термических условиях / О. Р. Мичута, А. П. Власюк, П. Н. Мартинюк // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 2. — С. 3–18.
10. Мічута О. Р. R-вимірна задача впливу багатокомпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів / О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. — 2013. — Вип. 2. — С. 196–204.
11. Петрухин В. П. Расчет суффозионных деформаций оснований в засоленных грунтах / В. П. Петрухин // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1995. — № 5. — С. 11–13.
12. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Научный мир, 2003. — 316 с.
13. Шахно С. М. Чисельні методи лінійної алгебри / С. М. Шахно. — Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. — 243 с.
14. Buhmann M. D. Radial Basis functions: Theory and implementations / M. D. Buhmann. — Cambridge University Press, 2003. — 272 p.

The stability of numerical solutions of the chemical suffosion effect on the filtration consolidation processes was investigated by tracing the subsidence change of upper moving soil border while the density of spatial and time grids had been changing.

Key words: *nonlinear boundary-value problem, subsidence, spatial variables, numerical solutions stability.*

Отримано: 14.07.2014

УДК 519.718:519.217:519.837:517.929

В. І. Мусурівський, канд. фіз.-мат. наук,
В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРОБЛЕМА СТАБІЛІЗАЦІЇ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ МАРКОВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА СКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглянуто проблему стабілізації стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченним запізненням при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Ключові слова: *диференціально-функціональні рівняння, системи випадкової структури, імпульсні марковські збурення, скінченне запізнення.*

Вступ. Проблема стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівняннь с імпульсними марковскими збуреннями та скінченним запізненням проаналізована в роботах [1], [3], [6].

У цій роботі розглянута проблема стабілізації стохастичних диференціально-функціональних рівняннь з імпульсними марковськими збуреннями (зовнішними и внутрішними) та скінченним запізненням, що охарактеризовані системою, котра являяється системою випадкової структури (СВСЗ) при наявності перехідного процесу та запізнення одночасно [2], [3], [6].

Нехай заданий ймовірнісний базис $\left(\Omega, F, \left\{F_t, t \geq 0\right\}, P\right)$ [1–3]. Випадковий процес $x(t) \in R^m$ системи випадкової структури описується диференціально-функціональним рівнянням із скінченним запізненням

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), x_t, u)dt + b(t, \xi(t), x(t), x_t, u)dw(t)\,, \tag{1}$$

із зовнішніми імпульсними марковськими збуреннями

$$\Delta\, x(t)\Big|_{t=t_k} = g\left(t_k -, \xi\left(t_k -\right), x\left(t_k -\right), \eta_k\right), \tag{2}$$

де

$$t_k \in S \equiv \left\{t_n \Uparrow,\; n \in N\right\},$$

за початковими умовами

$$x_{t_0} = z_0 \in D;\; \xi\left(t_0\right) = y \in Y;\; \eta_{k_0} = h \in H\,. \tag{3}$$

Асимтотика розв'язку $x \equiv x(t) \in R^m$ СВСЗ — відносно нульового розв'язку $x(t) \equiv 0,\ \forall t \geq t_0 \geq 0$; $x_t \equiv \{x(t+\theta)\}$, $-\tau \leq \theta < 0$, $\tau > 0$; $D \equiv D\left([-\tau, 0], R^m\right)$ — простір Скорохода; $\xi(t)$ — феллерівський марковський процес, $\{\eta_k, k \geq 0\}$ — феллерівський ланцюг Маркова. $w(t)$ — вінерівський процес. Величина $u \equiv u\left(t, y, x_t, h\right) \in R^r$ — r-вимірне керування.

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних функціонали $a:\ R_+ \times Y \times R^m \times D \times R^r \to R^m$, $b:\ R_+ \times Y \times R^m \times D \times R^r \to R^m$, $g:\ R_+ \times Y \times \times R^m \times H \to R^m$, задовольняють умову Ліпшіца для $\forall\, x^1, x^2 \in R^m$, $\forall\, z^1, z^2 \in D$ рівномірно за всіма іншими аргументами для $\forall t \geq t_0 \geq 0$; $\forall y \in Y$; $\forall h \in H$, $\forall u \in R^r$:

$$\begin{gathered}\left|a(t, y, x^1, z^1, u) - a(t, y, x^2, z^2, u)\right| + \left|b(t, y, x^1, z^1, u) - b(t, y, x^2, z^2, u)\right| + \\ + \left|g(t, y, x^1, h) - g(t, y, x^2, h)\right| \leq \Lambda(\left|x^1 - x^2\right| + \left|z^1 - z^2\right|)\end{gathered} \tag{4}$$

