4. Зверев В. Г. Модифицированный полилинейный метод решения разностных эллиптических уравнений / В. Г. Зверев // ЖВМ и МФ. — 1998. — Т. 38, № 9. — С. 1553–1562.
5. Абрамчук В. С. Итерационные методы направленного поиска решения систем $Ax = f$ с сингулярно-естественным упорядочением переменных / В. С. Абрамчук // Доп. НАН України. — 1996. — № 8. — С. 4–8.

A method of solving difference equations $A\vec{x} = \vec{b}$, $A = H + S + V$ that arise in discretization of two-dimensional elliptic boundary value problems. Solution algorithm brings together an iterative process with direct methods of solving equations $S_i\vec{x}_i = d_i$, $i = N/m$, where S_i is $2m+1$ band-diagonal matrix that approaches A with high precision and has a minimum width, N — number of rows of the matrix A.

Key words: *elliptic difference equation, transform the structure of the matrix, Cholesky factorization.*

Отримано: 20.02.2014

УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ІСНУВАННЯ ДОЗВУКОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. Одержано результат про існування дозвукових періодичних біжучих хвиль для таких систем.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, дозвукові періодичні біжучі хвилі.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,\,m} = U'\left(q_{n+1,\,m} - q_{n,\,m}\right) - U'\left(q_{n,\,m} - q_{n-1,\,m}\right) + \\ + U'\left(q_{n,\,m+1} - q_{n,\,m}\right) - U'\left(q_{n,\,m} - q_{n,\,m-1}\right) - V'\left(q_{n,\,m}\right),\ \left(n,\ m\right) \in \mathbb{Z}^2. \tag{1}$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь, причому при $V\left(r\right) \equiv 0$ (1) є двовимірним аналогом системи Фермі-Пасти-Улама, а при $V\left(r\right) = K\left(1 - \cos r\right)$ — дискретним рівнянням sin-Ґордона на двовимірній ґратці.

Важливим класом розв'язків для таких систем є біжучі хвилі. Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама можна знайти в працях О. Панкова, зокрема в [10] найбільш повний огляд результатів. У статті [3] одержано умови існування періодичних біжучих хвиль в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. В той же час для ланцюгів осциляторів відомі декілька праць, зокрема, [8], результати якої отримано методами теорії біфуркацій, а також [1; 5], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль за допомогою методу критичних точок. У статтях [2; 6; 7] вивчались біжучі хвилі для систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках. Зокрема, в [6] розглядалась система із непарною 2π -періодичною нелінійністю. А в [7] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. У статті [2] одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль. У статті [4] одержано результат про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Ґордона на двовимірній ґратці.

Метою статті є одержання умов існування дозвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. Для профілю біжучої хвилі $u\left(s\right)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$c^2 u''(s) = U'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) + \\ + U'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) - V'\left(u\left(s\right)\right). \tag{2}$$

Зазначимо, що в рівняння (2) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (2), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

Будемо розглядати випадок періодичних біжучих хвиль, для знаходження профілю яких достатньо знайти розв'язок рівняння (2), який задовольняє умову

$$u\left(s + 2k\right) = u\left(s\right),\ s \in \mathbb{R},\ k > 0. \tag{3}$$

Всюди далі під розв'язком рівняння (2) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R}),$ яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s \in \mathbb{R}.$

Варіаційне формулювання задачі. Позначимо через E_k гільбертів простір $E_k = \left\{u \in H^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right) : u\left(s+2k\right) = u\left(s\right)\right\}$ зі скалярним добутком $\left(u,\, v\right)_k = \int\limits_{-k}^{k} \left(u\left(s\right)v\left(s\right) + u'\left(s\right)v'\left(s\right)\right) ds$.

На просторі E_k означимо оператори

$$\left(Au\right)\left(s\right) := u\left(s+\cos\varphi\right) - u\left(s\right) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'\left(\tau\right) d\tau,$$

$$\left(Bu\right)\left(s\right) := u\left(s+\sin\varphi\right) - u\left(s\right) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'\left(\tau\right) d\tau.$$

Тоді правильне таке твердження (див. [3, с. 77]).

Лема 1. Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності

$$\left\|Au\right\|_{L^2(-k,\,k)} \le \left|\cos\varphi\right| \cdot \left\|u'\right\|_{L^2(-k,\,k)}, \quad \left\|Bu\right\|_{L^2(-k,\,k)} \le \left|\sin\varphi\right| \cdot \left\|u'\right\|_{L^2(-k,\,k)}.$$

Всюди далі розглядаються потенціали $U(r)$ і $V\left(r\right)$ вигляду:

$\left(i'\right)$ $U\left(r\right) = \dfrac{c_0^2}{2} r^2 + f\left(r\right)$, $V\left(r\right) = -\dfrac{a^2}{2} r^2 + g\left(r\right)$, де $c_0 \ge 0$, $a > 0$.

