УДК 004.42:510.69

М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк

ЛОГІКИ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ КВАНТОРНО-ЕКВАЦІЙНОГО РІВНЯ

Досліджено першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня. Наведено основні семантичні властивості таких логік, зокрема, властивості відношень логічного наслідку для множин формул, *X–Y*-означених відношень логічного наслідку. На цій основі для логік однозначних квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня побудовано числення секвенційного типу.

Вступ

Розвиток інформаційних технологій та програмування зумовлює розширення сфери застосування математичної логіки. На даний момент розроблено багато різноманітних логічних систем (див., напр., [1]), які доводять свою ефективність при розв'язанні широкого кола задач інформатики й програмування. В основі таких систем, як правило, лежить класична логіка предикатів [2]. Ця логіка добре досліджена, вона має багатий досвід застосування, на її основі будуються спеціальні логіки, орієнтовані на вирішення тих чи інших конкретних задач. Водночас поява нових застосувань логіки в інформатиці та програмуванні висвітила принципові обмеження класичної логіки предикатів, які ускладнюють її використання. Така логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, вона недостатньо враховує неповноту, частковість інформації про предметну область, її структурованість. Обмеження класичної логіки виводять на перший план проблему побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів на спільній для логіки і програмування основі. За таку основу природно взяти композиційно-номінативний підхід [3] до побудови моделей програм і орієнтованих на них логік. На базі цього підходу розроблено [4] низку різноманітних логічних систем, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності. Логіки, збудовані на основі композиційно-номінативного підходу, названо композиційно-номінативними.

Передумовою виникнення композиційно-номінативних логік (КНЛ) стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язання нових задач інформатики й програмування. КНЛ базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Такі відображення названо квазіарними.

Метою даної роботи є дослідження першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів кванторно-еквацийного рівня. В роботі описано мови і семантичні моделі таких логік, розглянуто різні формалізації відношення логічного наслідку. Досліджено властивості цих відношень в різних семантиках. На цій основі для КНЛ однозначних квазіарних предикатів кванторно-еквацийного рівня побудовано числення секвенційного типу.

Логіка тотальних однозначних предикатів – це класична логіка. Логіки однозначних часткових предикатів названі логіками з неокласичною семантикою, логіки тотальних неоднозначних предикатів – логіками з пересиченою семантикою, логіки часткових неоднозначних предикатів природно назвати логіками із загальною семантикою. Такі нестандартні семантики для пропозиційної логіки та різноманітні відношення логічного наслідку вивчались О.Д. Смирновою [5]. В роботі [6] подібні семантики та формалізації відношення логічного наслідку узагальнені на випадок КНЛ реномінативного та кванторного рівнів, подальші дослідження таких логік проведені, зокрема, в [7–10].

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [4, 6–8].

1. Композиції та композиційні системи квазіарних предикатів

Згідно композиційно-номінативного підходу (КНП), композиційно-номінативні логіки будуємо за семантико-синтаксичною схемою. Це означає, що спочатку задаємо інтенсіональні (змістовні) моделі логік. Такі моделі найперше визначаються рівнями розгляду даних, тому для їх задання фіксуємо рівень абстракції розгляду. Інтенсіональні моделі індукують мову логіки. Далі будуємо відповідні розглянутому рівню екстенсіональні моделі, які задають семантичні аспекти логік. Такими моделями є предикатні композиційні системи – трійки вигляду $(D, Pr, \boldsymbol{C})$, де D – множина (клас) даних, Pr – множина (клас) предикатів, заданих на D, $\boldsymbol{C}$ – множина (клас) композицій (операцій) породження нових предикатів, вона задається множиною базових композицій відповідного рівня. Предикатна композиційна система задає дві алгебри: алгебру (алгебраїчну систему) даних (D, Pr) та алгебру предикатів $(Pr, \boldsymbol{C})$, терми якої трактуються як формули мови логіки. Нарешті, будуємо формально-аксіоматичні логічні числення, які задають синтаксичні аспекти логік. Основними їх різновидностями є формальні системи гільбертівського типу та системи ґенценівського типу (секвенційні числення).

Основним семантичним поняттям логіки є поняття предиката.

В загальному випадку під предикатом на множині D будемо розуміти довільну (часткову неоднозначну, взагалі кажучи), функцію вигляду $P : D \to \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Областю істинності та областю хибності предиката P на D назвемо множини:

$$\boldsymbol{T}(P) = P^{-1}(T) = \{d \in D \mid T \in P(d)\};$$

$$\boldsymbol{F}(P) = P^{-1}(F) = \{d \in D \mid F \in P(d)\}.$$

Тут $P(d)$ розуміємо як повний образ d при функції (відображенні) P.

Якщо предикат P однозначний, то $\boldsymbol{T}(P) \cap \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Якщо предикат P тотальний, то $\boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{F}(P) = D$.

Для однозначних предикатів області істинності та хибності можна визначити так:

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in D \mid P(d)\downarrow = T\};$$

$$\boldsymbol{F}(P) = \{d \in D \mid P(d)\downarrow = F\}.$$

Тут і надалі для однозначних функцій пишемо $f(d)\downarrow$, якщо $f(d)$ визначене, та $f(d)\uparrow$, якщо $f(d)$ невизначене.

Логіка тотальних однозначних предикатів – це класична логіка. Логіки однозначних часткових предикатів – це логіки з неокласичною семантикою, логіки тотальних неоднозначних предикатів – логіки з пересиченою семантикою. Логіки часткових неоднозначних предикатів природно назвати логіками із загальною семантикою. Такі нестандартні семантики для пропозиційної логіки та різноманітні відношення логічного наслідку запропоновані О.Д. Смирновою [5]. У роботі [6] подібні семантики та формалізації відношення логічного наслідку узагальнені на випадок КНЛ реномінативного та кванторного рівнів.

Предикат P на D назвемо:

– тотально істинним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$;

– тотально хибним, якщо $\boldsymbol{F}(P) = D$;

– тотожно істинним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$ та $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

– тотожно хибним, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \varnothing$ та $\boldsymbol{F}(P) = D$;

– тотально насиченим, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{F}(P) = D$;

– неспростовним, або частково істинним, якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$;

– виконуваним, якщо $\boldsymbol{T}(P) \neq \varnothing$.

Побудову КНЛ починаємо з гранично-абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи. Такі рівні відрізняються трактуванням рівня розгляду даних. Можна виділити [4] відносно бідні пропозиційний і сингулярний рівні та дуже багатий номінативний рівень.

На *пропозиційному* рівні предикати мають вигляд $P : D \to \{T, F\}$, де D – сукупність абстрактних даних.

На *номінативному* рівні складні дані будуються із простіших на основі відношень іменування (номінативних відношень), такі дані названі номінатами. Цей рівень розпадається на низку підрівнів, основним з яких є підрівень однозначних номінатів (іменних множин), на ньому далі виділяємо реномінативний та першопорядкові рівні. Визначальною особливістю першопорядкових рівнів є наявність композицій квантифікації. Базовим першопорядковим рівнем є кванторний, який також називатимемо, за аналогією з класичною логікою, рівнем чистих першопорядкових КНЛ. Наступними першопорядковими рівнями є кванторно-екваційний, функціональний та функціонально-екваційний. Основну увагу в роботі приділимо логікам кванторно-екваційного рівня, такі логіки можна назвати чистими першопорядковими КНЛ з рівністю (скор. ЧКНЛР).

Іменні множини (ІМ) – це множини пар, перша компонента яких – ім'я, а друга – його значення. Функції та предикати, задані на ІМ, називають квазіарними. Формальне визначення ІМ таке.

V-іменна множина (V-ІМ) над A – це однозначна функція вигляду $\delta : V \to A$.

Тут V та A – множини предметних імен та предметних значень.

V-ІМ будемо подавати у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Клас всіх V-ІМ над A позначимо ${}^V\!A$.

Вводимо функцію $asn : {}^V\!A \to 2^V$ так: $asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$.

Визначимо $\delta \,\|\, X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$.

Замість $\delta \,\|\, (V \setminus X)$ та $\delta \,\|\, (V \setminus \{x\})$ будемо писати $\delta \,\|{-X}$ та $\delta \,\|{-x}$.

Операцію накладки для ІМ вводимо так: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \,\|\, (V \setminus asn(\delta_2)))$.

Операцію реномінації

$r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n} : {}^V\!A \to {}^V\!A$ задамо так: $r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(\delta) =$

$= [v_1 \mapsto \delta(x_1),...,v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \,\|\, (V \setminus \{v_1,...,v_n\}))$.

