УДК 519.718:519.217:519.837:517.929

В. І. Мусурівський, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО ПРОБЛЕМУ СТІЙКОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ МАРКОВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА СКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглянуто проблему стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченним запізненням при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Ключові слова: *диференціально-функціональні рівняння, системи випадкової структури, імпульсні марковські збурення, скінчене запізнення.*

Вступ. Проблеми стійкості і стабілізації математичних моделей імпульсних динамічних систем випадкової структури із скінченною післядією при наявності зовнішніх та внутрішніх марковских параметрів розглянуті в роботах [1–4].

У цій статті розглянута проблема побудови системи, яка описується стохастичними диферецiально-функціональними рівняннями з імпульсними марковскими збуреннями (зовнішніми і внутрішніми), будучи системою випадкової структури із скінченним запізненням (СВСЗ), при наявності перехідного процесу і запізнення одночасно. СВСЗ повинна володіти властивістю асимптотичної стійкості за ймовірністю і забезпечувати наперед задану оптимальність перехідного процесу. Побудова подібної динамічної системи вирішується за рахунок вибору керування, що працює за законом зворотного зв'язку.

1. Постановка задачі про оптимальну стабілізацію. Нехай заданий імовірнісний базис $\left(\Omega, F, \left\{F_t, t \geq 0\right\}, P\right)$ [6], [7]. Маємо: феллерівський марковський процес $\{\xi(t), t \geq 0\}$ зі значеннями в метричному просторі Y із перехідною ймовірністю $P(s, y, t, \Gamma)$; феллерівський ланцюг Маркова $\left\{\eta_k, k \geq 0\right\}$ зі значеннями в метричному просторі H з перехідною ймовірністю на k -ому кроці $P_k(h, G)$ [8].

Нехай випадковий процес $x(t) \in R^m$ динамічної системи зі скінченним запізненням описується диференціально-функціональним рівнянням (ДФР) [5], [9–10], [3–4],

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), x_t, u)dt + b(t, \xi(t), x(t), x_t, u)dw(t) \qquad (1)$$

з імпульсними зовнішніми марковськими збуреннями

$$\Delta\, x(t)\Big|_{t=t_k} = g\left(t_k -, \xi(t_k -), x_{t_k -}, \eta_k\right), \qquad (2)$$

де $t_k \in S \equiv \{t_n \Uparrow,\ n \in N\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, і з початковою умовою

$$x_{t_0} = z_0 \in D\,,\ \xi(t_0) = y \in Y\,,\ \eta_{k_0} = h \in H\,. \qquad (3)$$

Асимптотика розв'язку $x \equiv x(t) \in R^m$ СВСЗ розглядається відносно нульового розв'язку $x(t) \equiv 0;\ \ \forall\, t \ge t_0 \ge 0$, $x_t \equiv \{x(t+\theta)\}$, $-\tau \le \theta \le 0$, $\tau > 0$, $D \equiv D\left([-\tau, 0], R^m\right)$ — простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [2]. $w(t)$ — вінерівський процес. Величина $u \equiv u(t, y, x_t, h) \in R^r$ — r-мірне керування [3].

Випадкова внутрішня зміна структури динамічної системи може викликатися:

- скалярним чисто розривним марковським процесом $\xi(t) \in R^1$, що допускає розклад:

$$P\{\xi(t+\Delta t) \in (\beta, \beta+\Delta\beta) \big| \xi(t) = \alpha \ne \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t)\,, \quad (4)$$

$$P\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau = t + \Delta t \big| \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t)\,, \qquad (5)$$

де $\alpha, \beta \in Y = [\eta_1, \eta_2]$, $o(\Delta t)$ — нескінченно мала величина відносно Δt, а $p(t, \alpha, \beta)$ і $p(t, \alpha)$ — задані функції [8];

- простим марковським (неперервним) ланцюгом $\xi(t)$ із скінченним числом станів $Y = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ і відомих параметрів $\{q_{ij}\} : q_i = \sum\limits_{j \ne i} q_{ij}$, при цьому

$$P\left\{\xi(t+\Delta t) = y_j \,\Big|\, \xi(t) = y_i \ne y_j\right\} = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t)\,,\ i, j = \overline{1, k}\,. \qquad (6)$$