Також припускається, що неквадратична частина кожного з цих потенціалів $h \in \left\{f;\, g\right\}$ задовольняє умови:

$\left(ii'\right)$ $h\left(0\right) = h'\left(0\right) = 0$ і $h'\left(r\right) = o\left(r\right)$ при $r \to 0$;

$\left(iii^+\right)$ існують $r_0 > 0$ і $\mu > 2$ такі, що $h\left(r_0\right) > 0$ і для $r \ge 0$

$$0 \le \mu h\left(r\right) \le r h'\left(r\right);$$

або

$\left(iii^-\right)$ існують $r_0 > 0$ і $\mu > 2$ такі, що $h\left(r_0\right) > 0$ і для $r \le 0$

$$0 \le \mu h\left(r\right) \le r h'\left(r\right).$$

Неважко переконатися в тому, що з цих умов випливає існування сталих $d > 0$ і $d_0 \ge 0$ таких, що $h\left(r\right) \ge d\left|r\right|^{\mu} - d_0$.

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k\left(u\right) := \int\limits_{-k}^{k} \left\{\frac{c^2}{2}\left|u'\left(s\right)\right|^2 - U\left(Au\left(s\right)\right) - U\left(Bu\left(s\right)\right) - V\left(u\left(s\right)\right)\right\} ds.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються наступні два твердження.

Лема 2. J_k — функціонал класу C^1 на E_k, а його похідна для будь-яких $u,\, h \in E_k$ виражається формулою

$$\left\langle J_k'(u),\, h\right\rangle = \int_{-k}^{k}\Big\{c^2u'(s)h'(s) - U'\big(Au(s)\big)Ah(s) -$$

$$-U'\big(Bu(s)\big)Bh(s) - V'\big(u(s)\big)h(s)\Big\}ds.$$

Лема 3. Критичні точки функціоналу J_k є C^2-розв'язками рівняння (2), що задовольняють умову (3).

Основний результат. Для одержання основного результату статті знадобиться теорема про зачеплення ([10; 11]).

Нехай H — гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z : \|z\| = r$. Позначимо

$$M = \left\{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \le \rho, \lambda \le 0\right\},$$

$$M_0 = \left\{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \ i \ \lambda \le 0, \text{ або } \|u\| \le \rho \ i \ \lambda = 0 \ \right\},$$

тобто M_0 — межа $M\left(\partial M\right)$. Нехай $N := \left\{u \in Z : \|u\| = r\right\}$.

Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} \varphi(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} \varphi(u).$$

У такому випадку говорять, що функціонал φ задовольняє *геометрії зачеплення*.

Теорема 1 (про зачеплення). Нехай φ — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, що задовольняє геометрії зачеплення та умові Пале-Смейла:

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $\varphi'(u_n) \to 0$ і $\varphi(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Нехай

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi\big(\gamma(u)\big),$$

де $\Gamma := \left\{\gamma \in C\left(M; H\right) : \gamma = id \text{ на } M_0\right\}$. Тоді b — критичне значення φ і $\beta \le b \le \sup_{u \in M} \varphi(u)$.

Наступна лема доводиться аналогічно до леми 6 з [3, с. 85].

Лема 4. Нехай виконуються умови (i'), (ii'), (iii^{+}), (iii^{-}), тоді функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла.

Лема 5. Нехай виконуються умови (i'), (ii'), (iii^{+}), (iii^{-}), тоді функціонал J_k задовольняє геометрії зачеплення.

Доведення. Розглянемо оператор

$$(Lu)(s) := -c^2u''(s) + c_0^2\left(Au(s) + Bu(s)\right) + a^2u(s)$$

із $2k$-періодичними умовами. Оператор L є самоспряженим в $L^2(-k;k)$, обмеженим знизу та має дискретний спектр, який накопичується біля $+\infty$, тобто нижче нуля власних чисел є скінченна кількість. Власні значення та власні функції можна обчислити. Нагадаємо, що всі власні значення λ_j із несталими власними функціями є подвійними. Позначимо через $h_j^{\pm} \in E_k$ лінійно незалежні пари власних функцій із власними значеннями λ_j.

Нехай Z — підпростір E_k, утворений функціями $h_j^{\pm}$ з $\lambda_j > 0$ і Y — підпростір E_k, утворений функціями $h_j^{\pm}$ *з* $\lambda_j \le 0$ та функцією h_0, тобто такі лінійні оболонки $Z = \boldsymbol{Span}\left\{h_j^{\pm} : \lambda_j > 0\right\}$, $Y = \boldsymbol{Span}\left\{h_0,\, h_j^{\pm} : \lambda_j \le 0\right\}$. Відмітимо, що $\dim Y < \infty$. Легко перевірити, що $Y \perp Z$ і $E_k = Y \oplus Z$.

Позначимо через Q_k квадратичну частину функціоналу J_k

$$Q_k = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k}\left(c^2\left|u'(s)\right|^2 - c_0^2\left|Au(s)\right|^2 - c_0^2\left|Bu(s)\right|^2 + a^2\left|u(s)\right|^2\right)ds .$$

Легко бачити, що $Q_k(y+z) = Q_k(y) + Q_k(z)$, де $y \in Y$, $z \in Z$.

