

For the description of surface flows initial boundary value problem of shallow water is written. Taking into account the hydraulic flow to describe groundwater flow equation is used equation of Busynesku. Given a continuous homogeneous medium water flow formulate the initial-boundary value problem coupled fluid motion on the surface of the watershed. The constructed model was tested on the test examples the convergence and stability problem is investigated taking into account the action of natural factors. Developed programs were calculated using the software package COMSOL.

Key words: *moving layer of fluid, shallow water, surface flow, underground water, piezometric pressure, coupled flow, variational problem, bilinear forms, finite element method, discretization of problem, linearization problem, coupling conditions.*

Отримано: 19.03.2014

УДК 004.021

*А. А. Верлань, канд. техн. наук,

**А. И. Махович, аспирант

* Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев,

**Каменец-Подольский национальный университет

имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЕ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе рассмотрен способ численной реализации математических моделей нестационарных тепловых процессов при наличии несимметричных граничных условий.

Ключевые слова: *модель, нестационарный тепловой процесс, несимметричные граничные условия, аппроксимация, численная реализация.*

Введение. Надежность современных технических систем в значительной степени зависит от соблюдения температурных режимов эксплуатации. Поэтому исследование процессов теплопроводности занимает существенное место в процессе их проектирования. Базовыми математическими моделями этих процессов являются дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа. Как известно, методы их решения являются трудоемкими и могут в значительной степени различаться в зависимости от граничных условий [1; 2; 4]. Для решения задач данного класса можно применить многие программные средства компьютерного моделирования (3D-MAX, ANSYS, T-FLEX, MAYA, CATI и др.), использующие,

преимущественно сеточные методы и требующие, как правило, значительных вычислительных мощностей [3; 4].

В статье предлагается численно-аналитический метод моделирования процессов теплопроводности при несимметричных граничных условиях первого и второго рода, основанный на аппроксимационном преобразовании уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача 1. Неограниченная пластина с несимметричными граничными условиями первого рода. Рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности с несимметричными граничными условиями первого рода. Температура $T(x, t)$ на границах неограниченной пластины принудительно меняется по различным законам $F_{сп1}^{\pm}(t) \equiv T(x, t)|_{x=\pm 1}$, заданным своими функциями времени (рис. 1). Внутри пластины действует источник тепла, мощность которого пропорциональна $f(t)$. В начальный момент времени имеется заданное по толщине распределение температуры $F_{HV}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необходимо найти распределение температуры в пластине.

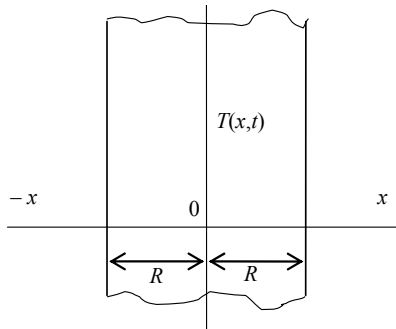


Рис. 1. Схематическое изображение объекта моделирования

Метод решения. В этом случае нестационарный тепловой процесс описывается одномерным гиперболическим уравнением теплопроводности

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) + f(t), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

где $c(x)$ — удельная теплоемкость, $\rho(x)$ — плотность, $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $f(t)$ — внутренний источник тепла, x — пространственная координата, t — время. Поскольку время релаксации τ_r теплового потока есть малая величина (для газов и металлов имеет порядок соответственно 10^{-9} с и 10^{-11} с [5]), то для многих, практически важных расчетов (при отсутствии высокоинтенсивного изменения теп-

лового потока) дополнительным слагаемым $\tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}$, учитывающим конечную скорость переноса теплоты, можно пренебречь [6]. Таким образом, упрощенная модель теплопереноса описывается уравнением в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + q(x)f(t), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

в котором коэффициент температуропроводности

$$a(x) = \frac{k(x)}{c(x)\rho(x)}, \quad b(x) = \frac{k'(x)}{c(x)\rho(x)}, \quad q(x) = \frac{1}{c(x)\rho(x)}.$$

Для приведения задачи к случаю однородных граничных условий представим искомую функцию в виде суммы

$$T(x,t) = V(x,t) + U(x,t), \quad (2)$$

где $V(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям, а

$$U(x,t) = \frac{x+1}{2} F_{ep1}^+(t) - \frac{x-1}{2} F_{ep1}^-(t) \quad (3)$$

удовлетворяет условиям $F_{ep1}^\pm(t)$.

