УДК 519.21

К. В. Косаревич, асистент

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ФОРМУ «ВИПРАВЛЕНОЇ» РІВНОВАГИ ЗА НЕШОМ У ГРІ З ВИПАДКОВИМИ СТРАТЕГІЯМИ ДЛЯ КЛАСУ КВАДРАТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВИТРАТ

Запропоновано дві некласичні моделі кількісної конкуренції в умовах дуополії з випадковими стратегіями та квадратичними витратами виробників. Введено поняття «виправленої» рівноваги за Нешом. Виділено клас розподілів випадкових випусків, який гарантує існування «виправленої» рівноваги за Нешом в побудованих моделях. Знайдено в явному вигляді формули для обчислення рівноваги, зокрема, у випадках показникового та рівномірного розподілів випадкових стратегій.

Ключові слова: *кількісна конкуренція, випадкова стратегія, «виправлена» рівновага за Нешом.*

1. Вступ. У статті розглядаються деякі некласичні моделі кількісної конкуренції виробників-дуополістів. Проблемі існування та форми ринкової рівноваги у випадку детермінованих випусків виробників, розв'язаній, зокрема, в концепції рівноваги за Нешом [1], присвячено чимало фундаментальних праць [2–3]. Виробники, котрі функціонують на ринку протягом тривалого часу і мають досвід планування, дійсно можуть використовувати при конкуренції детерміновані стратегії, проте часто прийняття управлінських рішень супроводжується відсутністю точної, достовірної інформації, а отже, невизначеністю [4]. Ті виробники, котрі тільки з'являються на ринку, характеризуються невпевненістю щодо попиту на товар, а отже, і щодо власного оптимального обсягу випуску.

Питання про існування та форму ринкової рівноваги за випадкових випусків виробників залишається на даний час відкритим. З огляду на це, в даній статті буде розглянуто механізм пошуку ситуацій ринкової рівноваги в некласичних моделях дуополії з випадковими стратегіями. Дослідження проводитимуться в класі квадратичних функцій витрат.

2. Дуополія з однією випадковою стратегією та квадратичними витратами. Нехай деякий однорідний продукт виробляють два підприємства, причому одне з них виходить на ринок вперше і, відповідно, використовує при кількісній конкуренції випадкову стратегію, а інше підприємство — детерміновану стратегію. Нехай обсяг випуску «новачка» q_1 є випадковою величиною зі щільністю розподілу $f(x;\lambda)$, де $\lambda > 0$ — змінний параметр розподілу (невідомий на момент початку взаємодії виробників). Припустимо також, що функція $f(x;\lambda)$ така, що $Eq_1 < \infty$, $Eq_1^2 < \infty$, $\forall\lambda > 0$, $E(\cdot)$ — оператор математичного сподівання.

Стратегія першого виробника випадкова, тому свою функцію виграшу він максимізує, обираючи сподіваний обсяг випуску Eq_1, причому $Eq_1 = \int xf(x;\lambda)dx = \varphi(\lambda)$.

Конкурентну взаємодію двох виробників з випадковою стратегією одного з них представимо як гру $G_1 = (I, \{S_i\}, \{E\Pi_i(Eq_1, q_2)\}, i \in I)$, де $I = \{1,2\}$ — множина гравців, $S_i = [0;\infty)$ — множина допустимих стратегій гравця $i \in I$, $E\Pi_i(Eq_1, q_2) = E\left(q_i D^{-1}(\sum_{j\in I} q_j) - c_i(q_i) \right)$ — функція виграшу (сподіваний прибуток) гравця $i \in I$.

Відповідні задачі оптимізації набудуть вигляду:

- $E(q_1 D^{-1}(\sum_{j\in I} q_j) - c_1(q_1)) \to \max\limits_{Eq_1 \in S_1}$ для першого виробника;
- $E(q_2 D^{-1}(\sum_{s\in I} q_s) - c_2(q_2)) \to \max\limits_{q_2 \in S_2}$ для другого виробника.