Замість $y_1,\ldots,y_n$ також скорочено писатимемо $\bar{y}$.

Предикат вигляду $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$ називають V-квазіарним предикатом на A.

Клас V-квазіарних предикатів на A позначаємо Pr^A.

Ім'я $x \in V$ строго неістотне для V-квазіарного предиката $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$, якщо $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \,\|{-x})$ для довільних $d \in {}^V\!A$ та $a \in A$.

Фундаментальною властивістю відображень, які використовуються в програмуванні, є монотонність щодо розширення даних новими компонентами.

Предикат $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$ монотонний, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \subseteq P(d')$.

Для однозначних часткових функцій, зокрема, предикатів, вводиться поняття еквітонності. Еквітонність предиката означає, що прийняте ним значення зберігається при розширенні даних.

Предикат $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$ еквітонний, якщо з умови $P(d)\downarrow$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Для однозначних часткових предикатів поняття монотонності та еквітонності рівносильні.

Еквітонність можна трактувати як збереження "інформативності" предиката при збільшенні "інформативності" вхідних даних. Проте для тотальних монотонних предикатів при розширенні вхідних даних "інформативність" може тільки зменшуватися, тому прийнятною для тотальних предикатів є дуальна до монотонності властивість антитонності. Водночас для однозначних предикатів поняття антитонності малозмістовне.

Універсальні методи побудови предикатів визначають *композиції*, вони виступають ядром логіки певного типу. Згідно КНП, композиції уточнюємо як функції (операції) над іменованими предикатами.

Композиції пропозиційного рівня називають логічними зв'язками, найпоширенішими з них є заперечення $\neg$, диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція $\&$, імплікація $\to$, еквіваленція $\leftrightarrow$.

Предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q)$ $\to(P, Q)$, $\&(P, Q)$, $\leftrightarrow(P, Q)$ далі будемо позначати $\neg P$, $P \vee Q$, $P \to Q$, $P \& Q$, $P \leftrightarrow Q$.

Зазначені предикати задаємо так.

$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P)$;

$\boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P)$.

$\boldsymbol{T}(P\vee Q) = \boldsymbol{T}(P)\cup\boldsymbol{T}(Q)$;

$\boldsymbol{F}(P\vee Q) = \boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\,\&\,Q) = \boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q)$;

$\boldsymbol{F}(P\,\&\,Q) = \boldsymbol{F}(P)\cup\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\rightarrow Q) = \boldsymbol{F}(P)\cup\boldsymbol{T}(Q)$;

$\boldsymbol{F}(P\rightarrow Q) = \boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\leftrightarrow Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))$;

$\boldsymbol{F}(P\leftrightarrow Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))$.

Базовими композиціями пропозиційного рівня будемо вважати $\neg$ та $\vee$. Композиції $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$ є похідними.

Базовими композиціями реномінативного рівня є $\neg$, $\vee$ та композиція реномінації $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^A \rightarrow Pr^A$.

Базовими композиціями кванторного рівня є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та композиція квантифікації $\exists\boldsymbol{x} : Pr^A \rightarrow Pr^A$.

Базовими композиціями кванторно-екваційного рівня є $\neg$, $\vee$, реномінації $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, квантори $\exists\boldsymbol{x}$ та спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за іменами предикати рівності $=_{\boldsymbol{xy}}$.

Для визначення цих композицій задамо предикати $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, $\exists\boldsymbol{x}P$, $=_{\boldsymbol{xy}}$ областями їх істинності й хибності:

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{T}(P))$;

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{F}(P))$;

$\boldsymbol{T}(\exists\boldsymbol{x}P) = \{d\in {}^V\!A \mid T\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для деякого $a\in A\}$;

$\boldsymbol{F}(\exists\boldsymbol{x}P) = \{d\in {}^V\!A \mid F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A\}$;

$\boldsymbol{T}(=_{\boldsymbol{xy}}) = \{d\in {}^V\!A \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\}$;

$\boldsymbol{F}(=_{\boldsymbol{xy}}) = \{d\in {}^V\!A \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)\}$.

Похідна композиція $\forall\boldsymbol{x} : Pr^A \rightarrow Pr^A$ виражається через $\neg$ та $\exists\boldsymbol{x}$. Предикат $\forall\boldsymbol{x}P$ можна задати так:

$\boldsymbol{T}(\forall\boldsymbol{x}P) = \{d\in {}^V\!A \mid T\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A\}$;

$\boldsymbol{F}(\forall\boldsymbol{x}P) = \{d\in {}^V\!A \mid F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для деякого $a\in A\}$.

Теорема 1. Композиції $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$, $=_{\boldsymbol{xy}}$ зберігають властивості монотонності та антитонності.

Семантичними моделями ЧКНЛР є композиційні системи квазіарних предикатів кванторно-еквацiйного рівня $({}^V\!A, Pr^A, \boldsymbol{C})$, де $\boldsymbol{C}$ визначається базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$, $=_{\boldsymbol{xy}}$. Терми відповідної композиційної алгебри $(Pr^A, \boldsymbol{C})$ трактуємо як формули мови ЧКНЛР.

2. Семантичні властивості композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів

Опишемо мову ЧКНЛР.

Алфавіт мови: символи базових композицій, множина Ps предикатних символів (ПС), множина V предметних імен. Множину Ps назвемо сигнатурою мови.

Дамо визначення множини Fr формул мови ЧКНЛР.

1. Кожний $p\in Ps$ та символ $=_{xy}$ є формулою, такі формули атомарні.

2. Якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

Надалі вживаємо символи похідних композицій $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall x$. "Формули", записані з їх використанням, вважаємо скороченнями "справжніх" формул. Замість $=_{xy}$ також писатимемо в традиційному вигляді $x = y$:

Позначаємо $nm(\Phi)$ множину всіх предметних імен із V, які фігурують у формулі Φ.

Відображення інтерпретації формул $\boldsymbol{J} : Fr\rightarrow Pr^A$ визначається за допомогою тотального однозначного відображення $\boldsymbol{I} : Ps \rightarrow Pr^A$, яке позначає символами Ps базові предикати.

1. $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p\in Ps$;
$\boldsymbol{J}(=_{xy}) = \boldsymbol{I}(=_{xy}) = =_{\boldsymbol{xy}}$ для всіх $x, y\in V$.

2. $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \neg(\boldsymbol{J}(\Phi))$,
$\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = \vee(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$,
$\boldsymbol{J}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\exists x\Phi) = \exists\boldsymbol{x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Відображення $\boldsymbol{I} : Ps \rightarrow Pr$ прив'язує алгебраїчну систему (АС) даних (A, Pr) до мови ЧКНЛР. Отримуємо АС з доданою сигнатурою [4] вигляду $((A, Pr^A), \boldsymbol{I})$, яку позначаємо $(A, \boldsymbol{I})$. Така АС фактично визначає композиційну систему $({}^VA, Pr^A, \boldsymbol{C})$, тому АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову із неокласичними АС даних.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$, який є значенням формули Φ при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначаємо Φ_A.

Ім'я $x \in V$ строго неістотне для формули Φ, якщо для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ ім'я x строго неістотне для Φ_A.

Формула примітивна, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} p$, причому відсутні тотожні перейменування та $\bar{v}$ не містить строго неістотних для p імен.

Φ (частково) істинна при інтерпретації на $\boldsymbol{A}$, або $\boldsymbol{A}$-неспростовна (позн. $\boldsymbol{A} \models \Phi$), якщо Φ_A неспростовний.

Φ всюди істинна, або неспростовна (позн. $\models \Phi$), якщо Φ $\boldsymbol{A}$-неспростовна для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Φ виконувана при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, або $\boldsymbol{A}$-виконувана, якщо Φ_A виконуваний.

Φ виконувана, якщо Φ $\boldsymbol{A}$-виконувана для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Φ тотально істинна при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ (позн. $\boldsymbol{A} \mid\equiv \Phi$), якщо Φ_A – тотально істинний предикат.

Φ тотально істинна (позн. $\mid\equiv \Phi$), якщо $\boldsymbol{A} \mid\equiv \Phi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Дослідження композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів реномінативного та кванторного рівнів проведені, зокрема, в [6–9]. Відповідні властивості таких логік переносяться на кванторно-екваційний рівень.

Наведемо основні з них.

Теорема 2. 1) у випадку неокласичної семантики множина тотально істинних формул порожня;

2) у випадку пересиченої семантики множина неспростовних формул порожня;

3) у випадку загальної семантики множини тотально істинних та неспростовних формул порожні.