Зауважимо, що квадратична форма Q_k додатно визначена на Z, тобто $Q_k(u) \ge \alpha\|u\|_k^2$ з $\alpha > 0$.

З умов (i'), (ii'), (iii^{+}), (iii^{-}) випливає, що для деякого $\varepsilon > 0$ існує таке $r_0 > 0$, що $\left|V(r)\right| \le \varepsilon r^2$, при $|r| \le r_0$. Тоді

$$J_k(u) \ge Q_k(u) - \varepsilon\int_{-k}^{k}\left|u(s)\right|^2 ds \ge Q_k(u) - \varepsilon\|u\|_k^2 \ge \delta\|u\|_k^2 ,$$

де $\delta > 0$. Отже, $J_k(u) > 0$ на $N = \left\{u \in Z : \|u\|_k = r\right\}$ з достатньо малим $r > 0$.

Зафіксуємо $z \in Z$, $\|z\|_k = 1$ та множину

$$M = \left\{ u = y + \lambda z : y \in Z, \|u\|_k \le \rho, \lambda \le 0 \right\}.$$

Доведемо, що $J_k(u) \le 0$ на $M_0 = \partial M$ за умови, що ρ достатньо велике. Нагадаємо, що

$$M_0 = \left\{ u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\|_k = \rho \ i \ \lambda \ge 0, \text{ або } \|u\|_k \le \rho \ i \ \lambda = 0 \right\}.$$

Маємо

$$J_k(y + \lambda z) = Q_k(y) + \lambda^2 Q_k(z) - \int_{-k}^{k} \left[V\left(A(y + \lambda z)\right) + V\left(B(y + \lambda z)\right) \right] ds.$$

Оскільки існують такі константи $d > 0$, $d_0 \ge 0$, $\tilde{d} > 0$, $\tilde{d}_0 \ge 0$, що правильні нерівності

$$f(r) \ge d|r|^{\mu} - d_0, \ g(r) \ge \tilde{d}|r|^{\mu} - \tilde{d}_0, \text{ де } \mu > 2,$$

то, враховуючи, що $Q_k(y) \le 0$

$$J_k(y + \lambda z) \le \lambda^2 \gamma_0 + 4kd_0 + 2k\tilde{d}_0 - d\left(\|A(y + \lambda z)\|_{L^\mu}^{\mu} + \|B(y + \lambda z)\|_{L^\mu}^{\mu} \right) \le$$

$$\le \lambda^2 \gamma_0 + 4kd_0 + 2k\tilde{d}_0 - C\|y + \lambda z\|_{L^\theta}^{\theta},$$

де $\gamma_0 = Q_k(z)$, $C > 0$. Оскільки

$$\rho^2 = \|y + \lambda z\|_k^2 = \|y\|_k^2 + \lambda^2,$$

то $\lambda^2 \le \rho^2$. До того ж, у скінченновимірних просторах всі норми еквівалентні. Отже,

$$\|y + \lambda z\|_{L^\mu} \ge c\|y + \lambda z\|_k = c\rho,$$

$$J_k(y + \lambda z) \le \gamma_0 \rho^2 + 4kd_0 + 2k\tilde{d}_0 - C\rho^{\mu}.$$

Оскільки $\mu > 2$, то права частина від'ємна, якщо ρ — достатньо велике. Отже, $J_k(y + \lambda z) \le 0$. Якщо $u \in M_0$, $\|u\|_k \le \rho$ і $\lambda = 0$, то $u = y \in Y$ і, очевидно, що $J_k(u) \le 0$. Таким чином, функціонал J_k задовольняє геометрії зачеплення. Лему доведено.

Наступна теорема є основним результатом цієї статті:

Теорема 2. Нехай виконуються умови (i'), (ii'), (iii^+), (iii^-). Тоді для будь-яких $k \ge 1$ і $c \in (0; c_0]$ рівняння (2) має розв'язок $u_k \in E_k$. Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.

Доведення. Леми 4 і 5 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$, яка, за лемою 3, є C^2-розв'язком задачі (2), (3). Теорему доведено.

Висновки. Одержано теорему про існування дозвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці, який поширює результат статті [9].

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії. — 2006. — Т. 26, № 2. — С. 140–153.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154–175.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, № 1. — С. 76–88.
4. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5–10.
5. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Mathematical Analysis. — 2007. — Vol. 3, № 1. — P. 19–26.
6. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — № 20. — P. 319–341.
7. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, № 1 (February). — P. 105–114.
8. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgassner // Commun. Math. Phys. — 2000. — № 211. — P. 439–464.
9. Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices / P. D. Makita // Nonlinear Analysis. — 2011. — № 74. — P. 2071–2086.
10. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices / A. Pankov. — London ; Singapore : Imperial College Press, 2005. — 196 p.
11. Willem M. Minimax theorems / M. Willem. — Boston : Birkhдuser, 1996. — 162 p.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear coupled nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is obtained result on existence of subsonic periodic travelling waves.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, subsonic periodic travelling waves.*

Отримано: 24.03.2014