і умову рівномірної обмеженості

$$\sup_{\substack{t \geq 0,\, y \in Y,\\ h \in H}} \left(\left|a(t, y, x, x_t, u)\right| + \left|b(t, y, x, x_t, u)\right| + \left|g(t, y, x, h)\right|\right) = \gamma < +\infty\,,\ \gamma > 0\,. \tag{5}$$

Стабілізація імпульсних систем випадкової структури. Метод розв'язання задачі про оптимальну стабілізацію будуватиметься за двома основними обмеженнями:

1) синтез оптимального керування $u^0(t,x,y,h)$ будується за принципом повного зворотного зв'язку, тобто існує можливість повного та точного вимірювання фазового вектора $x(t) \equiv x(t,\omega) \in R^m$ у будь-який момент часу $t \ge t_0$;
2) передбачається, що відомо структуру $\xi(t)$, в якій перебуває система (1) у даний момент часу $t \ge t_0$ і яка не залежить від ланцюга Маркова η_k ($k \ge k_0$ відповідає моменту $t_k \in S$).

Доведемо основну теорему про оптимальну стабілізацію [2–3].

Теорема. Нехай для імпульсної динамічної системи зі скінченним запізненням (1)–(3) за умови стрибка [2–3]:

$$P\left\{x\left(t^*\right) \in (z, z+dz) \middle| x\left(t^*-0\right) = x\left(t^*\right)\right\} = p_{ij}\left(t^*, z \middle| x\right) dz + o\left(dz\right), \quad (6)$$

1) існує додатно-визначений функціонал $v^0(t,y,\varphi,h)$ за $\varphi \in D$, такий, що послідовність функціоналів

$$v_k^0(y,\varphi,h) \equiv v^0(t_k, y, \varphi, h) \quad (7)$$

є функціоналами Ляпунова, і задана послідовність r-вимірних функцій-керувань

$$u_k^0(y,\varphi,h) \equiv u^0(t_k,y,\varphi,h), \text{ для } t_{k+1} > t_k \ge t_0, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \quad (8)$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \quad (9)$$

$\forall y \in Y$, $h \in H$, причому $\{v_k^0\}$, $\{u_k^0\}$ вимірні за всіма аргументами;

2) послідовність $v_k^0(y,\varphi,h)$ в області

$$t = t_k \ge t_0 \ge 0, \ \varphi \in D, \ y \in Y, \ h \in H, \quad (10)$$

допускає нескінченно малу верхню та нескінченно велику нижню межі [1];

3) послідовність функціоналів

$$W(t,y,\varphi,h,u_k^0(y,\varphi,h)) > 0, \quad (11)$$

за критерієм [2]

$$I_u(k_0, y_0, \varphi_0, \eta_{k_0}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\{W(t,\xi(t),[x_t],\eta_k,u[t]) \big| \xi(t_0) = y_0, x_{t_0} = \varphi_0, \eta_{k_0}\} dt,$$

де $W(t,y,x_t,\eta_k,h,u) \ge 0$ — невід'ємний функціонал за третім аргументом, є додатно визначеним за $\varphi \in D$ для $\forall\, t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$;

4) послідовність слабких інфінітезимальних операторів у силу системи (1) для $\forall\, t \in [t_k, t_{k+1}]$ $(Qv_k^0)(y,\varphi,h,u)\Big|_{u_k^0}$, обчислених при $u_k^0 \equiv u_k^0\,(y,\varphi,h)$, задовольняє умову

$$(Qv_k^0)(y,\varphi,h,u)\Big|_{u_k^0} = -W(t,y,\varphi,h,u_k^0)\,; \tag{12}$$

5) величина $(Qv_k^0)(y,\varphi,h,u)\Big|_u + W(t,y,\varphi,h,u)$ досягає мінімуму при $u = u^0$, тобто

$$\begin{gathered}(Qv_k^0)(y,\varphi,h,u)\Big|_{u^0} + W(t,y,\varphi,h,u^0) = \\ = \min_{u\in R^r}\{(Qv_k^0)(y,\varphi,h,u)\Big|_u + W(t,y,\varphi,h,u)\} = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Тоді керування $u^0\,(t_k,y,\varphi,h)$, $k \geq 0$, здійснює стабілізацію розв'язку задачі Коші (1), (3) з імпульсним збуренням (2) до асимптотичної стійкості за ймовірністю, причому маємо рівність

$$\begin{gathered}v^0\left(t_0,y^0,\varphi^0,\eta_{k_0}\right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}} E\left\{W\left(t,\xi(t),[x_t^0],\eta_k,u^0[t]\right)\Big|\xi(t_0)=y^0,\, x_{t_0}=\varphi^0,\, \eta_k = h\right\}dt = \\ = \min_{u\in R^r}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}} E\left\{W\left(t,\xi(t),[x_t],\eta_k,u[t]\right)\Big|y^0,\,\varphi^0,\,h\right\}dt = \\ = I_{u^0}\,(t_0,y^0,\varphi^0,h)\,.\end{gathered} \tag{14}$$

Доведення.