Справді, у випадку неокласичної семантики кожний ПС можна проінтерпретувати як всюди невизначений предикат, на такій моделі мови кожна формула теж проінтерпретується як всюди невизначений предикат. У випадку пересиченої семантики кожний ПС можна проінтерпретувати як тотально насичений предикат, на такій моделі мови кожна формула теж проінтерпретується як тотально насичений предикат. У випадку загальної семантики на одній моделі мови кожний ПС можна проінтерпретувати як всюди невизначений предикат, а на другій моделі мови – як тотально насичений предикат.

Важливе поняття дуальних моделей мови вводимо так (тут $\overline{S}$ позначає доповнення до S у ${}^VA$).

АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$, якщо $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$ для кожного $\Phi \in Ps$.

Тоді АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ дуальна до $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$.

Якщо $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ – АС з частковими однозначними предикатами, то дуальна $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ – АС з тотальними неоднозначними предикатами, та навпаки.

Теорема 3. Нехай $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді для кожної $\Phi \in Fr$:

1) $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$;

2) Φ_A монотонний $\Rightarrow$ Φ_B антитонний; Φ_A антитонний $\Rightarrow$ Φ_B монотонний.

Звідси маємо: Φ_A неспростовний на АС $\boldsymbol{A}$ із частковими однозначними предикатами $\Leftrightarrow$ Φ_B тотально істинний на дуальній АС $\boldsymbol{B}$ із тотальними неоднозначними предикатами.

Таким чином, неокласична семантика та пересичена семантика дуальні.

Відношення логічного наслідку. На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів на множині формул можна ввести [6] 5 "природних" відношень логічного наслідку.

Спочатку задамо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови $\boldsymbol{A}$.

1) "Істиннісний" наслідок $_A|\!=_T$: $\Phi\ _A|\!=_T \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$.

2) "Хибнісний" наслідок $_A|\!=_F$: $\Phi\ _A|\!=_F \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

3) "Сильний" наслідок $_A|\!=_{TF}$: $\Phi\ _A|\!=_{TF} \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

4) "Неспростовнісний" наслідок $_A|\!=_{Cl}$: $\Phi\ _A|\!=_{Cl} \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$.

5) "Насичений" наслідок $_A|\!=_{Cm}$: $\Phi\ _A|\!=_{Cm} \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{F}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}(\Psi_A) = {}^V\!A$.

Відповідні відношення логічного наслідку $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi \,|\!=_* \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _A|\!=_* \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Тут і надалі, якщо інше не вказане, $*$ – це одне з Cl, Cm, T, F, TF.

Ψ є слабким логічним наслідком Φ (позн. $\Phi \,||\!= \Psi$), якщо $\boldsymbol{A} \,|\!= \Phi \Rightarrow \boldsymbol{A} \,|\!= \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Ψ є слабким тотальним наслідком Φ (позн. $\Phi \,||\!\equiv \Psi$), якщо $\boldsymbol{A} \,|\!\equiv \Phi \Rightarrow \boldsymbol{A} \,|\!\equiv \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Введені відношення $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$, $||\!=$, $||\!\equiv$ рефлексивні й транзитивні.

Теорема 4. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді:

1) $\Phi\ _A|\!=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _B|\!=_F \Psi$ та $\Phi\ _A|\!=_F \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _B|\!=_T \Psi$;

2) $\Phi\ _A|\!=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _B|\!=_{Cm} \Psi$ та $\Phi\ _A|\!=_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _B|\!=_{Cl} \Psi$.

В загальній семантиці кожна АС $\boldsymbol{B}$ є дуальною до деякої АС $\boldsymbol{A}$, тому в загальній семантиці маємо:

$$\Phi \,|\!=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi \,|\!=_F \Psi \Leftrightarrow |\!=_{TF} \Psi.$$

У випадку неокласичної семантики немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $|\!=_{Cm}$.

У випадку пересиченої семантики немає жодної пари, які перебувають у відношенні $|\!=_{Cl}$.

У випадку загальної семантики немає жодної пари формул, які перебувають у відношенні $|\!=_{Cl}$ чи $|\!=_{Cm}$.

Отже, для загальної семантики маємо єдине природне змістовне відношення логічного наслідку $|\!=_{TF}$.

Для неокласичної семантики можна розглядати $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$; для пересиченої – $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cm}$.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності. Такі відношення рефлексивні, транзитивні й симетричні. Відношення еквівалентності в АС $\boldsymbol{A}$ $_A\!\sim_T$, $_A\!\sim_F$, $_A\!\sim_{TF}$, $_A\!\sim_{Cl}$, $_A\!\sim_{Cm}$ та відношення логічної еквівалентності $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi\ _A\!\sim_* \Psi$, якщо $\Phi\ _A|\!=_* \Psi$ та $\Psi\ _A|\!=_* \Phi$;
$\Phi \sim_* \Psi$, якщо $\Phi \,|\!=_* \Psi$ та $\Psi \,|\!=_* \Phi$.

Зауважимо, що $\Phi \sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ маємо $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A) = \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, тобто $\Phi_A = \Psi_A$.

Теорема 5. Для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ маємо:

1) $\Phi\ _A|\!=_T \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ _A|\!=_F \neg\Phi$ та $\Phi\ _A|\!=_F \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ _A|\!=_T \neg\Phi$;

2) $\Phi\ _A\!\sim_T \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ _A\!\sim_F \neg\Phi$ та $\Phi\ _A\!\sim_F \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ _A\!\sim_T \neg\Phi$.

Поведінка введених відношень логічного наслідку та логічної еквівалентності вельми специфічна (див., наприклад, [6]). Зокрема, невірними будуть такі співвідношення:

$\Phi\ _A|\!=_T \Psi \Rightarrow \neg\Psi\ _A|\!=_T \neg\Phi$,
$\neg\Psi\ _A|\!=_T \neg\Phi \Rightarrow \Phi\ _A|\!=_T \Psi$,
$\Phi\ _A|\!=_F \Psi \Rightarrow \neg\Psi\ _A|\!=_F \neg\Phi$,
$\neg\Psi\ _A|\!=_F \neg\Phi \Rightarrow \Phi\ _A|\!=_F \Psi$;
$\Phi\ _A\!\sim_T \Psi \Rightarrow \neg\Psi\ _A\!\sim_T \neg\Phi$,
$\neg\Psi\ _A\!\sim_T \neg\Phi \Rightarrow \Phi\ _A\!\sim_T \Psi$,
$\Phi\ _A\!\sim_F \Psi \Rightarrow \neg\Psi\ _A\!\sim_F \neg\Phi$,
$\neg\Psi\ _A\!\sim_F \neg\Phi \Rightarrow \Phi\ _A\!\sim_F \Psi$.

Таким чином, для $|\!=_T$ та $|\!=_F$ закон контрапозиції невірний, для $\sim_T$ та $\sim_F$ вже не можна знімати заперечення в обох частинах еквівалентності.

Для відношень $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$, $\sim_{TF}$ справджується теорема семантичної еквівалентності ($*$ – одне з Cl, Cm, TF).

Теорема 6. Нехай Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim_* \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Для відношень $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема 11 невірна. Справді, можлива ситуація, коли вірно $\Xi \sim_T \Phi$ та невірно $\neg\Xi \sim_T \neg\Phi$, адже $\neg\Xi \sim_T \neg\Phi \Leftrightarrow \Xi \sim_F \Phi$; можливо також, що вірно $\Xi \sim_F \Phi$ та невірно $\neg\Xi \sim_F \neg\Phi$.

Для кожного $p\in Ps$ множину строго неістотних предметних імен задаємо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps \to 2^V$. Така функція [7] продовжується $\nu : Fr \to 2^V$. При цьому $\nu(=_{xy}) = V\setminus\{x,y\}$. Для семантичних моделей ЧКНЛР постулюємо наявність нескінченної множини $\bigcap\limits_{p\in Ps} \nu(p)$ тотально строго неістотних імен.

Властивості формул ЧКНЛР. Розглянемо властивості, пов'язані з композиціями. Вони відбивають відповідні властивості цих композицій. Основні властивості пропозиційних композицій аналогічні відповідним властивостям логічних зв'язок класичної логіки. Це комутативність і асоціативність $\vee$ та **&**, ідемпотентність $\vee$ та **&**, закони контрапозиції, зняття подвійного заперечення, де Моргана. Їх можна описати, використовуючи $\sim_{TF}$.