Означення 1. «Виправленою» рівновагою за Нешом в грі G_1 з випадковою стратегією одного гравця називатимемо набір $q^* = \left((Eq_1)^*, (q_2)^*\right)$ сподіваного випуску першого виробника та випуску другого виробника такий, що

$$E\Pi_1(q^*) \ge E\Pi_1(Eq_1, (q_2)^*),\ \forall Eq_1 \ge 0,$$
$$E\Pi_2(q^*) \ge E\Pi_2((Eq_1)^*, q_2),\ \forall q_2 \ge 0.$$

Нехай обернена функція попиту є лінійною, тобто $D^{-1}(\sum_{i\in I} q_i) = a - b\sum_{i\in I} q_i$, де $a > 0$ — потенціал ринку, $b > 0$ — показник еластичності попиту на ринку.

Тоді сподіваний випуск першого виробника становить $E\Pi_1(Eq_1, q_2) = aEq_1 - bEq_1^2 - bq_2Eq_1 - E(c_1(q_1))$, де $Eq_1^2 = \psi(\lambda)$. В силу функціональної залежності між λ та Eq_1, отримаємо $Eq_1^2 = \psi(Eq_1)$, $E\Pi_1(Eq_1, q_2) = aEq_1 - b\psi(Eq_1) - bq_2Eq_1 - E(c_1(q_1))$ Використовуючи детерміновану стратегію, другий виробник максимізує свій сподіваний прибуток $E\Pi_2(Eq_1, q_2) = aq_2 - bq_2Eq_1 - bq_2^2 - E(c_2(q_2))$. Обидва виробники максимізують власний сподіваний прибуток при фіксованому рівні випуску конкурента. Таким чином, отримаємо задачу $\max_{Eq_1 \in S_1} E\Pi_1(Eq_1, (q_2)^*)$ для першого виробника та задачу $\max_{q_2 \in S_2} E\Pi_2((Eq_1)^*, q_2)$ для другого виробника.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

$$c_i(q_i) = c_1 q_i^2 + c_2 q_i + c_3, \ \forall i \in I;$$

$$\psi(Eq_1) = k_1 (Eq_1)^2 + k_2 Eq_1 + k_3.$$

Тоді при $k_1 > \dfrac{b^2}{4(b+c_1)^2}$ та $k_2 \le \dfrac{(a-c_2)(b+2c_1)}{2(b+c_1)^2}$ набір

$$(Eq_1)^* = \frac{(a-c_2)(b+2c_1) - 2k_2(b+c_1)^2}{4k_1(b+c_1)^2 - b^2},$$

$$(q_2)^* = \frac{(a-c_2)(2k_1(b+c_1)-b) + bk_2(b+c_1)}{4k_1(b+c_1)^2 - b^2}$$

є «виправленою» рівновагою за Нешом в грі G_1 з випадковою стратегією одного гравця.

Доведення. В силу умов (1)–(2) теореми функції виграшу

$$E\Pi_1(Eq_1, q_2) = (a-c_2)Eq_1 - bq_2 Eq_1 - (b+c_1)k_1(Eq_1)^2 - (b+c_1)k_3$$

$$-(b+c_1)k_2 Eq_1, \quad E\Pi_2(Eq_1, q_2) = (a-c_2)q_2 - bq_2 Eq_1 - (b+c_1)q_2^2 - c_3$$

є опуклими по змінних Eq_1 та q_2 відповідно. Умови оптимальності для задач максимізації сподіваних прибутків виробників мають вигляд: $\dfrac{\partial\left(E\Pi_1\left(Eq_1, (q_2)^*\right)\right)}{\partial(Eq_1)} = 0$ в точці $Eq_1 = (Eq_1)^*$, $\dfrac{\partial\left(E\Pi_2\left((Eq_1)^*, q_2\right)\right)}{\partial q_2} = 0$ в точці $q_2 = (q_2)^*$. Звідси отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a - c_2 - bq_2 - 2k_1(b+c_1)Eq_1 - k_2(b+c_1) = 0; \\ a - c_2 - bEq_1 - 2(b+c_1)q_2 = 0, \end{cases}$$

розв'язок якої є шуканою «виправленою» рівновагою за Нешом в грі G_1 з випадковою стратегією одного гравця.