Введение переменной $U(x,t)$ позволяет устранить несимметричность граничных условий и перейти к симметричному решению задачи методом сечений [7] относительно $V(x,t)$.

Продифференцировав (2) один раз по t и дважды по x и подставив полученные выражения в (1), с учетом (3) получим уравнение

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + z(x,t), \quad (4)$$

относительно вспомогательной переменной $V(x,t)$ с однородными граничными условиями

$$F_{ep1}(t) \equiv V(x,t)|_{x=\pm 1} = 0, \quad (5)$$

в котором

$$z(x,t) = \frac{1}{2} b(x) [F_{ep1}^+(t) - F_{ep1}^-(t)] + \frac{x-1}{2} [F_{ep1}^-(t)]' - \frac{x+1}{2} [F_{ep1}^+(t)]' + q(x)f(t).$$

Заменяя в (4), согласно методу сечений для случая симметричных граничных условий, первую производную по пространственной координате выражением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx 2x(8x^2 - 5)u(0,t) + \frac{32}{3}x(1-2x^2)u\left(\frac{1}{2},t\right) + \frac{2}{3}x(8x^2 - 1)F_{zpl}(t), \quad (6)$$

вторую производную выражением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx (48x^2 - 10)u(0,t) + \left(\frac{32}{3} - 64x^2\right)u\left(\frac{1}{2},t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{zpl}(t), \quad (7)$$

с учетом (5), имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{dV(x,t)}{dt} = & \left[a(x)(48x^2 - 10) + b(x)(16x^3 - 10x) \right] V(0,t) + \\ & + \left[a(x)\left(\frac{32}{3} - 64x^2\right) + b(x)\left(\frac{32}{3}x - \frac{64}{3}x^3\right) \right] V\left(\frac{1}{2},t\right) + z(x,t). \end{aligned} \quad (8)$$

Полагая $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, получаем систему двух обыкновенных диф-

ференциальных уравнений, определяющих величины $V(0,t)$ и $V\left(\frac{1}{2},t\right)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV(0,t)}{dt} &= -10a(0)V(0,t) + \frac{32}{3}a(0)V\left(\frac{1}{2},t\right) + z(0,t), \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} &= \left(2a\left(\frac{1}{2}\right) - 3b\left(\frac{1}{2}\right)\right)V(0,t) + \\ &+ \frac{1}{3}\left(8b\left(\frac{1}{2}\right) - 16a\left(\frac{1}{2}\right)\right)V\left(\frac{1}{2},t\right) + z\left(\frac{1}{2},t\right), \end{aligned} \right. \quad (9)$$

в которой

$$\begin{aligned} z(0,t) &= \frac{1}{2}b(0)\left[F_{zpl}^+(t) - F_{zpl}^-(t)\right] - \frac{1}{2}\left[\left(F_{zpl}^-(t)\right)' + \left(F_{zpl}^+(t)\right)'\right] + q(0)f(t), \\ z\left(\frac{1}{2},t\right) &= \frac{1}{2}b\left(\frac{1}{2}\right)\left[F_{zpl}^+(t) - F_{zpl}^-(t)\right] - \frac{1}{4}\left(F_{zpl}^-(t)\right)' - \frac{3}{4}\left(F_{zpl}^+(t)\right)' + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t). \end{aligned}$$