До основних властивостей формул, пов'язаних з композицією реномінації, належать відомі [4, 6] RT. R¬, R∨, RR, NR, а також ФN. Ці властивості можна описати, використовуючи $\sim_{TF}$. Наприклад.

ФN) нехай $y\in V$ строго неістотне для Ф. Тоді $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

Властивості формул, пов'язані з композиціями квантифікації в основному аналогічні [4, 6] відповідним властивостям класичної логіки. Водночас далеко не всі закони класичної логіки справджуються для логік квазіарних предикатів. Зокрема, навіть для однозначних предикатів не завжди справджуються закони класичної логіки $|=\forall x\theta\to\theta$, $|=\theta\to\exists x\theta$, $\forall x\theta \,||\!=\theta$, а також більш загальні твердження $|=\forall x\theta \to R^x_z(\theta)$, $|= R^x_z(\theta) \to \exists x\theta$, $\forall x\theta \,||\!= R^x_z(\theta)$.

В класичній логіці кожна формула вигляду $\neg\exists x\Phi \,\&\, \Phi$ невиконувана. Для логіки квазіарних предикатів це вже не так: існують [10] виконувані формули вигляду $\neg\exists x\Phi \,\&\, \Phi$.

До основних властивостей формул, пов'язаних з композиціями квантифікації та реномінації, належать [4, 6] NR, RSN, R∃, R∃S, а також R∃R – згортка пари імен реномінації за квантифікованим іменем:

R∃R) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$); зокрема, маємо $R^x_y(\exists x\Phi) \sim_{TF} \exists x\Phi$.

Основними властивостями рівності є рефлексивність, симетричність, транзитивність, заміна рівних:

Rf) $|= x=x$ та $|\!\equiv x=x$;

Sm) $x=y \sim_{TF} y=x$;

Tr) $|= x_1=y_1 \to y=z \to x=z$ та $|\!\equiv x=y \to y=z \to x=z$;

EФ) $|= x_1=y_1 \to \ldots \to x_n=y_n \to \to R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}(\Phi) \to R^{v_1,\ldots,v_n}_{y_1,\ldots,y_n}(\Phi)$ та

$|\!\equiv x_1=y_1 \to \ldots \to x_n=y_n \to \to R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}(\Phi) \to R^{v_1,\ldots,v_n}_{y_1,\ldots,y_n}(\Phi)$.

3. Спеціальні відношення логічного наслідку

Введені відношення логічного наслідку можна поширити на довільні множини формул.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Спочатку задамо відношення наслідку для множин формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови АС ***A***. Для довільних $\Gamma\subseteq Fr$ та $\Delta\subseteq Fr$ визначаємо:

$\Gamma\,{}_{A}|\!=_{Cl}\Delta$, якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$;

$\Gamma\,{}_{A}|\!=_{Cm}\Delta$, якщо $\bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup\limits_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A) = {}^V\!A$;

$\Gamma\,{}_{A}|\!=_{T}\Delta$, якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$;

$\Gamma\,{}_{A}|\!=_{F}\Delta$, якщо $\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$;

$\Gamma\,{}_{A}|\!=_{TF}\Delta$, якщо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$ та $\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$.

Відношення логічного наслідку для множин формул $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$ визначаємо за такою схемою:

$\Gamma \models_* \Delta$, якщо $\Gamma\,{}_A\!\models_* \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Відношення $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$, $\models_{\boldsymbol{TF}}$, $\models_{\boldsymbol{Cl}}$, $\models_{\boldsymbol{Cm}}$ рефлексивні, але не транзитивні.

Теорема 7. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді:

1) $\Gamma\,{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{\boldsymbol{T}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{\boldsymbol{B}}\!\models_{\boldsymbol{F}} \Delta$ та $\Gamma\,{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{\boldsymbol{F}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{\boldsymbol{B}}\!\models_{\boldsymbol{T}} \Delta$;

2) $\Gamma\,{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{Cl} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{\boldsymbol{B}}\!\models_{\boldsymbol{Cm}} \Delta$ та $\Gamma\,{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{\boldsymbol{Cm}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{\boldsymbol{B}}\!\models_{Cl} \Delta$.

Звідси випливає, що у випадку загальної семантики

$$\Gamma\,{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{\boldsymbol{T}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{\boldsymbol{F}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\,{}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{\boldsymbol{TF}} \Delta.$$

Таким чином, для загальної семантики природно розглядати лише відношення $\models_{\boldsymbol{TF}}$.

Для неокласичної семантики можна розглядати $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$, $\models_{\boldsymbol{TF}}$, $\models_{\boldsymbol{Cl}}$; для пересиченої – $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$, $\models_{\boldsymbol{TF}}$, $\models_{\boldsymbol{Cm}}$.

Теорема 8 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$. Тоді: $\Phi, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_* \Delta$ та $\Gamma \models_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \Psi$.

Замість $\sim_{TF}$ тут можна брати $\sim_{Cl}$ чи $\sim_{Cm}$. Тоді $\models_*$ буде відповідно відношенням $\models_{\boldsymbol{Cl}}$ чи $\models_{\boldsymbol{Cm}}$. Отримуємо ще дві різновидності теореми заміни еквівалентних – для логіки часткових однозначних предикатів (із $\models_{\boldsymbol{Cl}}$) та для логіки тотальних неоднозначних предикатів (із $\models_{\boldsymbol{Cm}}$).

Розглянемо властивості відношень логічного наслідку для множин формул.

До властивостей пропозиційного рівня належать U, C, $\neg\neg_{\vdash}$, $\neg\neg_{\dashv}$, $\vee_{\vdash}$, $\vee_{\dashv}$, $\neg\vee_{\vdash}$, $\neg\vee_{\dashv}$. Вони справджуються для кожного з відношень логічного наслідку даної семантики. Ці властивості наведено в [9].

Для $\models_{\boldsymbol{Cl}}$ та $\models_{\boldsymbol{Cm}}$ також справджуються відомі $\neg_{\vdash}$ та $\neg_{\dashv}$, але вони невірні для $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$ та $\models_{\boldsymbol{TF}}$.

Властивості реномінації RT, R¬, R∨, RR, ΦN, R∃, R∃S, R∃R індукують низку відповідних властивостей відношень логічного наслідку для множин формул, вони отримуються на основі теореми заміни еквівалентних. Ці властивості справджуються для $\models_{\boldsymbol{TF}}$, у відповідних семантиках вони вірні й для $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$, $\models_{\boldsymbol{Cl}}$, $\models_{\boldsymbol{Cm}}$.

Властивості $\mathrm{RT}_{\vdash}$, $\mathrm{RT}_{\dashv}$, $\neg\mathrm{RT}_{\vdash}$, $\neg\mathrm{RT}_{\dashv}$, $\mathrm{RR}_{\vdash}$, $\mathrm{RR}_{\dashv}$, $\neg\mathrm{RR}_{\vdash}$, $\neg\mathrm{RR}_{\dashv}$, $\mathrm{R}\neg_{\vdash}$, $\mathrm{R}\neg_{\dashv}$, $\neg\mathrm{R}\neg_{\vdash}$, $\neg\mathrm{R}\neg_{\dashv}$, $\mathrm{R}\vee_{\vdash}$, $\mathrm{R}\vee_{\dashv}$, $\neg\mathrm{R}\vee_{\vdash}$, $\neg\mathrm{R}\vee_{\dashv}$, $\Phi\mathrm{N}_{\vdash}$, $\Phi\mathrm{N}_{\dashv}$, $\neg\Phi\mathrm{N}_{\vdash}$, $\neg\Phi\mathrm{N}_{\dashv}$, $\mathrm{R}\exists_{\vdash}$, $\mathrm{R}\exists_{\dashv}$, $\neg\mathrm{R}\exists_{\vdash}$, $\neg\mathrm{R}\exists_{\dashv}$, $\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{\vdash}$, $\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{\dashv}$, $\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{\vdash}$, $\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{\dashv}$ наведено в [9]. Укажемо тут властивості, індуковані R∃R.

$\mathrm{R}\exists\mathrm{R}_{\vdash}$) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta$. Зокрема,

$R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta$.

$\mathrm{R}\exists\mathrm{R}_{\dashv}$) $\Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$. Зокрема,

$\Gamma \models_* \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \exists x\Phi$.

$\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{R}_{\vdash}$) $\neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta$. Зокрема,

$\neg R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \Gamma \models_* \Delta$.

$\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{R}_{\dashv}$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$. Зокрема,

$\Gamma \models_* \Delta, \neg R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg\exists x\Phi$.

Для $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$, $\models_{\boldsymbol{TF}}$ не можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки, тому ми формулюємо додаткові властивості для випадку зовнішнього заперечення на реномінацію.

