

УДК 004.942

**О. І. Махович**, аспірант,  
**В. А. Федорчук**, д-р техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕСУ В НЕОБМЕЖЕНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ З НЕСИМЕТРИЧНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ПЕРШОГО РОДУ**

Розглядається метод, в якому несиметричні граничні умови шляхом заміни змінних зводяться до симетричних та використовується спосіб апроксимації розв'язку нестационарної крайової задачі теплопровідності із симетричними граничними умовами інтерполяційним поліномом Лагранжа за трьома опорними точками просторової координати. Наближений розв'язок у двох із цих точок знаходиться як розв'язок системи диференціальних рівнянь, а третя точка вибирається на границі об'єкта і як значення використовується відповідна гранична умова. Застосовані прийоми дали змогу істотно спростити обчислювальний алгоритм за умови забезпечення прийнятної точності розв'язку.

**Ключові слова:** *моделювання теплових процесів, несиметричні граничні умови, числова реалізація, апроксимація.*

**Вступ.** Проблема дослідження динаміки процесів теплоперенесення відома давно, а із збільшенням потужностей технічних об'єктів або у зв'язку із мініатюризацією стає ще актуальнішою, оскільки для забезпечення надійності та ефективності експлуатації необхідно ще на етапі проектування розраховувати найоптимальніші температурні режими експлуатації.

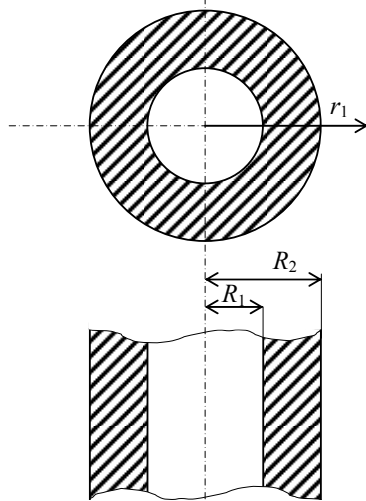
Математичними моделями процесів теплопровідності, зазвичай, є диференціальні рівняння в частинних похідних гіперболічного (моделі із врахуванням скінченної швидкості розповсюдження тепла) та параболічного типу (швидкість розповсюдження теплового поля вважається нескінченною) [1–3]. Способи їх розв'язування значною мірою відрізняються в залежності від граничних умов. Існуючі програмні засоби, які можна застосувати для числової реалізації таких моделей використовують переважно різницеві схеми та вимагають, як правило, значних обчислювальних потужностей [1; 4; 5]. Тому доцільним є пошук універсального підходу до розробки методів числової реалізації моделей процесів теплопровідності для випадків несиметричних граничних умов першого, другого та третього роду.

Розглянемо методику дослідження нестационарних теплових процесів у необмеженому порожнистому циліндрі з несиметричними граничними умовами першого роду.

**Постановка задачі.** В необмеженому порожнистому циліндрі (в циліндричній трубі) з внутрішнім радіусом  $R_1$  і зовнішнім радіусом  $R_2$  та коефіцієнтом теплопровідності  $k(r_1)$  задано деякий початковий розподіл температури  $T(r_1, t)|_{t=0} = F_{II}(r_1)$ . Температура на внутрішній і зовнішній поверхнях примусово змінюється за різними законами, заданими своїми функціями часу:

$$\begin{cases} T(r_1, t)|_{r_1=R_1} = F_{cp1}^-(t), \\ T(r_1, t)|_{r_1=R_2} = F_{cp1}^+(t). \end{cases} \quad (1)$$

Усередині стінки циліндра діє джерело тепла, потужність якого пропорційна  $f(t)$ . Необхідно знайти розподіл температури  $T(r_1, t)$  по товщині стінки циліндра в будь-який момент часу.



**Рис. 1.** Зображення об'єкта моделювання

Нестационарна задача теплопровідності в цьому випадку описується диференціальним рівнянням з частинними похідними параболічного типу, яке у циліндричній системі координат має вигляд:

$$c(r_1)\rho(r_1)\frac{\partial T(r_1, t)}{\partial t} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1 k(r_1)\frac{\partial T(r_1, t)}{\partial r_1}\right) + f(t), \quad (2)$$

$$R_1 \leq r_1 \leq R_2, t > 0,$$

де  $c(r_1)$  — питома теплоємність матеріалу циліндра,  $\rho(r_1)$  — густина,  $r_1$  — просторова координата,  $t$  — час.