Оскільки для системи (1)–(3) досліджується тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$, то права частина цієї системи задовольняє умовам

$$\begin{gathered} \left|a(t, y, 0, z, u)\right| \equiv 0;\ \left|b(t, y, 0, z, u)\right| \equiv 0,\ \left|g(t, y, 0, h)\right| \equiv 0, \\ \forall t \ge t_0 \ge 0,\ \forall y \in Y,\ \forall h \in H. \end{gathered} \qquad (7)$$

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних функціонали

$$a:\ R_+ \times Y \times R^m \times D \times R^r \to R^m\,,\ b:\ R_+ \times Y \times R^m \times D \times R^r \to R^m\,,$$

$$g:\ R_+ \times Y \times R^m \times H \to R^m\,,$$

задовольняють умову Ліпшіца для $\forall\, x^1, x^2 \in R^m$, $\forall\, z^1, z^2 \in D$ рівномірно за всіма іншими аргументами для $\forall t \ge t_0 \ge 0$, $\forall y \in Y$, $\forall h \in H$, $\forall u \in R^r$:

$$\begin{gathered}\left|a\left(t,y,x^1,z^1,u\right)-a\left(t,y,x^2,z^2,u\right)\right|+\left|b\left(t,y,x^1,z^1,u\right)-b\left(t,y,x^1,z^2,u\right)\right|+\\ +\left|g\left(t,y,x^1,h\right)-g\left(t,y,x^2,h\right)\right|\le\Lambda\left(\left|x^1-x^2\right|+\left|z^1-z^2\right|\right),\end{gathered}\tag{8_1}$$

і умову рівномірної обмеженості

$$\sup_{\substack{t\ge0,\, y\in Y,\\ h\in H}}\left(\left|a(t,y,x,x_t,u)\right|+\left|b(t,y,x,x_t,u)\right|+\left|g(t,y,x,h)\right|\right)=\gamma<+\infty,\ \gamma>0\,. \tag{8_2}$$

Передбачається виконання умови про неперервність $u(t,y,z,h)$ за $t,\ z$ для кожного фіксованого $\xi(t)=y\in Y$ і $\eta_k=h\in H$ в області

$$t\ge0\,,\ z\in D\,,\ y\in Y\ ,\ h\in H\,. \tag{9}$$

Означення 1. Випадковий процес $x\equiv x(t,\omega)\in R^m$ назвемо сильним розв'язком задачі Коші (1), (3) з імпульсними збуреннями (2), якщо:

1) $x(t)\in R^m$ погоджений з потоком σ -алгебр $\left\{F_t,\, t\ge t_0\ge0\right\}$, $F_t\subset F$;
2) для всіх $s\in[t_k,t_{k+1})$, $t\in(s,t_{k+1})$, $t_k\ge t_0$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$\begin{gathered}x(t)=x(s)+\int_s^t\left[a\left(\tau,\xi(\tau),x(\tau),x_\tau,u(\tau)\right)\right]d\tau+\\ +\int_s^t b\left(\tau,\xi(\tau),x(\tau),x_\tau,u(\tau)\right)dw(\tau);\end{gathered}\tag{10}$$

3) при цьому

$$x(t_k)=x(t_k-)+g\left(t_k-,\xi(t_k-),x_{t_k-},\eta_k\right),\ \forall\ t_k\ge t_0\ge0\,. \tag{11}$$

Вищевизначені умови на відображення a і g гарантують існування сильного розв'язку задачі (1)–(3) згідно означення 1 із точністю до стохастичної еквівалентності при $\forall t_0\ge0$, $x\in R^m$, $u\in R^r$ і заданих реалізаціях марковських ланцюгів $\{\xi\left(t\right),\ t\ge t_0\}\subset Y$ і $\{\eta_k,\ k\ge k_0\}\subset H$ [1], [10]. Оскільки $x(t)\in R^m$ однозначно визначається за допомогою початкових даних (3), тому його зручно позначати $x(t,t_0,y,z,h)$.

Отже, ДФР (1), марковський процес { $\xi(t)$, η_k }, і початкові умови (3) визначають при будь-якому керуванні [8] $u\equiv u(t,\xi(t),x_t,\eta_k)$

$(n+2)$ -мірний марковский процес $(x_t, \xi(t), \eta_k)$ на прямому добутку просторів $D \otimes Y \otimes H$. При цьому $x(t) \in R^m$ характеризує стан системи в момент часу t , а $\xi(t)$ і η_k структуру, у якій перебуває система в цей же момент часу $t \in S$. Будемо припускати, що майже всі реалізації марковських процесів $\xi(t)$ і η_k, $k \geq k_0$, є постійними, а перемикання відбуваються у випадкові моменти часу $t^* = t^*(\omega)$. Далі припустимо, що на кожному випадковому інтервалі часу $t^* - h \leq t < t^*$ рух відбувається внаслідок (1) при фіксованому значенні параметра $\xi(t) \equiv y_s$, $s = t^* - h$. При цьому в момент t^* перемикання системи (1) для нового стану системи (структури) варто задати початкові умови. Як правило, початкові умови вибираються з вимог неперервного продовження траєкторії $x(t) \in R^m$, як розв'язку ДФР (1)–(3).

Для врахування розглянутих ситуацій будемо вважати, що для випадкового моменту часу t^* перемикання системи (1) (за рахунок переходу $\xi(t)$ зі стану $\xi(t^* - 0) = y_i$) у стан $\xi(t^*) = y_j$, $i \neq j$) заданий умовний закон розподілу початкового стану $x(t^*)$ для структури, що змінилася, системи [5]:

$$P\{x(t^*) \in (z, z+dz) \big| x(t^* - 0) = x\} = p_{ij}(t^*, z \big| x)dz + o(dz) . \qquad (12)$$

Природно припустити, що майже всі реалізації процесу $\{ x(t), \xi(t) \}$ неперервні справа.

2. Основні позначення і означення стійкості. Позначимо $P_k((y,h), \Gamma \times G)$ перехідну ймовірність ланцюга Маркова $\{\xi(t_k), \eta_k\}$ на k -ому кроці. Відповідно до прийнятих в теорії марковских процесів позначень імовірнісних подій [8], пов'язаних із цим ланцюгом, позначимо індексами ці ймовірності так, щоб виконувалися рівності

$$P_{y,h}^{t_k}\left(\xi(t_k) \in \Gamma, \eta_k \in G\right) = P_k\left((y,h), \Gamma \times G\right), \qquad (13)$$

при всіх $t_k \geq t_0$, $y \in Y$, $h \in H$ і борелевских $\Gamma \subset Y$, $G \subset H$.

Тепер уведемо функцію

$$\begin{aligned} &P_k\left((y,h,x), \Gamma \times G \times C\right) \equiv \\ &\equiv P_{y,h}^{t_k}(x(t_{k+1}, t_k, y, x, h) \in C; x(t_{k+1}) \in \Gamma;\ \eta_{k+1} \in G), \end{aligned} \qquad (14)$$

для $\forall\, t_k \in S \cup \{t_0\}$, $k \in N \cup \{0\}$, $x(t) \in R^m$, $y \in Y$, $h \in H$, і $C \subset R^m$, $\Gamma \subset Y$, $G \subset H$.

Означення 2. Дискретний оператор Ляпунова $Lv_k(y,x,h)$ на послідовності вимірних скалярних функцій $v_k(y,x,h) : Y \times D \times H \to R^1$,

$k \in N \cup \{0\}$ для ДФУ (1) з імпульсними збуреннями (2) визначається співвідношенням

$$Lv_k(y,x,h) \equiv \int\limits_{Y \times D \times H} P_k(y,x,h)(dz_1 \times dz \times dl) v_{k+1}(z_1,z,l) - v_k(y,x,h) . \quad (15)$$

Означення 3. Якщо $t_k = k\beta$ при $\forall\, k \in N$ і деякому $\beta > 0$, відображення a, b і g не залежать від t, марковский процес $\xi(t)$ і ланцюг ξ_k однорідні, то систему (1)–(2) назвемо автономною.

У випадку автономної системи (1), (2) індекс k функції $P_k((y,h,x), \Gamma \times G \times C)$ можна опустити і дискретний оператор Ляпунова варто визначити рівністю

$$Lv(y,x,h) \equiv \int\limits_{Y \times D \times H} P((y,x,h)\, dz_1 \times dz \times dl) v(z_1,z,l) - v(y,x,h) . \quad (16)$$

При розвитку другого методу Ляпунова для ДФУ (1) з імпульсним впливом (2) використовуються спеціальні послідовності вищезгаданих функцій $v_k(y,x,h)$, $k \in N$.

Означення 4. Функціоналом Ляпунова-Красовского системи випадкової структури (1)–(2) назвемо послідовність невід’ємних функціоналів $\{v_k(y,x,h), k \ge 0\}$, якщо:

1) при всіх $k \ge 0$, $y \in Y$, $h \in H$, $x \in D$ визначений вираз (16);

2) $$\bar{v}(r) \equiv \inf_{\substack{k \in N, y \in Y \\ h \in H, |x| \ge r}} v_k(y,x,h) \to \infty \text{; при } r \to \infty \quad (17)$$

3) $$\underline{v}(r) \equiv \sup_{\substack{k \in N, y \in Y \\ h \in H, |x| \le r}} v_k(y,x,h) \to 0 \text{; при } r \to 0 \quad (18)$$

причому $\bar{v}(r)$ і $\underline{v}(r)$ неперервні і монотонні.

Означення 5. Розв’язок $x(t)$ системи випадкової структури (1)–(3) назвемо при $\forall\, y \in Y$, $h \in H$, $u \in R^r$ і $t_0 \ge 0$:

- стійким за ймовірністю, якщо для $\forall\, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з $|z_0| < \delta$ випливає нерівність
$$P\{\sup_{t \ge t_0} |x_t(t_0,y,z,h,u)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2 ; \quad (19)$$
- асимптотично стійким за ймовірністю, якщо виконано (19), і можна вказати такі $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що для майже всіх реалізацій, що задовольняють нерівності $\sup\limits_{t \ge t_0} P|x_t(t_0,y,z,h,u)| < \delta_1$ і $|z_0| < \delta_2$, має місце співвідношення

$$\lim_{t\to+\infty} P\left|x_t(t_0, y, z, h, u)\right| = 0 \; ; \qquad (20)$$

- асимптотично стохастично стійким, якщо він стійкий за ймовірністю, і для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_1 > 0$ такий, що при всіх $\left|z_0\right| < \delta_1$,

$$\lim_{\tau\to+\infty} P\,\{\sup_{t\ge\tau}\left|x_t(t_0, y, z, h, u)\right| > \varepsilon\} = 0 \,. \qquad (21)$$

Означення 6. Розв'язок $x(t)$ системи випадкової структури (1)–(3) назвемо при $\forall\; y \in Y$; $h \in H$, $u \in R^r$, $t_0 \ge 0$, $t \ge t_0$; $z \in D$:

- p-стійким (при $p > 0$), якщо для $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з нерівності $\left|z_0\right| < \delta$ випливає нерівність

$$E\left|x_t(t_0, y, z, h, u)\right|^p < \varepsilon \; ; \qquad (22)$$

- асимптотично p-стійким (при $\text{p} > 0$), якщо вона p-стійка і існує таке $\delta_1 > 0$, що з нерівності $\left|z_0\right| < \delta_1$ випливає

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{y\in Y,\, h\in H} E\left|x_t(t_0, y, z, h, u)\right|^p = 0 \,. \qquad (23)$$

Зауваження 1. При $p = 2$ будемо мати стійкість у середньому квадратичному (l.i.m.) (22) і асимптотичну стійкість в $l.i.m.$ (23).

Означення 7. Розв'язок $x(t)$ системи випадкової структури (1)–(3) називається експоненціально p-стійким при $\forall\, \text{p} > 0$, якщо існує таке $\delta > 0$, що з $\left|z_0\right| < \delta$ випливає нерівність

$$E\left|x_t(t_0, y, z, h, u)\right|^p \le Me^{-\gamma(t-t_0)}\left|z\right|^p \,, \qquad (24)$$

при $M > 0$, $\gamma > 0$; $y \in Y$; $h \in H$, $u \in R^r$, $t_0 \ge 0$, $t \ge t_0$.

Зауваження 2. При $p = 2$ будемо мати експоненціальну стійкість в l.i.m.

3. Загальні теореми про стійкість систем випадкової структури. Для подальших викладень наведемо спочатку оцінку розв'язку задачі (1)–(2) на інтервалах (t_k, t_{k+1}) через значення розв'язку в точках t_k , $k \ge 0$ [3].

Лема 1. Нехай для $t \in [0, T]$, $y \in Y$; $h \in H$, $u \in R^r$ виконані умови нерівності Ліпшіца (8_1), нерівностей рівномірної обмеженості (8_2) і

$$\left|a(t, y, x, z, u)\right| + \left|b(t, y, x, z, u)\right| + \left|g(t, y, x, h)\right| \le \Lambda(\left|x\right| + \left|z\right|) \,. \qquad (25)$$

Тоді для розв'язку задачі Коші (1)–(3) при всіх $k \ge 0$ має місце нерівність

$$\sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} \left|x_t\right| \le \left(1+\Lambda\right) e^{\Lambda(t_{k+1}-t_k)} \left(\left|x_{t_k}\right|\right) + \gamma\left(t_{k+1}-t_k\right). \qquad (26)$$

Зауваження 3. Надалі будемо вважати, що $\gamma = 0$ в (8_2), $k_0 = 0$.

Теорема 1. Нехай:

1) $\left|t_{k+1} - t_k\right| \le \Delta,\ \Delta > 0,\ k \in N$;
2) виконана умова Ліпшіца (8_1);
3) у силу системи (1)–(3) для послідовності функціоналів Ляпунова-Красовского $\{v_k,\ k \ge 0\}$ має місце нерівність

$$(Lv_k)(y,x,h) < 0\ ,\ \forall\ k \in N\ ,\ y \in Y\ ;\ h \in H\ ,\ x \in D\ ,\ u \in R^r\ . \qquad (27)$$

Тоді система (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому.

Доведення. Позначимо через F_{t_k} — мінімальну σ-алгебру, щодо якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $[t_0, t_k]$ і η_n при $n \le k$. Тоді умовне математичне сподівання можна обчислити за формулою [8]

$$E\left\{v_{k+1}\left(\xi(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1}\right)\middle| F_{t_k}\right\} =$$
$$= \int\limits_{Y\times D\times H} P_k\left(y,x,h\right)\left(dz_1 \times dz \times dw\right) v_{k+1}(z_1, z, w)\Bigg|_{\substack{y=\xi(t_k)\\ h=\eta_k\\ x=x_{t_k}}} . \qquad (28)$$

За визначенням дискретного оператора Ляпунова-Красовского $(Lv_k)(y,x,h)$ із рівності (28), на основі нерівності (27), одержимо

$$E\left\{v_{k+1}\left(\xi(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1}\right)\middle| F_{t_k}\right\} =$$
$$= v_k\left(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k\right) + Lv_k\left(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k\right) \le \bar{v}\left(\left|x_{t_k}\right|\right). \qquad (29)$$

Внаслідок леми 1, властивостей функціонала $\bar{v}$ випливає існування умовного математичного сподівання лівої частини нерівності (29), тому що $\left|x(t_k)\right|$ при $\forall t_k \ge t_0$ внаслідок (23) обмежено константою, що пропорційна $|z|$ рівномірно за $y \in Y$; $h \in H$ і $t_0 \ge 0$, а саме

$$\left|x_{t_k}\right| \le |z|(1+\Lambda)^{k-k_0} e^{\Lambda(t_{k+1}-t_{k0})} .$$

Тепер, на підставі (28), уздовж розв'язків (1)–(3) можна записати наступну нерівність

$$(Lv_k)(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) = E\left\{v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1})\middle| F_{t_k}\right\} -$$
$$-v_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) \le -a_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) \le 0. \qquad (30)$$

Тоді при $k \in N$ виконується нерівність

$$E\left\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1}) \middle| F_{t_k}\right\} \le \nu_k\left(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k\right), \tag{31}$$

а, отже, послідовність випадкових величин $\{\nu_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k)\}$ при $k \in N$ утворить супермартингал відносно F_{t_k} [7].

Взявши математичне сподівання від обох частин нерівності (30) і просумувавши за k від $n \ge k_0$ до N, отриманий вираз запишемо

$$\begin{gathered} E\left\{\nu_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}})\right\} - E\left\{\nu_n(\xi(t_n), \eta_n, x_{t_n})\right\} = \\ = \sum_{k=n}^{N} E\left\{L\nu_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k)\right\} \le -\sum_{k=n}^{N} E\left\{a_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k)\right\} \le 0. \end{gathered} \tag{32}$$

Тому внаслідок леми 1 одержимо ланцюжок нерівностей для $\forall \varepsilon_1 > 0$

$$\begin{gathered} P\{\sup_{t \ge t_0} \left|x_t(t_0, y, x, h)\right| > \varepsilon_1\} = \\ = P\{\sup_{n \in N} \sup_{t_{k_0+n-1} \le t \le t_{k_0+n}} \left|x_t(t_0, y, x, h)\right| > \varepsilon_1\} \le \\ \le P\{\sup_{n \in N} (1+\Lambda) e^{\Lambda(t_{k_0+n-1} - t_{k_0+n})} \left|x_{t_{k_0+n-1}}(t_0, y, x, h_0)\right| > \varepsilon_1\} \le \\ \le P\{\sup_{n \in N} \left|x_{t_{k_0+n-1}}(t_0, y, x, h_0)\right| > \frac{\varepsilon_1}{(1+\Lambda)} e^{-\Lambda\Delta}\} \le \\ \le P\left\{\sup_{n \in N} \nu_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), x_{t_{k_0+n-1}}, \eta_{k_0+n-1}) \ge \bar{\nu}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right)\right\}. \end{gathered} \tag{33}$$

Якщо $\left|x_{t_k}\right| \ge r$, то на підставі (17) повинна виконуватися нерівність

$$\sup_{k \ge k_0} \nu_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) \ge \inf_{\substack{k \ge k_0,\, y \in Y \\ h \in H,\, |x| \ge r}} \nu_k(y, x, h) = \bar{\nu}(r). \tag{34}$$

Скористаємося відомою нерівністю для невід'ємних супермартингалів [7]

$$\begin{gathered} P\left\{\sup_{n \in N} \nu_{k_0+n-1}\left(\xi(t_{k_0+n-1}), x_{t_{k_0+n-1}}, \eta_{k_0+n-1}\right) \ge \bar{\nu}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right)\right\} \le \\ \le \frac{1}{\bar{\nu}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right)} \nu_{k_0}(y, x, h) \le \frac{\bar{\nu}\left(|z|\right)}{\bar{\nu}\left(\frac{\varepsilon_1}{1+\Lambda} e^{-\Lambda\Delta}\right)}. \end{gathered} \tag{35}$$

З огляду на нерівність (33), нерівність (35) дає можливість стверджувати, що виконується (19), а значить система (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому [11]. Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Нехай:
1) $\left|t_{k+1}-t_k\right| \le \Delta,\ \Delta > 0,\ k \in N$;
2) виконана умова Ліпшіца (8_1);
3) для системи (1)–(3) існують послідовності функціоналів Ляпунова-Красовского $\{v_k(y,x,h)\}$ і $\{a_k(y,x,h)\}$, $k \in N$, такі, що

$$(Lv_k)(y,x,h) \le -a_k(y,x,h) . \quad (36)$$

Тоді система (1)–(3) асимптотично стохастично стійка в цілому.

Доведення. Нерівність (32) дає оцінки

$$E\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}),x(t_{N+1}),\eta_{N+1})\} \le v_{k_0}(y,x,h) , \quad (37)$$

$$-\sum_{k=n}^{N} E\{a_k(\xi(t_k),x_{t_k},\eta_k)\} \le v_{k_0}(y,x,h) . \quad (38)$$

при всіх $N \ge k_0$, $y \in Y$; $h \in H$, $x \in D$.

Внаслідок того, що послідовність $\{a_k\}$, $k \in N$, утворить функціонала Ляпунова-Красовского, повинні існувати неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(r)$ і $\overline{a}(r)$, рівні нулю в нулі і такі, що

$$\overline{a}\left(\left|x\right|\right) \le a_k(y,x,h) \le \underline{a}\left(\left|x\right|\right),\ \forall k \in N ,\ y \in Y ;\ h \in H ,\ x \in D .$$

Отже, із збіжності ряду в лівій частині нерівності (38) випливає збіжність ряду $\sum_{k=k_0}^{\infty} E\left\{\overline{a}\left(\left|x_{t_k}(t_0,y,x,h)\right|\right)\right\}$ для $\forall t_0 \ge 0$, $y \in Y$; $h \in H$, $x \in D$. Тоді внаслідок неперервності $\underline{a}(r)$ і рівності $\underline{a}(0)=0$ маємо

$$\lim_{k\to\infty}\left|x_{t_k}(t_0,y,x,h)\right| = 0 .$$

Із вищесказаного маємо прямування до 0 за ймовірністю послідовності $\overline{v}(\left|x_{t_k}(t_0,y,x,h)\right|)$ при $k \to \infty$ для $\forall\ t_0 \ge 0$, $y \in Y$; $h \in H$, $x \in D$.

Тому із властивостей функціонала Ляпунова-Красовского маємо, що невід'ємний супермартингал $v_k(\xi(t_k),x_{t_k},\eta_k)$ при $k \to \infty$ прямує до 0 за ймовірністю на всіх реалізаціях процесу $\xi(t) \equiv \xi(t,\omega)$ і послідовності η_k . Отже, невід'ємний обмежений зверху супермартингал має границю із ймовірністю одиниця [5], [4]. Тоді, використовуючи результат леми 1, внаслідок означення 5, одержимо [11] асимптотичну стохастичну стійкість у цілому імпульсної системи (1)–(3).

Теорема 3. Нехай виконані умови 1)–3) теореми 2, причому функціонали Ляпунова-Красовского $\{v_k\}$, $\{a_k\}$, $k \ge 0$ для деяких $p > 0$ при $c_i > 0,\ i=\overline{1,4}$ і для всіх $k \in N$, $y \in Y$; $h \in H$, $z \in D$, задовольняють нерівностям

$$c_1 \left|z(0)\right|^p \le v_k(y,h,z) \le c_2 \left\|z\right\|^p , \tag{39}$$

$$c_3 \left|z(0)\right|^p \le a_k(y,h,z) \le c_4 \left\|z\right\|^p . \tag{40}$$

Тоді система (1)–(3) асимптотично p-стійка в цілому.

Доведення. Використовуючи (30) при $n = k_0$, на підставі (39), для всіх $N \ge k_0$, $k_0 \in N$, $z \in D$ і початкових розподілах випадкового вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$ можна отримати нерівність

$$\begin{aligned} E\left\{\left|x_{t_{N+1}}\right|^p\right\} &\le \frac{1}{c_1} E\left\{v_{N+1}\left(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}}\right)\right\} \le \\ &\le \frac{1}{c_1} E\left\{v_{k_0}\left(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, z\right)\right\} \le \frac{c_2}{c_1}\left\|z\right\|^p . \end{aligned} \tag{41}$$

Звідси за означенням 6 випливає p-стійкість системи (1)–(3). Використовуючи нерівності (32), (39) і (40), виконаємо оцінку зверху

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{N} E\left\{\left|x_{t_k}\right|^p\right\} &\le \frac{1}{c_3} \sum_{k=k_0}^{N} E\left\{a_k\left(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}\right)\right\} \le \\ &\le \frac{1}{c_3} E\left\{v_{k_0}\left(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, z\right)\right\} \le \frac{c_4}{c_3}\left\|z\right\|^p . \end{aligned} \tag{42}$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають $E\left\{\left|x_{t_k}\right|^p\right\}$ для довільних початкових даних $x_{t_{k_0}} = z$ і початкових розподілів випадкового вектора $\left\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\right\}$. Таким чином,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in Y,\ h\in H} E\left\{\left|x_{t_k}(t_0, y, h, z)\right|^p\right\} = 0$$

при всіх $t_0 \ge 0$, що і доводить теорему 3 [11].

Теорема 4. Нехай виконані всі умови теореми 1 і $\exists\, \Delta_1 > 0$, що

$$t_{k+1} - t_k \ge \Delta_1 ,\ \forall\, k \in N . \tag{43}$$

Тоді система (1)–(3) експоненціально p-стійка в цілому.