***X–Y*-означені відношення логічного наслідку.** В логіках квазіарних предикатів значення предиката P на даному d може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Тому при інтерпретаціях формул на моделях мови необхідно явно вказувати множини означених та неозначених імен. Поняття X–Y-означеної іменної множини та X–Y-означеного логічного наслідку введені в [7].

Для диз'юнктних $X, Y \subseteq V$ (диз'юнктність означає $X \cap Y = \varnothing$) множину X–Y-означених V-ІМ задамо так:

$${}^{V,X\text{–}Y}A = \{d \in {}^{V}A \mid X \subseteq im(d) \text{ та } Y \cap im(d) = \varnothing\}.$$

В X–Y-означених ІМ імена із X мають значення, імена із Y не мають значення.

Для довільних диз'юнктних множин $Z, W, U \subseteq V$ маємо:

$$^{V,\,W-U}A = \bigcup_{Y\subseteq Z} {}^{V,\,W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}A\,.$$

Для диз'юнктних $X, Y \subseteq V$ задамо X–Y-означені області істинності й хибності квазіарного предиката P:

$\boldsymbol{T}_{X-Y}(P) = \{d\in {}^{V}A \mid T\in P(d)$ та $X\subseteq im(d)$, $Y\cap im(d)=\varnothing\} = \{d\in {}^{V,X-Y}A \mid T\in P(d)\}$.

$\boldsymbol{F}_{X-Y}(P) = \{d\in {}^{V}A \mid F\in P(d)$ та $X\subseteq im(d)$, $Y\cap im(d)=\varnothing\} = \{d\in {}^{V,X-Y}A \mid F\in P(d)\}$.

Теорема 9. За умови $y\in Y$ справджуються співвідношення (тут $x\notin\{\overline{u}\}$):

$$\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R^{\overline{u},x}_{\overline{v},y}(P))\subseteq \boldsymbol{T}_{Y-Z}(R^{\overline{u}}_{\overline{v}}(\exists xP)),$$

$$\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R^{\overline{u}}_{\overline{v}}(\exists xP))\subseteq \boldsymbol{F}_{Y-Z}(R^{\overline{u},x}_{\overline{v},y}(P)).$$

Зокрема, при $y\in Y$ маємо (див. [7]):

$$\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R^{x}_{y}(P))\subseteq \boldsymbol{T}_{Y-Z}(\exists x(P)),$$

$$\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\exists x(P))\subseteq \boldsymbol{F}_{Y-Z}(R^{x}_{y}(P)).$$

Задамо X–Y-означені відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій моделі мови $\boldsymbol{A}$.

$\Phi\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{Cl}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Psi_A) = \varnothing$;

$\Phi\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{Cm}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Psi_A) = {}^{V,X-Y}A$;

$\Phi\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{T}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Psi_A)$;

$\Phi\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{F}\Psi$, якщо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Psi_A)\subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Phi_A)$;

$\Phi\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{TF}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Psi_A)\subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Phi_A)$.

Тут і надалі в записах вигляду ${}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=$ та ${}_{X-Y}|\!\!=$ множини X, Y – диз'юнктні.

Якщо $Y=\varnothing$, то маємо X-означені відношення наслідку ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{Cl}$, ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{Cm}$, ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{T}$, ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{F}$, ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{TF}$. Якщо $X=\varnothing$, то маємо Y-неозначені відношення наслідку ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{Cl}$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{Cm}$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{T}$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{F}$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{TF}$.

У випадку $X=Y=\varnothing$ маємо відношення ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{Cl}$, ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{Cm}$, ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{T}$, ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{F}$, ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{TF}$.

Поширимо вищевведені відношення на довільні множини формул.

$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$, якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A)\cap\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A)=\varnothing\,.$$

$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$, якщо

$$\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A)\cup\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{X-Y}(\Psi_A)={}^{V,X-Y}A\,.$$

$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{T}}\Delta$, якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A)\subseteq\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{X-Y}(\Psi_A)\,.$$

$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{F}}\Delta$, якщо

$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A)\subseteq\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A)\,.$$

$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$, якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A)\subseteq\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{X-Y}(\Psi_A) \text{ та}$$

$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A)\subseteq\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A)\,.$$

Аналогічним чином вводимо X-означені та Y-неозначені відношення наслідку для множин формул:

${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{\boldsymbol{Cl}}$, ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{\boldsymbol{Cm}}$, ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{\boldsymbol{T}}$, ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{\boldsymbol{F}}$, ${}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{\boldsymbol{TF}}$

та ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{Cl}}$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{Cm}}$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{T}}$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{F}}$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{TF}}$.

У випадку $X=Y=\varnothing$ отримуємо відношення ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{\boldsymbol{Cl}}$, ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{\boldsymbol{Cm}}$, ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{\boldsymbol{T}}$, ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{\boldsymbol{F}}$, ${}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{\boldsymbol{TF}}$.

Відношення X–Y-означеного логічного наслідку для множин формул ${}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{Cl}}$, ${}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{Cm}}$, ${}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{T}}$, ${}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{F}}$, ${}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{\boldsymbol{TF}}$ визначаємо за такою схемою:

$\Gamma\ {}_{X-Y}|\!\!=_{*}\Delta$, якщо $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{*}\Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Аналогічно вводимо X-означені та Y-неозначені відношення логічного наслідку для множин формул.

Із визначень отримуємо:

1) $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X}|\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{*}\Delta$;
$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A}}|\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},-Y}|\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{*}\Delta$;

2) $\Gamma\ |\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_{X}|\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_{X-Y}|\!\!=_{*}\Delta$;
$\Gamma\ |\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_{-Y}|\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_{X-Y}|\!\!=_{*}\Delta$;

3) нехай та $\Gamma\subseteq\Lambda$ та $\Delta\subseteq\Sigma$; тоді
$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Lambda\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{*}\Sigma$ та
$\Gamma\ {}_{X-Y}|\!\!=_{*}\Delta \Rightarrow \Lambda\ {}_{X-Y}|\!\!=_{*}\Sigma$.

Теорема 10. Нехай z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma\cup\Delta)$. Тоді:

$$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},\{z\}\cup X-Y}|\!\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},X-Y}|\!\!=_{*}\Delta \text{ та}$$

$$\Gamma\ {}_{\{z\}\cup X-Y}|\!\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_{X-Y}|\!\!=_{*}\Delta.$$

Теорема 11. Нехай $Z, W, U\subseteq V$ – диз'юнктні множини предметних імен. Тоді

$\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},W-U}|\!\!=_{*}\Delta \Leftrightarrow$ для кожної $Y\subseteq Z$ маємо $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A},W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}|\!\!=_{*}\Delta$.

Теорема 12. Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини предметних імен. Тоді:

$\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W-U} \models_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow$ для кожної $Y \subseteq Z$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_*$

$\models_* \Delta, \exists x\Phi,\ R^{x}_{y_1}(\Phi), ..., R^{x}_{y_n}(\Phi), ...,$

де всі $y_i \in W \cup Y$;

$\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W-U} \models_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$ для кожної $Y \subseteq Z$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_*$

$\models_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi),\ R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y_1}(\Phi), ..., R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y_n}(\Phi), ...,$

де всі $y_i \in W \cup Y$.

Теорема 13. Нехай $Z \subseteq V$. Тоді:

$\Gamma_{\boldsymbol{A}} \models_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow$ для кожної непорожньої $Y \subseteq Z$ маємо

$\Gamma_{\boldsymbol{A},\, Y-(Z\setminus Y)} \models_* \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{y_1}(\Phi), ..., R^{x}_{y_n}(\Phi), ...,$

де всі $y_i \in Y$,

та $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, \{t\}-Z} \models_* \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{t}(\Phi)$, де t тотально строго неістотне, $t \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$;

$\Gamma_{\boldsymbol{A}} \models_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow$ для кожної непорожньої $Y \subseteq Z$ маємо $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, Y-(Z\setminus Y)} \models_*$

$\models_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi),\ R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y_1}(\Phi), ..., R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y_n}(\Phi), ...,$

де всі $y_i \in Y$,

та $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, \{t\}-Z} \models_* \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi),\ R^{\bar{u},x}_{\bar{v},t}(\Phi)$,

де $t \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$, t тотально строго неістотне.

Для формул вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi$ введено [7] поняття U-неозначуваної форми. Тут довільну $U \subseteq V$ трактуємо як множину неозначених імен. Це означає, що при інтерпретаціях усі імена U не мають значення.