Начальные условия для системы (9) имеют вид:

$$\begin{aligned} V(0,t)\Big|_{t=0} &= F_{Hy}(0) - \frac{1}{2}\left(F_{zpl}^+(0) + F_{zpl}^-(0)\right), \\ V\left(\frac{1}{2},t\right)\Big|_{t=0} &= F_{Hy}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}F_{zpl}^+(0) - \frac{1}{4}F_{zpl}^-(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Для приближенного вычисления $V(x,t)$ воспользуемся соответствующей формулой метода сечений [7]:

$$V(x, t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)F_{zpl}(t).$$

Приближенное решение задачи в произвольной точке получается подстановкой в (2) полученного выражения для $V(x, t)$ с учетом (5) и для $U(x, t)$ в соответствии с (3):

$$T(x, t) = U(x, t) + V(x, t) \approx \frac{x+1}{2}F_{zpl}^+(t) - \frac{x-1}{2}F_{zpl}^-(t) + (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right). \quad (11)$$

Процесс решения рассмотрим на модельном примере конкретной задачи, для которой:

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 + a_1x - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 + a_1x - a_2x^2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad a_2 > 0, \quad (12)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1e^{-b_1t}, \quad (13)$$

$$F_{zpl}^{\pm}(t) = 1 - e^{-b_1t} + (a_0 \pm a_1 - a_2)e^{-b_2t}, \quad (14)$$

$$F_{HY}(x) = a_0 + a_1x - a_2x^2. \quad (15)$$

Задача (1), (12)–(15) имеет точное аналитическое решение

$$T(x, t) = 1 - e^{-b_1t} + (a_0 + a_1x - a_2x^2)e^{-b_2t}. \quad (16)$$

С учетом (13)–(14) система (9) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dV(0, t)}{dt} = a(0) \left[-10V(0, t) + \frac{32}{3}V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + b_2(a_0 - a_2)e^{-b_2t}, \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = a\left(\frac{1}{2}\right) \left[2V(0, t) - \frac{16}{3}V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + b_2\left(a_0 + \frac{a_1}{2} - a_2\right)e^{-b_2t}. \end{cases} \quad (17)$$

Начальные условия (10) для системы (17):

$$\begin{aligned} V(0, t) \Big|_{t=0} &= a_2, \\ V\left(\frac{1}{2}, t\right) \Big|_{t=0} &= \frac{3}{4}a_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Приближенное решение (11) задачи в произвольной точке принимает вид:

$$T(x, t) \approx 1 - e^{-b_1t} + (a_0 + a_1x - a_2)e^{-b_2t} + (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right). \quad (19)$$

Численные эксперименты. Апробация метода проведена посредством численных экспериментов для ряда значений шага дискретизации $\tau_0 = 10^{-4}$ с, $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ с, $i = 1..1000$ по временной переменной t при следующих значениях коэффициентов: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.5$. При этом $a(0) = 1$, $a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{16}$, $t \in [0, 10]$, $x \in [-1, 1]$. Для пространственной координаты был выбран шаг дискретизации 0,01.

Система (17) численно решалась с помощью стандартного решателя в среде Matlab. Полученные результаты использовались для вычисления решений для любых значений пространственной координаты и для любого момента времени согласно выражению (19).

Результат решения модельной задачи для шага $\tau = 0,2945$ с представлен на рис. 2.

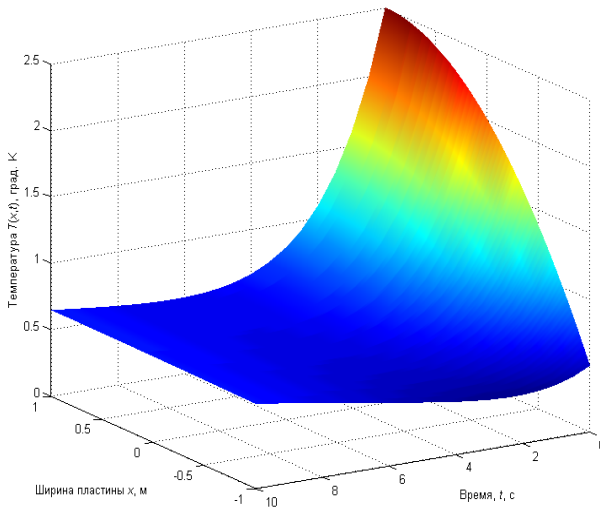


Рис. 2. График зависимости температуры от пространственной координаты и времени

В экспериментах исследовалась зависимость относительной погрешности решения от шага дискретизации. Приближенное решение задачи (1), (12)–(15) сравнивалось с точным решением (16). Зависимость максимального значения относительной погрешности решения

$$\delta(\tau) = \max_x \left(\max_t [T(x,t)] \right)$$

от шага дискретизации τ приведена на рис. 3. При шаге дискретизации $\tau = 0,2945$ с получено наименьшее значение относительной погрешности $\delta = 0,0086$. Вид функции относительной погрешности $\delta(t, x)$ при данном шаге приведен на рис. 4.

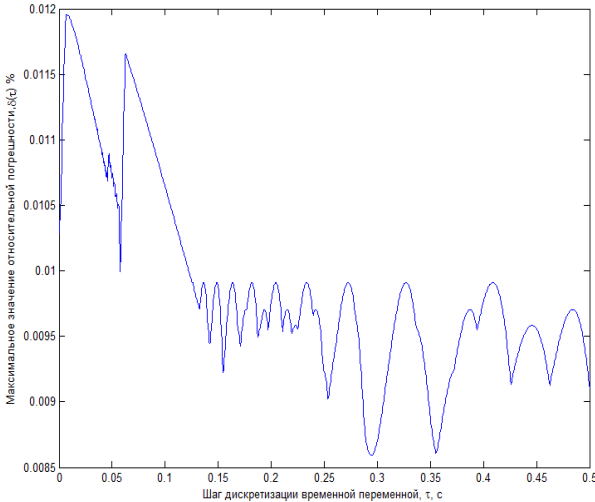


Рис. 3. График зависимости максимального значения относительной погрешности решения от шага дискретизации

Задача 2. Неограниченная пластина с несимметричными граничными условиями второго рода. Неограниченная пластина (рис. 1) с коэффициентом температуропроводности $a(x)$ нагревается с обеих сторон различными источниками с переменными во времени тепловыми потоками, заданными своими функциями времени

$$F_{sp2}^{\pm}(t) \equiv \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1}.$$

Внутри пластины действует источник тепла, мощность которого пропорциональна $f(t)$. В начальный момент времени имеется заданное по толщине распределение температуры $F_{HY}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необходимо найти распределение температуры $T(x, t)$ в пластине. Таким образом, исследуется нестационарный тепловой процесс, который, учитывая допущения, сделанные для первой задачи, описывается одномерным уравнением теплопроводности (1) с несимметричными граничными условиями второго рода.

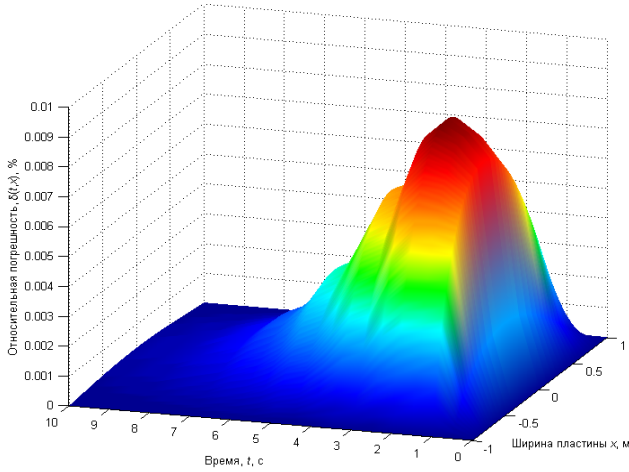


Рис. 4. График зависимости относительной погрешности решения от пространственной и временной координат

Метод решения. Перейдем к задаче с однородными граничными условиями аналогично случаю, рассмотренному в задаче 1. Представим решение $T(x, t)$ в виде суммы

$$T(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad (20)$$

где $V(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям, а

$$U(x, t) = m_1(t)x^2 + m_2(t)x. \quad (21)$$

Величины $m_1(t)$ и $m_2(t)$ выбираем такими, чтобы удовлетворялись граничные условия $F_{ep2}^{\pm}(t)$. Продифференцировав (21) по x , получим

$$m_1(t) = \frac{1}{4}(F_{ep2}^+(t) - F_{ep2}^-(t)), \quad m_2(t) = \frac{1}{2}(F_{ep2}^+(t) + F_{ep2}^-(t)). \quad (22)$$