Зауваження 1. Умови $k_1 > \dfrac{b^2}{4(b+c_1)^2}$ та $k_2 \le \dfrac{(a-c_2)(b+2c_1)}{2(b+c_1)^2}$ гарантують невід'ємність рівноважних сподіваних випусків.

Твердження 1 (про «виправлену» рівновагу за Нешом у випадку розподілу, зосередженого на $[0;\infty)$). Нехай у грі G_1 випадкова величина q_1 має показниковий розподіл із змінним параметром $\lambda > 0$. Тоді набір

$$(Eq_1)^* = \frac{(a-c_2)(b+2c_1)}{8(b+c_1)^2 - b^2},\ (q_2)^* = \frac{(a-c_2)(4(b+c_1)-b)+2b(b+c_1)}{8(b+c_1)^2 - b^2}$$

є «виправленою» рівновагою за Нешом в грі G_1 з показниковим розподілом випадкового випуску одного виробника.

Доведення. Дійсно, в даному випадку $Eq_1 = \frac{1}{\lambda}$, $Eq_1^2 = \frac{2}{\lambda^2}$. В силу $\lambda = \frac{1}{Eq_1}$, маємо $\psi(Eq_1) = 2(Eq_1)^2$, тобто $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 0$. Звідси, використовуючи теорему 1, отримуємо шукану «виправлену» рівновагу за Нешом.

Твердження 2 (про «виправлену» рівновагу за Нешом у випадку розподілу, зосередженого на скінченному відрізку). Нехай у грі G_1 випадкова величина q_1 має рівномірний розподіл на відрізку $[\alpha, \beta]$ із змінною верхньою межею $\beta > \alpha > 0$, $\alpha = const$. Тоді набір

$$(Eq_1)^* = \frac{3(a-c_2)(b+2c_1) - 4\alpha(b+c_1)^2}{16(b+c_1)^2 - 3b^2},$$

$$(q_2)^* = \frac{(a-c_2)(2k_1(b+c_1)-b)+bk_2(b+c_1)}{4k_1(b+c_1)^2 - b^2}$$

є «виправленою» рівновагою за Нешом в грі G_1 з рівномірним розподілом випадкового випуску одного виробника.

Доведення. В силу $Eq_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $Eq_1^2 = \frac{(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta}{3}$ та $\beta = 2Eq_1 - \alpha$, отримуємо $\psi(Eq_1) = \frac{4(Eq_1)^2 - 2\alpha Eq_1 + \alpha^2}{3}$, звідки $k_1 = \frac{4}{3}$, $k_2 = \frac{-2\alpha}{3}$, $k_3 = \alpha^2$. Таким чином, використовуючи теорему 1, отримуємо шукану «виправлену» рівновагу за Нешом для випадку, що розглядається.

3. Дуополія з випадковими стратегіями обох виробників та квадратичними витратами. Розглянемо тепер ситуацію на ринку, в якій стратегії обох виробників випадкові. Нехай обсяги випусків q_1 та q_2 є незалежними випадковими величинами зі щільностями розподілів $f_i(x_i;\lambda_i)$, де $\lambda_i > 0$ — змінні параметри розподілів (невідомі на момент початку взаємодії виробників). Нехай, як і раніше, функції $f_i(x_i;\lambda_i)$ такі, що $Eq_i < \infty$, $Eq_i^2 < \infty$, $\forall \lambda_i > 0$.

Конкурентну взаємодію двох виробників з випадковими стратегіями представимо як гру $G_2 = (I, \{S_i\}, \{E\Pi_i(Eq_1, Eq_2)\}, i \in I)$.