Нехай $R^{r_1,...r_k,x_1,...x_n,u_1,...u_m}_{s_1,...s_k,y_1,...y_n,v_1,...v_m}\Phi$ така: усі $r_1,\ldots,r_k,s,\ldots,s_k,y_1,\ldots,y_n \in U$, $\{x_1,\ldots,x_n\} \cap U = \varnothing$, $\{v_1,\ldots,v_m\} \cap U = \varnothing$.

U-неозначувана форма формули $R^{r_1,...r_k,x_1,...x_n,u_1,...u_m}_{s_1,...s_k,y_1,...y_n,v_1,...v_m}\Phi$ – це вираз вигляду $R^{x_1,...x_n,u_1,...,u_m}_{\perp,...,\perp,\, v_1,...,v_m}\Phi$, де $\perp$ – спеціальний символ, який позначає невизначене значення.

Нехай $R^{\bar{a}}_{\bar{b}}\Phi$ та $R^{\bar{c}}_{\bar{e}}\Phi$ мають однакові U-неозначувані форми. Тоді для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ маємо: $R^{\bar{a}}_{\bar{b}}\Phi_A(d) = R^{\bar{c}}_{\bar{e}}\Phi_A(d)$ для всіх $d \in {}^{V,-U}A$, де усі імена U не мають значення. Таким чином, отримуємо властивість:

UnD) якщо $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi$ та $R^{\bar{z}}_{\bar{y}}\Phi$ мають однакові U-неозначувані форми, то $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi, \Gamma_{\boldsymbol{A},-U} \models_* R^{\bar{z}}_{\bar{y}}\Phi, \Delta$.

Теорема 14. Нехай z тотально неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$, тоді за умови $z \in X$ маємо:

$\Gamma, \exists x\Phi_{\ X-Y} \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \exists x\Phi_{\ \{z\}X-Y} \models_* \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, R^{x}_{z}(\Phi)_{\ \{z\}\cup X-Y} \models_* \Delta$;

нехай z тотально неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$, тоді при $z \in X$ маємо:

$\Gamma, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_{\ X-Y} \models_* \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_{\ \{z\}\cup X-Y} \models_* \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_{\ \{z\}\cup X-Y} \models_* \Delta$.

4. Секвенційні числення логік квазіарних предикатів кванторно-еквацiйного рівня

Властивості відношення логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови для КНЛ числень секвенційного типу. Таке числення для заданого відношення $\models_*$ будується так, що секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ має виведення $\Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta$. Секвенції трактуємо як множини формул, специфікованих (відмічених) спеціальними символами ${}_{\vdash}$ та ${}_{\dashv}$, які не входять до алфавіту мови. Позначаємо секвенції як ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, або, не деталізуючи, як Σ.

Секвенційні числення для відношень $\models_{Cl}$, $\models_{T}$, $\models_{F}$, $\models_{TF}$ КНЛ однозначних квазіарних предикатів кванторного рівня збудовано в [9]. В даній роботі розглянемо побудову секвенційного числення для відношення $\models_{Cl}$ логіки однозначних квазіарних предикатів кванторно-еквацiйного рівня, таке відношення далі позначатимемо $\models$. На відміну від [9], використовуємо спеціальні секвенційні форми елімінації кванторів під реномінацією, що робить зайвим використання секвенційних форм для пронесення кванторів через реномінації.

Секвенційні числення кванторно-еквацiйного рівня можна розглядати як окремий випадок прикладних секвенційних числень кванторного рівня. Виведення в прикладних численнях – це виведення секвенцій з доданими власними аксіомами (збагачених секвенцій). Виведення в прикладному численні секвенції **Σ** означає виведення збагаченої секвенції $\mathbf{\Sigma_R} = \Sigma \cup {}_{\vdash}\mathrm{Ax}$, де ${}_{\vdash}\mathrm{Ax} = \{{}_{\vdash}\mathrm{A} \mid \mathrm{A} \in \mathrm{Ax}\}$, Ax – множина власних аксіом. Тому числення кванторно-екваційного рівня можна трактувати як прикладні, в яких Ax складається з таких аксіом для рівності: рефлексивності $\forall x(x=x)$, симетричності $\forall x \forall y(x=y \rightarrow y=x)$, транзитивності $\forall x \forall y \forall z(x=y \rightarrow y=z \rightarrow x=z)$ (тут x, y, z – тотально строго неістотні); заміни рівних $\forall x \forall y(x=y \rightarrow (R^{z,\bar u}_{x,\bar v}(p) \leftrightarrow R^{z,\bar u}_{y,\bar v}(p)))$ для всіх $p \in Ps$ та $z, \bar u, \bar v$ (тут x, y – тотально строго неістотні, відмінні від $z, \bar u, \bar v$).

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають секвенційними. Формально визначення секвенційного дерева дається [2, 4] індуктивно.

Аксіомами секвенційного числення виступають замкнені секвенції. Замкненість ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta$ означає, що $\mathbf{\Gamma} \models \Delta$.

Базова умова замкненості: секвенція Ξ замкнена, якщо існує формула Φ така, що ${}_{\vdash}\Phi \in \Xi$ та ${}_{\dashv}\Phi \in \Xi$.

Додаткова умова UnD замкненості секвенції у даній вершині секвенційного дерева визначається на основі властивості *UnD*. Нехай *U* – множина всіх неозначених імен у даній вершині Ξ.

Секвенція Ξ *U*-замкнена, якщо:

UnD) існує пара формул ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}A \in \Xi$ та ${}_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar y}A \in \Xi$: $R^{\bar v}_{\bar x}A$ та $R^{\bar u}_{\bar y}A$ мають однакові *U*-неозначувані форми.

Якщо секвенція ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta$ *U*-замкнена, то $\mathbf{\Gamma}_{A,\,X\text{–}U} \models \Delta$ для довільних $\boldsymbol{A}$ та $X \subseteq V$, де $X \cap U = \varnothing$.

Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношення $\models$.

Секвенція **Σ** *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем **Σ**.

Беручи до уваги семантичні властивості відношення $\models$, вводимо такі базові секвенційні форми:

$${}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\dashv}A, \Sigma}{{}_{\vdash}\neg A, \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\vdash}A, \Sigma}{{}_{\dashv}\neg A, \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\vdash}A, \Sigma \quad {}_{\vdash}B, \Sigma}{{}_{\vdash}A \vee B, \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\dashv}A, {}_{\dashv}B, \Sigma}{{}_{\dashv}A \vee B, \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A), \Sigma}{{}_{\vdash}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A), \Sigma}{{}_{\dashv}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar u}(A), \Sigma}{{}_{\vdash}R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A), \Sigma} \text{ при } y \in \nu(A);$$

$${}_{\dashv}\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar u}(A), \Sigma}{{}_{\dashv}R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A), \Sigma} \text{ при } y \in \nu(A);$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA), \Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA), \Sigma} \text{ при } x \notin \{\bar u\};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA), \Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA), \Sigma} \text{ при } x \notin \{\bar u\};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{{}_{\vdash}\exists xA, \Sigma}{{}_{\vdash}R^{x}_{y}(\exists xA), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{{}_{\dashv}\exists xA, \Sigma}{{}_{\dashv}R^{x}_{y}(\exists xA), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(A), \Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{\bar w}_{\bar y}(A), \Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A), \Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A), \Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(B), \Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A \vee B), \Sigma};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A) \vee R^{\bar v}_{\bar x}(B), \Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A \vee B), \Sigma};$$

$${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,z}(A), \Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA), \Sigma};$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\ {}_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ \Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA), \Sigma}.$$

Для ${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}$ ім'я $x \notin \{\bar u\}$, ім'я z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\mathbf{\Sigma}, R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))$.

$${}_{\vdash}\exists\ \frac{{}_{\vdash}R^{x}_{y}(A), \Sigma}{{}_{\vdash}\exists xA, \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\exists\ \frac{{}_{\dashv}R^{x}_{z}(A),\ {}_{\dashv}\exists xA, \Sigma}{{}_{\dashv}\exists xA, \Sigma}.$$

Для ${}_{\vdash}\exists$ ім'я y тотально строго неістотне та $y \notin nm(\Sigma, A)$.

Для будованих числень не будемо явно вносити до секвенції аксіоми рівності, а враховуватимемо їх за потребою. Це означає введення додаткової умови замкненості секвенції та допоміжних секвенційних форм.

Додаткова умова замкненості враховує аксіому рефлексивності:

секвенція Ξ замкнена, якщо

$_{\dashv}x = x \in \Xi$ для деякого $x \in V$.