I. Асимптотична стійкість за ймовірністю в цілому імпульсної динамічної системи (1)–(3) за умови стрибка (6) при $u \equiv u^0\,(t_k,y,\varphi,h)$, $k \geq 0$, випливає з теореми 2 [1], тому що функціонали $v^0(t,y,\varphi,h)$, $t_k \leq t < t_0$, $k \geq 0$, задовольняють умови цієї теореми. Рівність (14), також є наслідком теореми 4 [1].

II. Доведемо, що керування $u^0\,(t_k,y,\varphi,h)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k \geq 0$, здійснюють стабілізацію розв'язку системи (1)–(3).

Доведення проведемо від супротивного. Нехай існує керування $u^*(t_k,y,\varphi,h) \neq u^0\,(t_k,y,\varphi,h)$, яке при підстановці в (11) реалізує такий розв'язок $x^*[t]$ за деякою початковою умовою (2), що

$$I_{u^*}\,(t_0,y^0,\varphi^0,h) < I_{u^0}\,(t_0,y^0,\varphi^0,h)\,. \tag{15}$$

Надалі, умова (13) дає нерівність

$$(Qv_k^0)(y,\varphi,h)\Big|_{u^*} \geq -W(t,y,\varphi,h,u^*(t,y,\varphi,h)) . \qquad (16)$$

Усереднимо (16) за випадковою величиною $\{x^*[t],\xi(t)\}$, проінтегруємо за t від t_0 до $t=T$ і, врахувавши адитивність інтеграла, з урахуванням формули Динкіна [5], отримаємо

$$E\{v^0(T,[x_T^*],\xi(T),\eta_{k(T)})\Big|y^0,\varphi^0,\xi_{k_0}\} - v^0(t_0,y^0,\varphi^0,\xi_{k_0}) \geq$$

$$\geq -\int_{t_0}^{\infty} E\left\{W\left(t,\xi(t),[x_t^*],\eta_k,u^*[t]\right)\Big|y^0,\varphi^0,\xi_{k_0}\right\}dt \equiv \qquad (17)$$

$$\equiv -\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}} E\left\{W\left(t,\xi(t),[x_t^*],\eta_k,u^*[t]\right)\Big|y^0,\varphi^0,\xi_{k_0}\right\}dt .$$

З (15) випливає збіжність інтеграла в правій частині нерівності (17) при $T\to\infty$, а отже, й збіжність ряду в (17). Далі, зі збіжності інтеграла в правій частині (17) випливає, що підінтегральний вираз прямує до нуля, тобто

$$\lim_{t\to\infty} E\{W\left(t,\xi(t),[x_t^*],\eta_k,u^*[t]\right)\Big|y^0,\varphi^0,h\}=0 , \qquad (18)$$

а, отже

$$\lim_{t\to\infty} E\{v^0(T,\xi(T),[x_T^*],\eta_{k(T)})\}=0 . \qquad (19)$$

Враховуючи, що за (18) із $E\{W\}\underset{t\to\infty}{\to}0$ випливає $E\{v^0\}\underset{t\to\infty}{\to}0$ (19), нерівність (17) перетворюється у нерівність

$$v^0(t_0,y^0,\varphi^0,\eta_{k_0}) \equiv I_{u^0}(t_0,y^0,\varphi^0,\eta_{k_0}) \leq I_{u*}(t_0,y^0,\varphi^0,\eta_{k_0}) , \qquad (20)$$

а отримана нерівність (20) суперечить припущенню (15).

Отже, протиріччя доводить оптимальність керування $u^0(t,y,x,h)$. **Теорему доведено.**

Наслідок. Якщо $\xi(t)$ — марковський ланцюг, допускає розклад (6), отримаємо керування, котре повинне задовольнити оптимальний функціонал Ляпунова $v_k^0(y,x,h)$ й оптимальне керування $u_k^0(y,x,h)$.