Задача оптимізації для виробника $i \in I$ має вигляд:

$$E(q_i D^{-1}(\sum_{j \in I} q_j) - c_i(q_i)) \to \max_{Eq_i \in S_i}.$$

Означення 2. «Виправленою» рівновагою за Нешом в грі G_2 з випадковими старатегіями обох гравців називатимемо набір $q^* = \left((Eq_1)^*, (Eq_2)^*\right)$ сподіваних випусків виробників такий, що

$$E\Pi_1(q^*) \ge E\Pi_1(Eq_1, (Eq_2)^*), \ \forall Eq_1 \ge 0,$$

$$E\Pi_2(q^*) \ge E\Pi_2((Eq_1)^*, Eq_2), \ \forall Eq_2 \ge 0.$$

При лінійній оберненій функції попиту сподіваний випуск виробника $i \in I$ становить

$$E\Pi_i(Eq_1, q_2) = aEq_i - bEq_i^2 - bEq_i Eq_j - E(c_i(q_i)), \ \ j \in I, \ j \ne i,$$

де $Eq_i^2 = \psi_i(\lambda_i) = \psi_i(Eq_i)$. Отже, задача максимізації виробником $i \in I$ його сподіваного прибутку при фіксованому рівні випуску конкурента має вигляд $\max\limits_{Eq_i \in S_i} E\Pi_i(Eq_i, (Eq_j)^*)$, $j \in I$, $j \ne i$, де

$$E\Pi_i(Eq_1, q_2) = aEq_i - b\psi_i(Eq_i) - bEq_i Eq_j - E(c_i(q_i)).$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

(1) $c_i(q_i) = c_1 q_i^2 + c_2 q_i + c_3$, $\forall i \in I$;

(2) $\psi_i(Eq_i) = k_1^{(i)}(Eq_i)^2 + k_2^{(i)} Eq_i + k_3^{(i)}$.

Тоді при $k_1^{(1)} k_1^{(2)} < \dfrac{b^2}{4(b+c_1)^2}$ набір

$$(Eq_1)^* = \frac{b\left((a-c_2)-(b+c_1)k_2^{(2)}\right) - 2(b+c_1)k_1^{(2)}\left((a-c_2)-(b+c_1)k_2^{(1)}\right)}{b^2 - 4(b+c_1)^2 k_1^{(1)} k_1^{(2)}};$$

$$(Eq_2)^* = \frac{b\left((a-c_2)-(b+c_1)k_2^{(1)}\right) - 2(b+c_1)k_1^{(1)}\left((a-c_2)-(b+c_1)k_2^{(2)}\right)}{b^2 - 4(b+c_1)^2 k_1^{(1)} k_1^{(2)}}$$

є «виправленою» рівновагою за Нешом в грі G_2 з випадковими стратегіями обох гравців.

Наслідок. Якщо випадкові величини q_1 та q_2 однаково розподілені, то «виправлена» рівновага за Нешом в грі G_2 з випадковими стратегіями обох гравців набуває вигляду

$$(Eq_1)^* = (Eq_2)^* = \frac{(a-c_2)-(b+c_1)k_2}{b+2(b+c_1)k_1}.$$

Висновки. У зв'язку з наявністю ситуації невизначеності при прийнятті управлінських рішень виникає необхідність створення нових некласичних моделей ринкової взаємодії виробників з випадковими випусками. Запропонований в статті ймовірнісний підхід до дослідження ринкової рівноваги в умовах дуополії може бути поширений також на випадок олігополії з довільною скінченною кількістю виробників, тому передбачає подальше дослідження. Знайдені формули можуть бути використані при прийнятті оптимальних рішень в умовах невизначеності.

Список використаних джерел:

1. Nash J. F. Noncooperative games / J. F. Nash // Ann. Math. — 1951. — № 45. — P. 286–295.
2. фон Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, Э. Моргенштерн. — М. : Наука, 1970. — 708 с.
3. Мулен Э. Теория игр с примерами / Э. Мулен. — М. : Мир, 1985. — 200 с.
4. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений / О. И. Ларичев. — М. : Логос, 2000. — 296 с.

Two nonclassical models of the quantitative competition under the conditions of duopoly with random strategies and quadratic costs of producers were proposed. The concept of «corrected» Nash equilibrium was introduced. The class of distributions of random quantities of manufacturer's production, which guarantees the existence of «corrected» Nash equilibrium in built models, was allocated. Formulas for the calculation of the equilibrium were found in an explicit form, in particular in cases of exponential and uniform distributions of random strategies.

Key words: *quantitative competition, random strategy, «corrected» Nash equilibrium.*

Отримано: 10.07.2014