Для врахування аксіом симетричності й транзитивності вводимо такі допоміжні форми:

$$\text{ESm}\ \frac{_{\vdash}x = y,\ _{\vdash}y = x,\ \Sigma}{_{\vdash}x = y,\ \Sigma};$$

$$\text{ETr}\ \frac{_{\vdash}x = y,\ _{\vdash}y = z,\ _{\vdash}x = z,\ \Sigma}{_{\vdash}x = y,\ _{\vdash}y = z,\ \Sigma}.$$

Для врахування аксіом заміни рівних вводимо такі допоміжні форми:

$$_{\vdash}\text{EPs}\ \frac{_{\vdash}a = b,\ _{\vdash}R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p),\ _{\vdash}R_{b,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p),\ \Sigma}{_{\vdash}a = b,\ _{\vdash}R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p),\ \Sigma};$$

$$_{\dashv}\text{EPs}\ \frac{_{\vdash}a = b,\ _{\dashv}R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p),\ _{\dashv}R_{b,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p),\ \Sigma}{_{\vdash}a = b,\ _{\dashv}R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p),\ \Sigma}.$$

Секвенційні числення із такими базовими формами назвемо *QECl*-численнями.

Побудова секвенційного дерева. Процедура побудови секвенційного дерева мусить враховувати, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Тому при застосуванні $_{\dashv}\exists$ та $_{\dashv}\exists$R-форм приклади для формул вигляду $_{\dashv}\exists x\Phi$ та $_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ можуть мати тільки вигляд $_{\dashv}R_{y}^{x}(\Phi)$ та $_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$, де y – означене. Отже, при застосуванні $_{\dashv}\exists$ та $_{\dashv}\exists$R-форм треба перебрати всі можливі розподіли наявних предметних імен на означені й неозначені. Це можна реалізувати побудовою відповідних розгалужень секвенційного дерева: якщо у вершині Ξ маємо перше на етапі застосування $_{\dashv}\exists$ чи $_{\dashv}\exists$R-форми, нехай це буде до формули $_{\dashv}\exists x\Phi$ чи $_{\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$, то для Ξ будується багато вершин-"сестер", які є безпосередніми предками Ξ, мають одну й ту ж множину наявних імен та відрізняються лише різними множинами означених імен і відповідними множинами прикладів вигляду $_{\dashv}R_{y}^{x}(\Phi)$ чи $_{\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$, де y – означене.

Поетапна процедура побудови дерева для секвенції Σ починається з кореня дерева. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списку $_{\vdash}$-формул та списку $_{\dashv}$-формул. Якщо в секвенції немає недоступних $_{\vdash}$-формул чи $_{\dashv}$-формул (відповідний список вичерпано), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку. На початку побудови дерева доступна лише пара перших формул списків (або єдина $_{\vdash}$-формула чи $_{\dashv}$-формула, якщо один зі списків порожній). Перед побудовою дерева для Σ зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* "нових" тотально строго неістотних імен такий: що імена із *TN* не зустрічаються у формулах секвенції Σ.

Із кожною вершиною пов'язуємо множини наявних та означених предметних імен. Множина наявних імен – це множина імен усіх формул, які доступні на шляху від кореня до даної вершини. Множина означених імен явно виділяється лише на шляхах, де були хоч раз застосовані $_{\dashv}\exists$-форми. Усі тотально строго неістотні імена, введені $_{\vdash}\exists$ та $_{\vdash}\exists$R-формами на шляху від кореня до даної вершини, гарантовано означені.

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі k+1 перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій). Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, отримано замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ наступним чином.

Ативізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ. Далі по черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму.

Секвенційні форми типів RT, ΦN, R∃R, R∃p допоміжні: перед застосуванням інших, основних секвенційних форм, усуваємо, у разі наявності, тотожні перейменування та пари імен реномінацій за неістотним чи квантифікованим верхнім іменем, застосовуючи належну кількість разів зазначені допоміжні форми.

Спочатку виконуємо всі $\vdash\exists$ та $\vdash\exists$R-форми. Застосування такої форми додає нове тотально неістотне ім'я y до множини означених імен вершини, таке y беремо як перше незадіяне на даному шляху від кореня ім'я зі списку *TN*. Ім'я y гарантовано означене, додаємо його до множин наявних та означених імен. Після цього до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну форму – одну з форм типів RR, R¬, R∨, ¬, ∨. Вони не змінюють множини наявних та означених імен. Далі застосовуємо $\dashv\exists$ та $\dashv\exists$R-форми. Це робимо таким чином.

Якщо першим застосуванням форми елімінації квантора на шляху від кореня до даної вершини була $\dashv\exists$ чи $\dashv\exists$R-форма, то на цьому шляху ще не було виділення означених та неозначених імен. Нехай в даній вершині маємо множину Z наявних імен (імена доступних формул). Тоді, застосовуючи цю форму ($\dashv\exists$R до $\dashv R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ чи $\dashv\exists$ до $\dashv\exists x\Phi$), із даної вершини будуємо скінченне розгалуження дерева. Для цього розглядаємо всі можливі розподіли імен Z на означені (утворюють множину $Y\subseteq Z$) та неозначені (утворюють множину $Z\backslash Y$). Для кожної $Y\subseteq Z$ будуємо безпосереднього предка даної вершини-секвенції, додаючи приклади $\dashv R^{x}_{y}(\Phi)$ чи $\dashv R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)$ для кожного $z\in Y$. Для вершини-предка із $Y=\varnothing$ беремо (зі списку *TN*) нове тотально строго неістотне t та додаємо приклад вигляду $\dashv R^{x}_{t}(\Phi)$ чи $_{|}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},t}(\Phi)$; для такої вершини-предка t – означене, Z – множина неозначених, $\{t\}\cup Z$ – множина наявних імен.

Нехай на шляху від кореня до даної вершини $\dashv\exists$ чи $\dashv\exists$R-форма застосовується вперше, проте на шляху вже були застосування $\vdash\exists$ чи $\vdash\exists$R-форм. Тоді в даній вершині вже виділено множину W означених імен (вони тотально неістотні гарантовано означені). Нехай X – множина всіх інших наявних імен, вони ще не розподілені на означені та неозначені ($W\cup X$ – множина наявних імен вершини). Розглядаючи всеможливі розподіли імен X на означені (утворюють $Y\subseteq X$) та неозначені (утворюють $X\backslash Y$), для кожної $Y\subseteq Z$ будуємо безпосереднього предка даної вершини-секвенції, додаючи приклади для кожного $z\in W\cup Y$.

Нехай $\dashv\exists$ чи $\dashv\exists$R-форма застосовується вперше на етапі, проте на шляху від кореня до даної вершини вже були застосування таких форм. Це означає, що в даній вершині виділено множини W означених та U неозначених імен. Нехай на початку етапу після виконання кроку доступу до множини наявних імен було додано множину X імен нових доступних формул; до першого виконання на даному етапі $\dashv\exists$ чи $\dashv\exists$R-форми імена X не розподілені на означені й неозначені (проте від початку етапу можливе розширення множини означених імен); тоді $W\cup U\cup X$ – множина наявних імен вершини. Розглядаючи всеможливі розподіли імен X на означені й неозначені, для кожної $Y\subseteq X$ будуємо безпосереднього предка даної вершини, додаючи в ньому приклади для кожного $z\in W\cup Y$.

Нехай застосування $\dashv\exists$ чи $\dashv\exists$R-форми – це не перше застосування на етапі форми такого типу. Тоді в даній вершині виділено множини W означених та U неозначених імен, а нерозподілених імен немає, тобто $W\cup U$ – множина наявних імен вершини. Тоді добудовуємо єдиного безпосереднього предка даної вершини-секвенції, додаючи приклади для кожного $z\in W$ (фактично додаємо приклади для нових означених на даному етапі імен).

Для врахування аксіом рівності після кожного застосування базової форми кванторного рівня при потребі робимо наступні додаткові кроки.

Нехай на попередньому кроці була отримана формула $\vdash a=b$, або $\vdash a=b$ стала доступною на початку етапу. Тоді за допомогою ESm додаємо $\vdash b=a$. При появі

$\vdash a=b$ та $\vdash b=c$ за допомогою форми ETr додаємо $\vdash a=c$; фактично, враховуючи ESm, це означає, що до наявних $\vdash a=b$, $\vdash b=a$, $\vdash b=c$, $\vdash c=b$ додаємо $\vdash a=c$, $\vdash c=a$.