Доведення. Внаслідок нерівності (26) (при $\gamma = 0$) досить довести, що нерівність (24) виконана для кожного $z \in D$ при $\forall t \in S$. Дійсно, для $\forall t \in (t_k, t_{k+1})$, $k > n$, із означення (27) для k_0 випливає нерівність

$$e^{-\gamma(t_k - t_{k_0})} \le e^{-\gamma(t_k - t_0)} e^{\gamma\Delta} . \tag{44}$$

Використаємо позначення із доведення теореми 1 і доведену раніше рівність для $\forall k \in N$, $t \ge t_0 \ge 0$ і $z \in D$, $\xi(t_0) \in Y$, $\eta_{k_0} \in H$

$$E\left\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x_{t_{k+1}})\middle|F_{t_k}\right\}=$$
$$=\nu_k(\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k})+(L\nu_k)(\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k}). \tag{45}$$

З умов теореми 4 випливає нерівність

$$(L\nu_k)(y,h,z,\xi)\le -a_k(y,h,z,\xi)\le -c_3\left\|z\right\|^p\le -\frac{c_3}{c_2}\nu_k(y,h,z,\xi)$$

Тоді з (44) легко одержати оцінку зверху для умовного математичного сподівання

$$E\left\{E\left\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x_{t_{k+1}})\middle|F_{t_k}\right\}\right\}\le\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)E\left\{\nu_k(\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k})\right\}. \tag{46}$$

Нехай $k_0\ge 1$, тоді оцінка (46) для $\forall k\ge k_0$ дає нерівність

$$E\left\{E\left\{\nu_k(\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k})\middle|F_{t_k}\right\}\right\}\le\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0}E\left\{\nu_{k_0}(\xi(t_{k_0}),\eta_{k_0},x_{t_{k_0}})\right\}.$$

Звідки внаслідок умов теореми отримуємо

$$E\left\{\left|x_{t_k}(t_{k_0},y,h,z)\right|^p\right\}\le\frac{1}{c_1}E\left\{\nu\left(\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k}(t_{k_0},y,h,z)\right)\right\}\le\frac{c_2}{c_1}\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0}\left\|z\right\|^p.$$

Якщо вважати $c_2>c_3$, тоді $\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)\in(0,1)$.

Скориставшись нерівністю (44), одержуємо доведення [11].

Висновки. Доведені основні теореми стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченним запізненням при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Список використаних джерел:

1. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические функционально-дифференциальные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига : Ориентир, 1992. —328 с.
2. Королюк В. С. Устойчивость динамических систем с последействием с учетом марковских возмущений / В. С. Королюк, В. И. Мусуривский, И. В. Юрченко // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 134–146.
3. Королюк В. С. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последействием при наличии марковских параметров. Часть I / В. С. Королюк, В. И. Мусуривский, В. К. Ясинский // Проблемы управления и информатики. — 2008. — №1. — С. 16–35.
4. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп’ютерна практика : в 3-х т. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царьков, В. К. Ясинський — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — Т. 3. Випадкові процеси. Теорія та комп’ютерна практика. — 798 с.

5. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург : Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998. — 222 с.
6. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
7. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 2. — 473 с.
8. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1969. — 859 с.
9. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К. : Вища школа, 1987. — 287 с.
10. Свердан М. Л. Устойчивость стохастических импульсных систем / М. Л. Свердан, Е. Ф. Царьков. — Рига : РТУ, 1994. — 300 с.
11. Мусуривский В. И. О проблеме устойчивости систем случайной структуры с постоянным запаздыванием / В. И. Мусуривский // Проблемы управления и информатики. — 2011. — №5. — С. 5–15.

The problem of stability of stochastic differential-functional equations with impulse Markovian indignations and eventual behind. This system must be asymptotically stable by the probability and provide preassigned optimivity of a transient process.

Key words: *differential-functional equations, system odd structure, impulse Markovian indignations, eventual behind.*

Отримано: 25.03.2014

УДК 519.21

А. В. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук

Буковинський державний
фінансово-економічний університет, м. Чернівці

ОПТИМІЗАЦІЯ МНОЖИН ПОЧАТКОВИХ ЗНАЧЕНЬ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МОМЕНТНІЙ СТІЙКОСТІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Побудовано оптимальну множину початкових значень стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими лінійними стрибками розв'язків у гільбертових просторах.

Ключові слова: *гільбертовий простір, оптимальна множина початкових значень, марковський процес.*

Вступ. При оптимізації множини початкових значень різницевих та диференційованих рівнянь з марковськими коефіцієнтами можливо застосувати результати, які отримані К. Г. Валеєвим та його учнями [1].