Рівняння (2) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial T(r_1, t)}{\partial t} = a_1(r_1) \frac{\partial^2 T(r_1, t)}{\partial r_1^2} + b_1(r_1) \frac{\partial T(r_1, t)}{\partial r_1} + q_1(r_1) f(t), \quad (3)$$

у якому

$$a_1(r_1) = \frac{k(r_1)}{c(r_1)\rho(r_1)}, \quad b_1(r_1) = \frac{1}{c(r_1)\rho(r_1)} \left[ \frac{1}{r_1} k(r_1) + k'(r_1) \right],$$

$$q_1(r_1) = \frac{1}{c(r_1)\rho(r_1)}.$$

Введемо нову просторову змінну  $r = 1 + 2 \frac{r_1 - R_2}{R_2 - R_1}$  так, щоб  $-1 \leq r \leq 1$ .

Звідки  $r_1 = \frac{1}{2}(r(R_2 - R_1) + R_1 + R_2)$ . Частинні похідні після заміни змінних запишуться:

$$\frac{\partial T(r_1, t)}{\partial r_1} = \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r_1} = \frac{2}{R_2 - R_1} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 T(r_1, t)}{\partial r_1^2} = \frac{\partial r}{\partial r_1} \left( \frac{2}{R_2 - R_1} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{4}{(R_2 - R_1)^2} \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2}.$$

Рівняння (3) у нових координатах запишеться

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = a_1(r_1) \frac{4}{(R_2 - R_1)^2} \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + b_1(r_1) \frac{2}{R_2 - R_1} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + q_1(r_1) f(t)$$

або після замін

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = a(r) \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + b(r) \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} + q(r) f(t). \quad (4)$$

Для зведення задачі до випадку однорідних граничних умов подамо шукану функцію у вигляді суми

$$T(r, t) = V(r, t) + U(r, t), \quad (5)$$

де  $V(r, t)$  задовольняє однорідні граничні умови, а

$$U(r, t) = \frac{r+1}{2} F_{ep1}^+(t) - \frac{r-1}{2} F_{ep1}^-(t) \quad (6)$$

задовольняє граничні умови  $F_{ep1}^\pm$ .

Введення змінної  $U(r, t)$  дає змогу позбутись несиметричності граничних умов і перейти до розв'язування задачі методом перерізів [6] відносно  $V(r, t)$ .

Продиференціювавши (5) по  $t$  один раз і по  $r$  двічі та підставивши отримані вирази в (4) із врахуванням (6) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial V(r,t)}{\partial t} = a(r) \frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial r^2} + b(r) \frac{\partial V(r,t)}{\partial r} + z(r,t), \quad (7)$$

в якому

$$z(r,t) = \frac{1}{2} b(r) [F_{zp1}^+(t) - F_{zp1}^-(t)] + \\ + \frac{r-1}{2} [F_{zp1}^-(t)]' - \frac{r+1}{2} [F_{zp1}^+(t)]' + q(r) f(t),$$

відносно допоміжної функції  $V(r,t)$  із однорідними граничними умовами

$$V_{zp1}(t) \equiv V(r,t)|_{r=\pm 1} = 0. \quad (8)$$

Замінімо в (7), згідно методу перерізів для випадку симетричних граничних умов, першу похідну виразом

$$\frac{\partial V(r,t)}{\partial r} \approx 2r(8r^2 - 5)V(0,t) + \frac{32}{3}r(1 - 2r^2)V\left(\frac{1}{2},t\right) + \frac{2}{3}r(8r^2 - 1)V_{zp1}(t),$$

другу похідну виразом

$$\frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial r^2} \approx (48r^2 - 10)V(0,t) + \left(\frac{32}{3} - 64r^2\right)V\left(\frac{1}{2},t\right) + \left(16r^2 - \frac{2}{3}\right)V_{zp1}(t).$$

Із врахуванням (8) маємо:

$$\frac{\partial V(r,t)}{\partial t} = \left[ a(r)(48r^2 - 10) + b(r)(16r^3 - 10r) \right] V(0,t) + \\ + \left[ a(r) \left( \frac{32}{3} - 64r^2 \right) + b(r) \left( \frac{32}{3}r - \frac{64}{3}r^3 \right) \right] V\left(\frac{1}{2},t\right) + z(r,t). \quad (9)$$

Задаючи по черзі  $x = 0$  та  $x = \frac{1}{2}$ , отримаємо систему двох звичай-