Після отримання $\vdash a=b$ (фактично вже маємо $\vdash a=b$ та $\vdash b=a$) далі, використовуючи форми типу EPs, для кожної наявної доступної формули вигляду $\vdash R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p)$ додаємо $\vdash R_{b,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p)$, для кожної наявної доступної $\dashv R_{a,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p)$ додаємо $\dashv R_{b,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p)$. Так робимо багатократно належну кількість разів. Наприклад, маючи $\vdash a=b$, $\vdash b=a$ та $\vdash c=d$, $\vdash d=c$, за появою $\vdash R_{a,c,\bar{v}}^{z,t,\bar{u}}(p)$ додаємо $\vdash R_{b,c,\bar{v}}^{z,t,\bar{u}}(p)$, $\vdash R_{a,d,\bar{v}}^{z,t,\bar{u}}(p)$, $\vdash R_{b,d,\bar{v}}^{z,t,\bar{u}}(p)$.

Після виконання основної секвенційної форми формула пасивна. До пасивних та утворених на даному етапі формул базові форми не застосовуються. Всі повтори специфікованих формул у секвенції усуваємо.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) процедуру завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;

2) процедуру завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево;

3) процедура не завершується, маємо нескінченне секвенційне дерево. За лемою Кеніга [2] нескінченне дерево зі скінченним розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях.

У випадках 2) і 3) у дереві існує скінченний або нескінченний незамкнений шлях $\wp$, вершини якого не можуть бути замкненими секвенціями, адже до замкненої секвенції незастосовна жодна форма, і процес побудови дерева для цього шляху обривається. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

Коректність та повнота *QECl*-числень. Нехай для секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ побудоване замкнене дерево. Із вищенаведеної процедури побудови секвенційного дерева випливає, що для кожної його вершини $\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}$ з множинами означених імен W та неозначених імен U справджується $\Lambda_{A,\,W-U}\models\mathrm{K}$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Для листів дерева це випливає з визначень замкненої та U-замкненої секвенцій.

Збереження секвенційними формами вищезазначеного відношення логічного наслідку (від засновків до висновків) виконується для допоміжних форм типу RT, ΦN, R∃R, R∃p та форм типу ¬, ∨, RR, R¬, R∨, ΦN, а також допоміжних форм для рівності ESm, ETr, EPs. Це випливає із відповідних властивостей відношення $\models$, а також відповідних властивостей рівності. Для форм $\vdash\exists$ і $\vdash\exists$R таке збереження випливає з теореми 14.

Для $\dashv\exists$ та $\dashv\exists$R збереження відповідних відношень логічного наслідку при русі до вершини Σ, яка містить активну формулу вигляду $\dashv\exists x\Phi$ чи $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$, від вершин, які є її безпосередніми предками та містять відповідні приклади вигляду $\dashv R_{y}^{x}(\Phi)$ чи $\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$, гарантується теоремами 12 та 13.

Таким чином, для побудованого *QECl*-числення справджується

Теорема 15 (коректності). Нехай секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна. Тоді $\boldsymbol{\Gamma}\models\Delta$.

Для доведення повноти *QECl*-числень опираємося на метод модельних (хінтікківських) множин [5].

Нехай $\boldsymbol{H}$ – множина специфікованих формул із виділеною множиною означених імен $W\subseteq nm(\boldsymbol{H})$; тоді $U=nm(\boldsymbol{H})\setminus W$ – множина її неозначених імен.

Множину $\boldsymbol{H}$ назвемо модельною, якщо виконуються відомі [7] умови HC, HCU, HRT, HΦN, H¬, H∨, HR¬, HR∨, H∃, а також умови HR∃R, HR∃p, H∃R та умови для рівності HCE, HES, HET, HEP.

Наведемо тут умови HCE, HES, HET, HEP та HR∃R, HR∃p, H∃, H∃R:

HCE) жодна формула вигляду $\dashv x=x$ не може належати до $\boldsymbol{H}$;

HES) якщо $\vdash x=y\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash y=x\in\boldsymbol{H}$;

HET) якщо $\vdash x=y\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash y=z\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash x=z\in\boldsymbol{H}$;

HEP) якщо $\vdash x=y\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash R_{y,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{x,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p)\in\boldsymbol{H}$;

якщо $\vdash x=y\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv R_{y,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то

$_{-|}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(p) \in \boldsymbol{H}$;

НR∃R) якщо $_{|-}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то $_{|-}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$; якщо $_{-|}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то $_{-|}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

НR∃р) якщо $_{|-}R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то $_{|-}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$; якщо $_{-|}R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то $_{-|}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$;

Н∃) якщо $_{|-}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$, то існує $y \in W$ таке, що $_{|-}R^{x}_{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$; якщо $_{-|}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$, то $_{-|}R^{x}_{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ для всіх $y \in W$;

Н∃R) якщо $_{|-}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то існує $y \in W$ таке, що $_{|-}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$; якщо $_{-|}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то $_{-|}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ для всіх $y \in W$.

Теорема 16. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, $\boldsymbol{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $\delta \in {}^{V}A$ такі:

1) $_{|-}\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$;

2) $_{-|}\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$.

Те, що множина $\boldsymbol{H}$ – модельна, доводимо традиційним способом (подібне доведення див., напр., [4, 9]).

Нехай W – множина всіх означених предметних імен, що фігурують у $\boldsymbol{H}$.

Рівність індукує на W відношення еквівалентності: $x \sim y \Leftrightarrow {}_{|-}x = y \in \boldsymbol{H}$.

Нехай $A = W/_{\sim}$ – фактор-множина множини W за відношенням ~. Позначимо як $[v]$ клас еквівалентності з представником v. Визначимо $\delta = [v \mapsto [v] \mid v \in W]$. Таке відображення δ є сюр'єкцією $W \rightarrow A$.

Задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)$.

Якщо $_{|-}x = y \in \boldsymbol{H}$, то $x \sim y$, тому $(x = y)_A(\delta) = T$ за побудовою δ.

Якщо $_{|-}p \in \boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(\delta) = T$; якщо $_{-|}p \in \boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(\delta) = F$.

Якщо $_{|-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p) \in \boldsymbol{H}$, то $p_A(\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)) = T$; якщо $_{-|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p) \in \boldsymbol{H}$, то $p_A(\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів задаємо довільним чином, беручи до уваги обмеження щодо строго неістотності: для всіх $d, h \in {}^{V}A$ таких, що $d \| {-\nu(p)} = h \| {-\nu(p)}$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$. Це гарантує, що імена $y \in \nu(p)$ строго неістотні для p_A.

Далі доведення ведеться індукцією за складністю формули згідно з побудовою модельної множини.

Для атомарних формул і формул вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)$ твердження 1) та 2) теореми випливають із визначення значень базових предикатів. Крок індукції для тверджень 1) та 2) доводиться стандартним чином, аналогічне доведення див. [4, 9].

На основі теореми 16 отримуємо теорему повноти для *QECl*-числень.

Теорема 17 (повноти). *Нехай* $\Gamma \models \Delta$. *Тоді секвенція* $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ *вивідна.*

Теорема повноти доводиться традиційним способом, доведення аналогічних теорем див. [4, 9].

Висновки

Досліджено першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня. Описано мови і семантичні моделі цих логік, розглянуто різні формалізації відношення логічного наслідку. Наведено основні семантичні властивості таких логік, зокрема, властивості відношень логічного наслідку для множин формул, *X–Y*-означених відношень логічного наслідку. На цій основі для логік однозначних квазіарних предикатів кванторно-екваційного рівня побудовано числення секвенційного типу, доведено коректність та повноту цих числень.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford Univ. Press. – Vol. 1–5, 1993–2000.
2. *Клини С.* Математическая логика. – М., 1973. – 480 с.

3. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблеми програмування. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
4. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. – 528 с.
5. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия – М., 1996. – 304 с.
6. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Проблеми програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
7. *Шкильняк С.С.* Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 32–49.
8. *Шкільняк С.С.* Спеціальні відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів // Проблеми програмування. – 2011. – № 4. – С. 36–48.
9. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення першопорядкових логік однозначних квазіарних предикатів // Проблеми програмування. – 2012. – № 1. – С. 34–51.
10. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки кванторно-еквайійного рівня // Вісник Київського ун-ту. Серія: кібернетика. – 2011. – Вип. 11. – С. 32–40.

Одержано 10.02.2012

Про авторів:

Нікітченко Микола Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
завідувач кафедри теорії та технології програмування,

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
доцент кафедри теорії та технології програмування.

***Місце роботи авторів*:**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ,
вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0519,
(044) 522 0640 (д)
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua