepsilon) \geq \# M_1 \bigcap M_2$.

Поэтому часть нейтральных символов ε, не превышающих кратности $m_{\bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_2}(\varepsilon)$, используется для получения связности списка $\bar{M}_N^1 \bigcap \bar{M}_N^2$ и оставшаяся располагается в этом списке за элементом с наибольшим местом.

Над множественными объектами $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ может выполняться комбинированная операция $(\bigcap, \bigcap_1)$ – на декомпозициях M_1 и M_2 операция ($\bigcap$) и на приведенных списках $\bar{M}_N^1 \bigcap_1 \bar{M}_N^2$. Для комбинированной операции справедливо утверждение 9 и правило использования нейтрального символа.

Результаты, рассмотренных операций дают возможность привести следующие группы свойств.

Для префиксного класса $\bar{M}^*$ при множествах $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3 \in \bar{M}^*$ имеем:

$$\bar{M}_1 \bigcup \varnothing = \bar{M}_1,\ \bar{M}_1 \bigcap \varnothing = \varnothing,$$

$$\bar{M}_1 \bigcup \bar{M}_2 = \bar{M}_2 \bigcup \bar{M}_1,\ \bar{M}_1 \bigcup \bar{M}_1 = \bar{M}_1,$$

$$\bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_2 = \bar{M}_2 \bigcap \bar{M}_1,\ \bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_1 = \bar{M}_1,$$

$$(\bar{M}_1 \bigcup \bar{M}_2) \bigcup \bar{M}_3 = \bar{M}_1 \bigcup (\bar{M}_2 \bigcup \bar{M}_3),$$

$$(\bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_2) \bigcap \bar{M}_3 = \bar{M}_1 \bigcap (\bar{M}_2 \bigcap \bar{M}_3),$$

$$\bar{M}_1 \bigcup (\bar{M}_2 \bigcap \bar{M}_3) = (\bar{M}_1 \bigcup \bar{M}_2) \bigcap (\bar{M}_1 \bigcup \bar{M}_3),$$

$$\bar{M}_1 \bigcap (\bar{M}_2 \bigcup \bar{M}_3) = (\bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_2) \bigcup (\bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_3);$$

$$(\bar{M}_1 \bigcup \bar{M}_2) \uplus (\bar{M}_1 \bigcap \bar{M}_2) =$$
$$= (\bar{M}_1 \uplus \bar{M}_2) \mid (\bar{M}_2 \uplus \bar{M}_1).$$

В классе E^* для множественных объектов $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3 \in E^*$ справедливо:

$$\bar{M}_1 \uplus (\varnothing \setminus \{\varepsilon\}) = (\varnothing \setminus \{\varepsilon\}) \uplus \bar{M}_1 = \bar{M}_1,$$

$$\bar{M}_1 \uplus \bar{M}_2 \neq \bar{M}_2 \uplus \bar{M}_1,\ \bar{M}_1 \uplus \bar{M}_1 \neq \bar{M}_1,$$

$$(\bar{M}_1 \uplus \bar{M}_2) \uplus \bar{M}_3 = \bar{M}_1 \uplus (\bar{M}_2 \uplus \bar{M}_3) =$$
$$= \bar{M}_1 \uplus \bar{M}_2 \uplus \bar{M}_3,$$

$$\bar{M}_1 \uplus \bar{A} \mid \bar{B} \subseteq \bar{M}_1 \uplus (\bar{A} \bigcup \bar{B}),$$

$$\bar{M}_1 \uplus \bar{A} \mid \bar{B} \subseteq \bar{M}_1 \uplus (\bar{A} \bigcap \bar{B}),$$

$$\bar{A}, \bar{B} \in \bar{M}^* \subset E^*;$$

$$\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 \neq \bar{M}_2 \cup \bar{M}_1,$$

$$(\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2) \cup \bar{M}_3 = \bar{M}_1 \cup (\bar{M}_2 \cup \bar{M}_3) =$$
$$= \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 \cup \bar{M}_3,$$

$$\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \neq \bar{M}_2 \cap \bar{M}_1,$$

$$(\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2) \cap \bar{M}_3 = \bar{M}_1 \cap (\bar{M}_2 \cap \bar{M}_3) =$$
$$= \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3,$$

$$\bar{M}_1 \cup (\bar{M}_2 \cap \bar{M}_3) \neq (\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2) \cap (\bar{M}_1 \cup \bar{M}_3),$$

$$\bar{M}_1 \cap (\bar{M}_2 \cup \bar{M}_3) \neq (\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2) \cup (\bar{M}_1 \cap \bar{M}_3),$$

$$(\bar{M}_1 \uplus \bar{M}_2) \setminus \bar{M}_3 = (\bar{M}_1 \setminus \bar{M}_3) \uplus (\bar{M}_2 \setminus \bar{M}_3),$$

$$(\bar{M}_1 \cap \bar{M}_2) \setminus \bar{M}_3 = (\bar{M}_1 \setminus \bar{M}_3) \cap (\bar{M}_2 \setminus \bar{M}_3),$$

$$(\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2) \setminus \bar{M}_3 = (\bar{M}_1 \setminus \bar{M}_3) \cup (\bar{M}_2 \setminus \bar{M}_3).$$

Последние три свойства имеют место и для разностей $(\setminus_0)$ и $(\setminus_1)$.

Выводы

Для задания множественных объектов предложена универсальная конструктивная схема-генератор, которая может порождать множества, мультимножества, списки или гибридные объекты на основе этих множеств. Кроме того, с помощью введенной схемы определяется структура множественного объекта, выделяются префиксные классы объектов и др.

Исследованы алгебраические свойства класса множественных объектов и префиксных подклассов. Установлено, что по любому подклассу класса множественных объектов восстанавливается определяющее множество соответствующей схемы-генератора.

Рассмотрены важные для приложений операции декомпозиции и композиции множественных объектов. Дано расширение теоретико-множественных операций с мультимножеств на гибридные множественные объекты их классы и подклассы. Установлены свойства расширенных операций.

Предложенная модель конструирования множественных объектов может быть использована при проектировании абстрактных структур данных в программировании, разнообразных технологических процессов и др.

1. *Босов А.А.* Функции множества и их применение. – Днепродзержинск: Изд. дом „Андрей", 2007. – 182 с.
2. *Левин Д.Я.* Язык сверхвысокого уровня СЕТЛ и его реализация. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1983. – 160 с.
3. *Прохоров Г.В., Лебедев М.А., Колбеев В.В.* Пакет символьных вычислений Maple V. – М.: „Петит", 1997. – 200 с.

4. *Гарсиа-Молина Г., Ульман Дж., Уидом Дж.*. Системы баз данных. – М.: Вильямс, 2004. – 1088 с.
5. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16 – 31.
6. *Blizard W.* The Development of Multiset Theory // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1989. – Vol. 30, N 1. – P. 36 – 66.
7. *Богатырёва Ю.А.* Мультимножества: библиография, решетка мультимножеств // Тези доповідей VI Міжнародної конференції „Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем”. – TAAPSD’2009. – К., 2009. – С. 13 – 20.
8. *Knuth D.* Context-Free Multilanguages // Theoretical Studies in Computer Science. – Academic Press, 1992. – P. 1 – 13.
9. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. – М.: Мир, Т 2. – 1977. – 727 с.
10. *Ільман В.М., Скалозуб В.В., Шинкаренко В.І.* Формальні структури та їх застосування.– Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп., 2009. – 205 с.
11. *Андон Ф.И., Дорошенко А.Е., Цейтлин Г.Е., Яценко Е.А.* Алгебро-алгоритмические модели и методы параллельного программирования. – Киев: Академпериодика, 2007. – 634 с.
12. *Ільман В.М., Скалозуб В.В.* Інтервальні об’єкти та їх граматичні структури // Вісник Дніпропетровського національного університету – 2010. – Вип. 29. – С. 131–144.
13. *Albert J.* Algebraic properties of bag data types // Severenteenth International Conference on Very Large Data Bases. – Barcelona, Spain, 1991. – P. 211–219.
14. *Singh D., Ibrahim A.M., Yohanna T., Singh J.* An Overview of the Applications of Multiset // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2007. – Vol. 37, N 2. – P. 73–92.
15. *Syropoulos* A. Mathematic of Multisets // Multiset Processing: Mathematical, Computer Science and Molecular Computing Points of View, Number 2235 in Lecture Notes in Comuting Since. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – P. 347 – 358.

Получено 13.06.2013

Об авторах:

Ильман Валерий Михайлович,
кандидат физико-математических наук, доцент,

Шинкаренко Виктор Иванович,
доктор технических наук, профессор.

Место работы авторов:

Днепропетровский
национальный университет
железнодорожного транспорта,
кафедра «Компьютерные информационные технологии»,
49010, г. Днепропетровск,
ул. академика Лазаряна, 2.
Каф. КИТ, ДНУЗТ.
Тел.: (056) 373 1535.
E-mail: shink@diit.edu.ua,
ccp@diit-70.dp.ua