них диференціальних рівнянь для визначення величин  $V(0,t)$  і  $V\left(\frac{1}{2},t\right)$ :

$$\begin{cases} \frac{dV(0,t)}{dt} = -10a(0)V(0,t) + \frac{32}{3}a(0)V\left(\frac{1}{2},t\right) + z(0,t), \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} = \left( 2a\left(\frac{1}{2}\right) - 3b\left(\frac{1}{2}\right) \right) V(0,t) + \\ + \frac{1}{3} \left( 8b\left(\frac{1}{2}\right) - 16a\left(\frac{1}{2}\right) \right) V\left(\frac{1}{2},t\right) + z\left(\frac{1}{2},t\right), \end{cases} \quad (10)$$

в якій

$$z(0, t) = \frac{1}{2} b(0) [F_{zpl}^+(t) - F_{zpl}^-(t)] - \frac{1}{2} \left[ (F_{zpl}^-(t))' + (F_{zpl}^+(t))' \right] + q(0) f(t),$$

$$z\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{1}{2} b\left(\frac{1}{2}\right) [F_{zpl}^+(t) - F_{zpl}^-(t)] - \frac{1}{4} (F_{zpl}^-(t))' - \frac{3}{4} (F_{zpl}^+(t))' + q\left(\frac{1}{2}\right) f(t).$$

Для системи (10) початкові умови мають вигляд

$$V(0, t) \Big|_{t=0} = F_{II}(0) - \frac{1}{2} (F_{zpl}^+(0) + F_{zpl}^-(0)),$$

$$V\left(\frac{1}{2}, t\right) \Big|_{t=0} = F_{II}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} F_{zpl}^+(0) - \frac{1}{4} F_{zpl}^-(0).$$
(11)

Для наближеного обчислення  $V(r, t)$  скористаємось відповідною формулою методу перерізів

$$V(r, t) \approx (4r^4 - 5r^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3} r^2 (1 - r^2) V\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3} r^2 (4r^2 - 1) V_{zpl}(t).$$

Наближений розв'язок  $T(r, t)$  в довільній точці отримуємо підстановкою в (5) отриманого виразу для  $V(r, t)$  із врахуванням (8) та для  $U(r, t)$  відповідно до (6):

$$T(r, t) = U(r, t) + V(r, t) \approx \frac{r+1}{2} F_{zpl}^+(t) - \frac{r-1}{2} F_{zpl}^-(t) +$$

$$+ (4r^4 - 5r^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3} r^2 (1 - r^2) V\left(\frac{1}{2}, t\right).$$
(12)

Проілюструємо процес знаходження розв'язків рівняння (2) з такими параметрами:

$$a_1(r_1) = \frac{B_2 r_1 (A_0 + A_1 r_1 - A_2 r_1^2)}{4r_1 A_2 - A_1}, \quad b_1(r_1) = \frac{B_2 (A_0 + A_1 r_1 - A_2 r_1^2)}{4r_1 A_2 - A_1},$$
(13)

$$q_1 \equiv 1, \quad f(t) = B_1 e^{-B_1 t}.$$

Граничні умови для рівняння (2) приймають вигляд

$$\begin{cases} F_{zpl}^- = 1 - e^{-B_1 t} + (A_0 + A_1 R_1 - A_2 R_1^2) e^{-B_1 t}; \\ F_{zpl}^+ = 1 - e^{-B_1 t} + (A_0 + A_1 R_2 - A_2 R_2^2) e^{-B_1 t}, \end{cases}$$
(14)

а початкова умова

$$F_{II} = A_0 + A_1 r_1 - A_2 r_1^2.$$
(15)

Задача (2) із зазначеними вище параметрами має аналітичний розв'язок

$$T(r_1, t) = 1 - e^{-B_1 t} + (A_0 + A_1 r_1 - A_2 r_1^2) e^{-B_1 t}.$$
(16)

Розв'язування. Вводимо нову змінну  $r$  так, щоб ця координата змінювалася в межах  $[-1, 1]$ :

$$r = 1 + \frac{2(r_1 - R_2)}{R_2 - R_1}. \quad (17)$$

Звідси

$$r_1 = \frac{1}{2}(r(R_2 - R_1) + R_1 + R_2). \quad (18)$$

Тоді коефіцієнти  $a(r)$  та  $b(r)$  рівняння (4) відносно змінної  $r$  запишуться

$$a(r) = \frac{4}{(R_2 - R_1)^2} a_1(r_1), \quad b(r) = \frac{2}{R_2 - R_1} b_1(r_1), \quad (19)$$

де  $a_1(r)$  та  $b_1(r)$  визначаються за виразами (13), у яких замість змінної  $r_1$  покладені її значення (18).

Вирази для обчислення значень  $z(0,t)$  та  $z\left(\frac{1}{2}, t\right)$  системи (10)

мають вигляд

$$z(0,t) = B_2 e^{-B_2 t} \frac{A_0 + \frac{1}{2} A_1 (R_1 + R_2) - \frac{1}{4} A_2 (R_1 + R_2)^2}{2A_2 (R_1 + R_2) - A_1} [A_1 - A_2 (R_1 + R_2)] +$$

$$+ B_2 e^{-B_2 t} \left[ A_0 + \frac{1}{2} A_1 (R_1 + R_2) - \frac{1}{2} A_2 (R_1^2 + R_2^2) \right]$$

та

$$z\left(\frac{1}{2}, t\right) =$$

$$= B_2 e^{-B_2 t} \frac{A_0 + \frac{1}{4} A_1 (R_1 + 3R_2) - \frac{1}{4} A_2 \left(\frac{1}{2} R_1 + \frac{3}{2} R_2\right)^2}{A_2 (R_1 + 3R_2) - A_1} [A_1 - A_2 (R_1 + R_2)] +$$

$$+ B_2 e^{-B_2 t} \left[ A_0 + \frac{1}{4} A_1 (R_1 + 3R_2) - \frac{1}{4} A_2 (R_1^2 + 3R_2^2) \right]$$

відповідно.

Маючи розв'язок системи (10) в  $V(0,t)$  и  $V\left(\frac{1}{2}, t\right)$ , можна визначити, згідно (12), значення  $T(r,t)$  в довільній точці.

Наближений розв'язок задачі в довільній точці  $T(r_1,t)$  отримаємо, перейшовши до координати  $r_1 \in [R_1, R_2]$  за формулою (18).

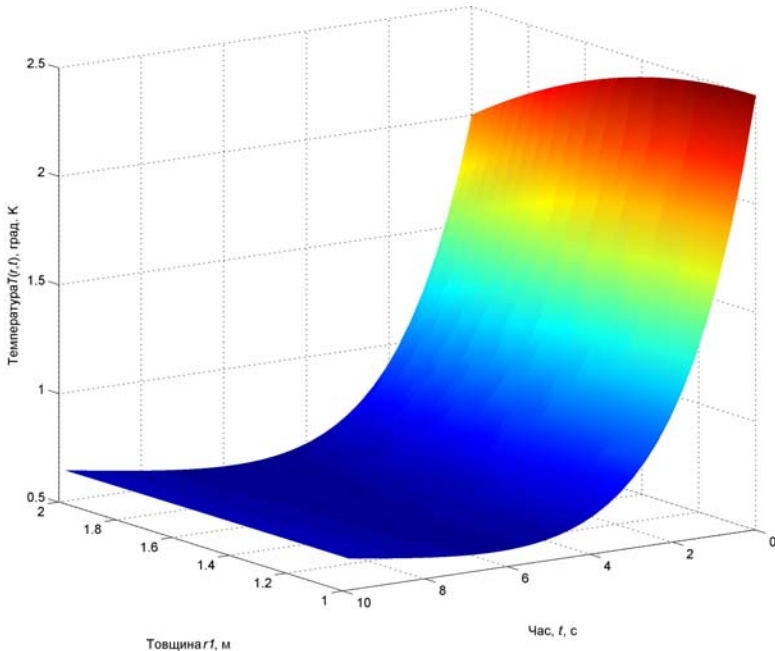
**Обчислювальні експерименти.** Для різних значень кроку дискретизації  $\tau_0 = 10^{-4}$  с,  $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$  с, ( $i = \overline{1..1000}$ ) часової змінної  $t \in [0, 10]$  задаємо наступні значення коефіцієнтів:  $A_0 = 2$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0,5$ ,  $B_1 = 0,1$ ,  $B_2 = 0,5$ . Тоді  $a(0) = \frac{57}{16}$ ,  $a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{497}{160}$ ,  $b\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{71}{80}$ ,  $r_1 \in [1, 2]$ .

За просторовою координатою крок дорівнює 0,01. Система (10) з початковими умовами (11) розв'язувалась чисельно за допомогою стандартного розв'язувача в середовищі Matlab. Отримані результати використовуються для обчислення значень розв'язку згідно (12) за довільних значень аргументів.

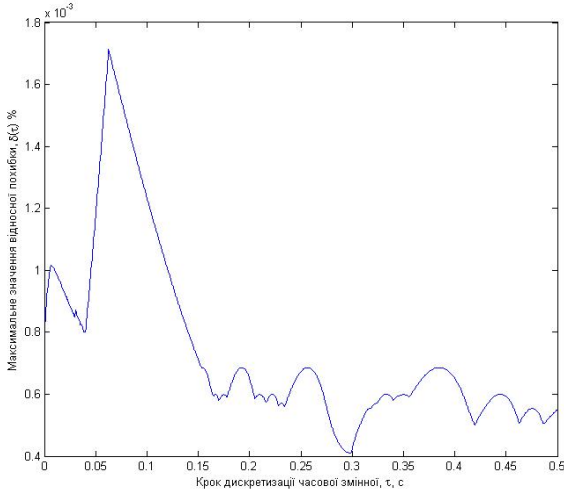
Результат розв'язування задачі при кроці дискретизації часової змінної  $\tau = 0,2985$  с представлений на рис. 2. Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку

$$\delta(\tau) = \max_r \left( \max_t [T(r, t)] \right)$$

від кроку дискретизації  $\tau$  наведена на рис. 3.



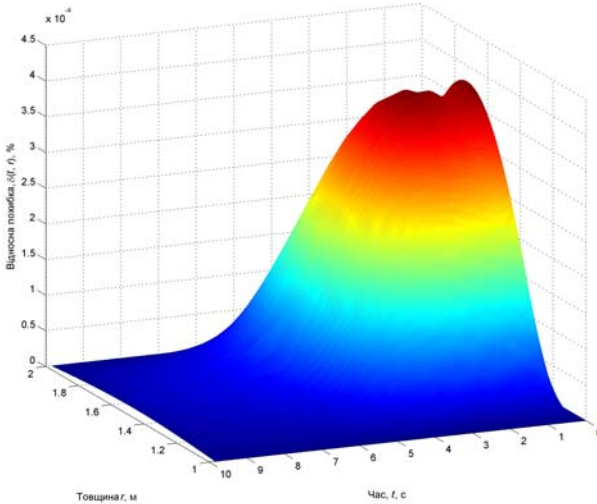
**Рис. 2.** Графік залежності температури від просторової координати і часу



**Рис. 3.** Графік залежності максимального значення відносної похибки розв'язку від кроку дискретизації

Результати обчислювальних експериментів засвідчили, що при кроці  $\tau = 0,2985$  с отримано найменше значення відносної похибки  $\delta = 0,00041$ .

Залежність  $\delta(t, r)$  при цьому ж кроці дискретизації приведена на рис. 4.



**Рис. 4.** Графік залежності відносної похибки розв'язку від просторової і часової координат



**Висновки.** Запропонований метод числової реалізації математичної моделі нестационарного теплового процесу за наявності несиметричних граничних умов дозволяє значно спростити обчислення у порівнянні із традиційними методами, володіючи при цьому достатньою для інженерних розрахунків точністю (відносна похибка в обчислювальному експерименті не перевищує 0,00041%).

#### Список використаних джерел:

1. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.
3. Методы определения теплопроводности и температуропроводности / [А. Г. Шашков, Г. М. Волохов, Т. Н. Абраменко, В. П. Козлов] ; под ред. А. В. Лыкова. — М. : Энергия, 1973. — 336 с.
4. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. — М. : Наука, 1978. — 592 с.
5. Верлань А. Ф. Компьютерное моделирование процессов передачи тепла в перспективных базовых несущих конструкциях стоечного типа с тепловыми трубами / А. Ф. Верлань, И. О. Горошко, Ю. Е. Николаенко // Математичні машини і системи. — 2008. — № 2. — С. 90–99.
6. Федорчук В. А. Дослідження динаміки нестационарних теплових процесів із симетричними граничними умовами методом перерізів / В. А. Федорчук, О. І. Махович // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки : зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 182–191.

The article deals with the method in which asymmetric boundary conditions are reduced to symmetric by replacing the variables. Approximation method of solution of non-stationary boundary heat conduction problem with symmetric boundary conditions by Lagrange polynomial interpolation in three spatial coordinates of the reference points is used. Approximate solution of two of these points is a solution of differential equations, and the third point on the boundary of the object is selected and corresponding boundary condition is used as the value. The applied methods have enabled to simplify computing algorithm provided that acceptable accuracy of solution.

**Key words:** *simulation of thermal process, asymmetric boundary conditions, numerical implementation, approximation.*

Отримано: 11.09.2014