Отсюда

$$U(x, t) = \frac{x}{4} \left[(x+2)F_{ep2}^+(t) + (2-x)F_{ep2}^-(t) \right], \quad (23)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{x}{4} \left[(x+2)[F_{ep2}^+(t)]' + (2-x)[F_{ep2}^-(t)]' \right], \quad (24)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \frac{x+1}{2} F_{ep2}^+(t) + \frac{1-x}{2} F_{ep2}^-(t), \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} (F_{ep2}^+(t) - F_{ep2}^-(t)). \quad (26)$$

Подставив (20) в (1) с учетом (24)–(26), имеем:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + z(x, t), \quad (27)$$

где

$$z(x, t) = \frac{1}{2} [a(x) + (x+1)b(x)] F_{\varepsilon p 2}^+(t) + \frac{1}{2} [(1-x)b(x) - a(x)] F_{\varepsilon p 2}^-(t) - \frac{x}{4} \left((x+2) [F_{\varepsilon p 2}^+(t)]' + (2-x) [F_{\varepsilon p 2}^-(t)]' \right) + q(x) f(t).$$

Поскольку функция $U(x, t)$ выбрана таким образом, чтобы удовлетворять граничным условиям, то уравнение (27) должно решаться с однородными граничными условиями

$$F_{\varepsilon p 2}(t) \equiv \left. \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = 0. \quad (28)$$

Заменяя в (27), согласно методу сечений для симметричных граничных условий второго рода [7], частные производные первого и второго порядка на аппроксимирующие их выражения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{64}{7} x(x^2 - 1) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7} x(8x^2 - 1) F_{\varepsilon p 2}(t),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{64}{7} (3x^2 - 1) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7} (24x^2 - 1) F_{\varepsilon p 2}(t),$$

и полагая $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих величины $V(0, t)$ и $V\left(\frac{1}{2}, t\right)$:

$$\begin{cases} \frac{dV(0, t)}{dt} = \frac{64}{7} \left(V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right) a(0) + z(0, t), \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = \frac{64}{7} \left(V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right) \left(-\frac{1}{4} a\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8} b\left(\frac{1}{2}\right) \right) + z\left(\frac{1}{2}, t\right), \end{cases} \quad (29)$$

где

$$z(0, t) = \frac{1}{2} (a(0) + b(0)) F_{\varepsilon p 2}^+(t) + \frac{1}{2} (b(0) - a(0)) F_{\varepsilon p 2}^-(t) + q(0) f(t),$$

$$z\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{1}{2} \left(a\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} b\left(\frac{1}{2}\right) \right) F_{\varepsilon p 2}^+(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} b\left(\frac{1}{2}\right) - a\left(\frac{1}{2}\right) \right) F_{\varepsilon p 2}^-(t) - \frac{1}{16} \left(5 [F_{\varepsilon p 2}^+(t)]' + 3 [F_{\varepsilon p 2}^-(t)]' \right) + q\left(\frac{1}{2}\right) f(t).$$

Для системы (29) заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} V(0, t) \Big|_{t=0} &= F_{HY}(0), \\ V\left(\frac{1}{2}, t\right) \Big|_{t=0} &= F_{HY}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16}\left(5F_{zp2}^+(0) + 3F_{zp2}^-(0)\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Воспользовавшись формулой для вычисления $V(x, t)$ согласно методу сечений для случая симметричных граничных условий второго рода

$$u(x, t) \approx \frac{16}{7}x^2(x^2 - 2)\left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] + \frac{1}{7}x^2\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)F_{zp2}(t) + u(0, t)$$

с учетом (28) и (23), получим возможность вычисления произвольных значений искомой функции:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= U(x, t) + V(x, t) \approx \frac{x}{4}\left[(x+2)F_{zp2}^+(t) + (2-x)F_{zp2}^-(t)\right] + \\ &+ \frac{16}{7}x^2(x^2 - 2)\left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] + V(0, t). \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим упрощенную конкретную задачу, в которой коэффициент теплопроводности, внутренний источник тепла и начальное распределение температуры равны соответственно

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 + a_1x - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 + a_1x - a_2x^2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad a_2 > 0, \quad (32)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1e^{-bt}, \quad (33)$$

$$F_{HY}(x) = a_0 + a_1x - a_2x^2. \quad (34)$$

а несимметричные граничные условия имеют вид

$$F_{zp2}^\pm(t) = (a_1 \pm 2a_2)e^{-b_2t}. \quad (35)$$

Задача (1),(32)–(35) имеет точное аналитическое решение

$$T(x, t) = 1 - e^{-bt} + (a_0 + a_1x - a_2x^2)e^{-b_2t}. \quad (36)$$

Система (29) приобретает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV(0, t)}{dt} &= -\frac{64}{7}a^2(0)\left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] - 2a_2a^2(0)e^{-b_2t} + b_1e^{-bt}; \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} &= -\frac{16}{7}a^2\left(\frac{1}{2}\right)\left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] + \\ &+ \left[b_2\left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4}\right) - 2a_2a^2\left(\frac{1}{2}\right)\right]e^{-b_2t} + b_1e^{-bt}. \end{aligned} \right. \quad (37)$$

Для системи (37) заданы начальные условия:

$$V(0, t) \Big|_{t=0} = V\left(\frac{1}{2}, t\right) \Big|_{t=0} = a_0. \quad (38)$$

Воспользовавшись формулой (31), получим возможность вычисления произвольных значений искомого решения:

$$T(x, t) \approx (a_1 x - a_2 x^2) e^{-b_2 t} + \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + V(0, t). \quad (39)$$

Численные эксперименты. Для различных значений шага дискретизации $\tau_0 = 10^{-4}$ с, $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ с, $i = 1..1000$ временной переменной t задаем следующие значения коэффициентов: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0,5$, $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,5$. Тогда $a^2(0) = 1$, $a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{16}$, $t \in [0, 10]$, $x \in [-1, 1]$.

По пространственной координате шаг равен 0,01. Система (37) с начальными значениями (38) численно решалась с помощью стандартного решателя в среде Matlab. Полученные результаты используются для вычисления согласно (39) значений решения при произвольных значениях аргументов.

Результат решения задачи при шаге $\tau = 0,01$ с представлен на рис. 5. Зависимость максимального значения относительной погрешности решения

$$\delta(\tau) = \max_x \left(\max_t [T(x, t)] \right)$$

от шага дискретизации τ приведена на рис. 6.

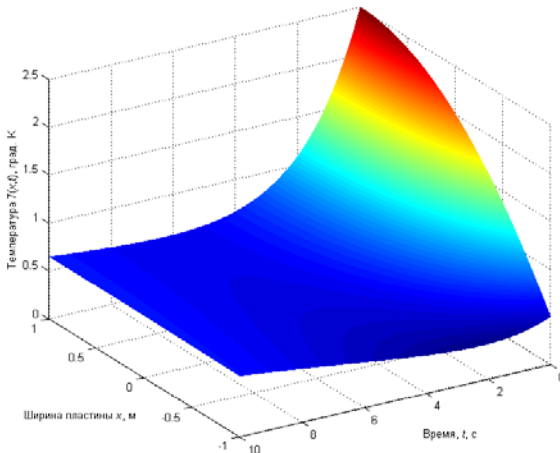


Рис. 5. График зависимости температуры от пространственной координаты и времени

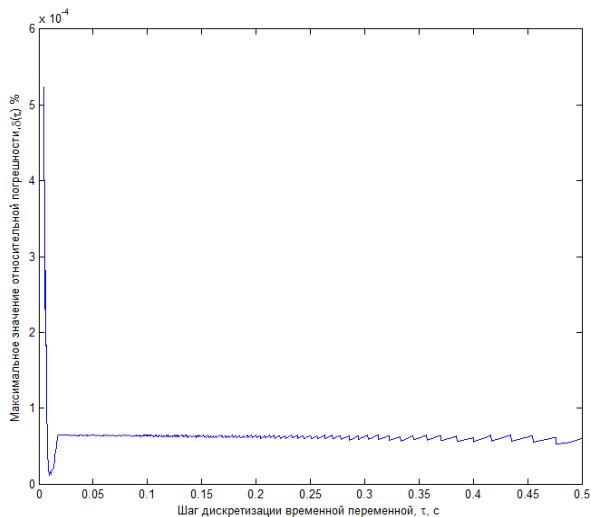


Рис. 6. График зависимости максимального значения относительной погрешности решения от шага дискретизации

Результаты численных экспериментов показали, что при шаге дискретизации $\tau = 0,01$ с получено наименьшее значение относительной погрешности $\delta = 0,0000117$.

Зависимость $\delta(t, x)$ при данном шаге приведено на рис. 7.

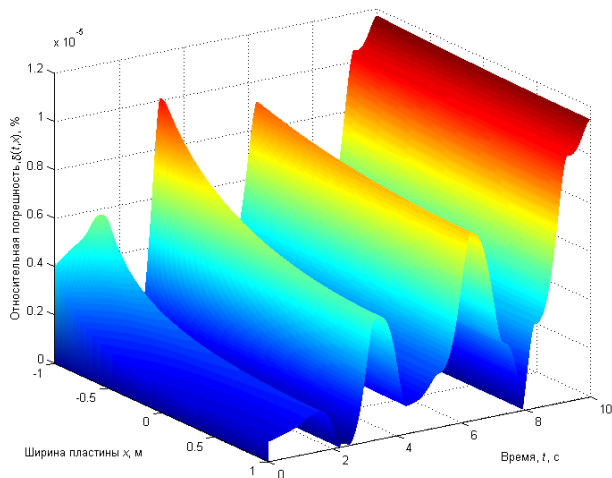


Рис. 7. График зависимости относительной погрешности решения от пространственной и временной координат

Выводы. Предложенный метод численной реализации математических моделей нестационарных тепловых процессов при наличии несимметричных граничных условий I-II рода обладает достаточной для инженерных расчетов точностью (относительная погрешность в проведенном эксперименте не превышает 0,0086%). Метод позволяет значительно упростить вычисления по сравнению с традиционными методами расчетов.

Список использованной литературы:

1. Конет И. М. Обобщенные нестационарные температурные поля в плоских прямоугольных областях / И. М. Конет, М. П. Ленюк // Интегральные преобразования в задачах теплопроводности и упругости. — К., 1986. — С. 3–15. — (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 86.54).
2. Конет І. М. Нестационарні температурні поля в безкрайній ізотропній пластинці / І. М. Конет, А. П. Громик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць. — К. : Ін-т математики АН України, 1994. — Вип. 5. — С. 92–97.
3. Верлань А. Ф. Компьютерное моделирование процессов передачи тепла в перспективных базовых несущих конструкциях стоечного типа с тепловыми трубами / А. Ф. Верлань, И. О. Горошко, Ю. Е. Николаенко // Математичні машини і системи. — 2008.— № 2.— С. 90–99.
4. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.
6. Шашков А. Г. Методы определения теплопроводности и температуропроводности / А.Г. Шашков, Г. М. Волохов, Т. Н. Абраменко, В. П. Козлов ; под ред. А. В. Лыкова. — М. : Энергия, 1973. — 336 с.
7. Федорчук В. А. Об одном методе исследования динамики нестационарных тепловых процессов при наличии симметричных граничных условий / В. А. Федорчук, А. И. Махович // Электронное моделирование. — 2014. — № 3. — С. 71–79.

The paper deals with the numerical solution of mathematical models of transient thermal processes in the presence of asymmetric boundary conditions.

Key words: *model, transient thermal process, asymmetric boundary conditions, approximation, numerical.*

Отримано: 21.03.2014