Із врахуванням формули (59) [2] і формули (4.10) [4, с. 54] перше рівняння для v_k^0 одержимо, підставляючи $v_k^0(y,x,h)$ й $u_k^0(y,x,h)$ у ліву частину (19) виразу для усередненого інфінітезимального оператора $(Qv_k^0)\Big|_{u^*}$. Тоді шукані рівняння в точках (t_k,y_j,φ) будуть мати вигляд

$$\frac{\partial v_k^0}{\partial t}+\left(\frac{\partial v_k^0}{\partial\varphi}\right)'\cdot a(t,y,x,\varphi,u)+\sum_{j\neq i}^{l}[\int_{-\infty}^{+\infty} v^0(t,y_j,\varphi_j,h)p_{ij}(t,z\big|\varphi)dz -$$

$$-v^0(t,y_i,\varphi,h) - v^0(t,y_j,\varphi,h)p_{ij}(t,z|\varphi)dz - \tag{21}$$
$$-v^0(t,y_i,\varphi,h)]q_{ij}(t,z|\varphi)dz + W(t,y,\varphi,h,u) = 0\,,$$

де $\left(\frac{\partial v_k^0}{\partial \varphi}\right)' \equiv \left(\partial v^0 / \partial \varphi_1, \ldots, \partial v^0 / \partial \varphi_m\right)$ — похідні Фреше, $k \geq k_0$, $p_{ij}(t,z|\varphi)$ — визначаються із формули (18).

Друге рівняння для оптимального керування $u_k^0(y,x,h)$ отримаємо з (21) диференціюванням за змінною u, оскільки $u = u^0$ надає мінімум лівій частині (17)

$$\left[\left(\frac{\partial v^0}{\partial \varphi}\right)' \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial u_k}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial u_k}\right)'\right]\Bigg|_{u_k = u^0} = 0\,, \tag{22}$$

де $\frac{\partial a}{\partial u_k}$ — $m \times n$-матриця Якобі, побудована з елементів

$$\left\{\frac{\partial a_n}{\partial u_{ks}},\, n = \overline{1,m},\, s = \overline{1,r}\right\},\ \left(\frac{\partial W}{\partial u_k}\right)' = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{k1}}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial u_{kr}}\right).$$

Зауваження 1. Рівняння (22), з якого знаходять оптимальні керування $u_k(t) \in R^r$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, за формою збігається з $u(t)$, що з'являється в детермінованих задачах оптимальної стабілізації.

Однак рівняння (22) враховує випадкову структуру системи (1)–(3) через оптимальний функціонал Ляпунова-Красовського $v^0(t,y,\varphi,h)$ із рівняння (22).

Зауваження 2. Задача оптимальної стабілізації, відповідно до теореми, зводиться до розв'язання складної нелінійної системи рівнянь (19) у частинних похідних для визначення невідомих функціоналів Ляпунова-Красовського $v_k^0 \equiv v_k^0(t,y,\varphi,h_i)$, $i = \overline{1,l}$, $k \geq k_0$.

Висновки. Доведено основні твердження про стабілізацію стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченним запізненням при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Список використаних джерел:

1. Королюк В. С. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последействием при наличии марковских параметров. Часть I / В. С. Королюк, В. И. Мусуривский, В. К. Ясинский // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 1. — С. 16-35.

2. Королюк В. С. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последействием при наличии марковских параметров. Часть I / В. С. Королюк, В. И. Мусуривский, В. К. Ясинский // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 3. — С. 5-20.
3. Проблеми стабілізації імпульсних систем випадкової структури зі скінченною післядією / В. С. Королюк, В. І. Мусурівський, В. К. Ясинський, І. В. Дорошенко. — Чернівці : Чернівецький національний університет, 2010. — 240 с.
4. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург : Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998. — 222 с.
5. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1963. — 859 с.
6. Мусурівський В. І. Про проблему стійкості стохастичних диферециально-функціональних рівняннь с імпульсними марковскими збуреннями та скінченним запізненням / В. І. Мусурівський // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип.10. — С. 140-151.

The scientific work deals with the stabilization of the impulse system of the odd structure with the continous behind under the impact of external and internal Markov's parameters with contemporary existing random process and behind.

Key words: *impulse dynamical system, system odd structure, continous behind.*

Отримано: 20.06.2014

УДК 519.21

А. В. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ ЛІНІЙНИМИ СТРИБКАМИ РОЗВ'ЯЗКІВ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Отримано умови стійкості у середньому та у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими лінійними стрибками розв'язків у гільбертових просторах.

Ключові слова: *гільбертовий простір, стійкість, марковський процес.*

Вступ. До вивчення стійкості розв'язків стохастичних рівнянь можливо застосувати різні підходи. Так, якщо відомі розв'язки таких рівнянь, то інколи застосовують прямий метод дослідження стійкості або

