УДК 517.977

Л. А. Власенко, член-корреспондент НАН Украины **С. И. Ляшко,**
А. Г. Руткас

Об импульсном оптимальном управлении динамическими системами типа Соболева с запаздыванием

Изучается задача импульсного оптимального управления системами, которые описываются линейными операторно-дифференциальными уравнениями типа Соболева с запаздыванием. Основное предположение состоит в ограничении роста резольвенты характеристического пучка операторов уравнения в некоторой правой полуплоскости. Рассматриваются приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных, которые не принадлежат типу Ковалевской.

Изучается задача импульсного оптимального управления для системы, динамика которой описывается следующим операторно-дифференциальным уравнением с запаздыванием:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[Ay(t)] + B_0 y(t) = B_1 y(t-\omega) + f(t) + Ku, \\ &u = \sum_{k=1}^{N} z_k \delta(t-\tau_k), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{1}$$

Согласно принятой терминологии, уравнение (1) является уравнением типа Соболева, так как является не разрешенным относительно производной по времени (см., например, [1, гл. 3, 7]). Используем следующие обозначения: X, Y, Z — комплексные гильбертовы пространства; $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ — скалярное произведение в пространстве Y; E — единичный оператор; $L_2(a,b;Y)$ — пространство Y-значных функций, интегрируемых с квадратом на $[a,b]$; $W_2^1(a,b;Y)$ — пространство Соболева порядка 1 функций из $L_2(a,b;Y)$; $H_X = L_2(t_0,T;X)$, $H_Y = L_2(t_0,T;Y)$; $\mathcal{L}(Y,X)$ — пространство ограниченных линейных операторов из Y в X; $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y,Y)$; $C^p(I,Y)$ — класс Y-значных функций, p раз непрерывно дифференцируемых на $I \subset \mathbb{R}$; $C^0(I,Y) = C(I,Y)$; A, B_0 — замкнутые линейные операторы из Y в X с областями определения D_A, D_{B_0}; $D = D_A \bigcap D_{B_0} \neq \{0\}$ — общая область определения операторов A, B_0; $B_1 \in \mathcal{L}(Y,X)$; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; $\chi(t)$ — функция Хевисайда, равная нулю для отрицательных значений аргумента и единице — для положительных; $K \in \mathcal{L}(Z,X)$; $f(t) \in L_2(t_0,T;X)$; $z_k \in Z$; $\tau_k \in [t_0,T]$. Функции $v(t) \in W_2^1(a,b;Y)$ будем считать непрерывными на $[a,b]$, т. е. $v(t) \in C([a,b],Y)$, изменив их, если это необходимо, на множестве меры нуль.

Регулирование системой (1) осуществляется с помощью импульсного управления u, в котором $\tau_1,\ldots,\tau_N$ — моменты приложения импульсов, $z_1,\ldots,z_N$ — соответствующие этим моментам интенсивности или веса; оператор K действует по правилу $Ku = \sum\limits_{k=1}^{N} Kz_k\delta(t-\tau_k)$.

Из чисел $t_0, T, \tau_1, \ldots, \tau_N$ выберем все различные числа и расположим их в порядке возрастания так, что $t_0 < t_1 < \cdots < t_{N_0} < t_{N_0+1} = T$. Тогда импульсное управление u в (1) допускает представление

$$u = \sum_{j=0}^{N_0+1} h_j \delta(t - t_j), \qquad h_j = \sum_{\tau_k = t_j} z_k.$$

Если среди чисел τ_k нет равных t_0 или T, то $h_0 = 0$ или $h_{N_0+1} = 0$. Под *решениями уравнения* (1) мы будем понимать распределения типа функций $y(t) \in L_2(t_0 - \omega, T; Y)$ таких, что $y(t) \in D$ для почти всех $t \in [t_0, T]$, $Ay(t) \in W_2^1(t_j, t_{j+1}; X)$ для $j = 0, \ldots, N_0$, $By(t) \in L_2(t_0, T; X)$, для почти всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяется уравнение

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)] + B_0 y(t) = B_1 y(t - \omega) + f(t) \tag{2}$$

и в точках множества t_j выполняются равенства (импульсные воздействия)

$$(Ay)(t_j + 0) - (Ay)(t_j - 0) = K h_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, N_0. \tag{3}$$

Здесь значения $(Ay)(t_0 + 0)$, $(Ay)(t_{N_0+1} - 0)$ и $(Ay)(t_j \pm 0)$ для $j = 1, \ldots, N_0$ имеют смысл, поскольку функция $Ay(t) \in W_2^1(t_j, t_{j+1}; X)$ является непрерывной на $[t_j, t_{j+1}]$ после возможного изменения на множестве нулевой меры; значение $(Ay)(t_0 - 0)$ задается

$$(Ay)(t_0 - 0) = q, \tag{4}$$

значение $(Ay)(t_{N_0+1} + 0) = (Ay)(T + 0)$ определяется как

$$(Ay)(t_{N_0+1} + 0) = (Ay)(t_{N_0+1} - 0) + K h_{N_0+1}.$$

Также для уравнения (1) зададим начальную функцию

$$y(t) = g(t), \qquad \text{п.в.} \quad t_0 - \omega \leqslant t \leqslant t_0, \tag{5}$$

где $g(t) \in L_2(t_0 - \omega, t_0; Y)$. Начальная задача (1), (4), (5) сводится к задаче (2), (4), (5) с импульсными воздействиями (3).

Уравнению (1) ставим в соответствие пучок операторов $\lambda A + B_0$, определенный на D. Ограничение состоит в том, что в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant C_1$ пучок операторов $\lambda A + B_0$ имеет резольвенту $R(\lambda) = (\lambda A + B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$ и псевдорезольвента $AR(\lambda) \in \mathcal{L}(Y)$ удовлетворяет оценке

$$\|AR(\lambda)\| \leqslant \frac{C_2}{1 + |\lambda|}, \qquad \operatorname{Re}\lambda \geqslant C_1, \qquad C_2 > 0. \tag{6}$$

Применяя эргодические теоремы Хилле для псевдорезольвент [2, с. 299–303] (подробное изложение содержится в [3, п. 4.3.2]), строим в X проектор Q_1 как слабый предел псевдорезольвенты $AR(\lambda)$ и дополнительный к нему проектор Q_2, а именно:

$$Q_1 x = \lim_{\substack{|\lambda| \to \infty \\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant C_1}} \lambda AR(\lambda) x, \qquad x \in X, \qquad Q_2 = E - Q_1,$$

также строим оператор

$$G = A + Q_2 B_0 \colon D \to X, \qquad D_G = D$$

и оператор

$$W = -Q_1 B_0 G^{-1}, \qquad D_W = AD \dot{+} B_0(\mathrm{Ker} A \bigcap D),$$

который является генератором некоторой аналитической полугруппы $U(t)$ в $\mathcal{L}(X)$. Здесь G^{-1} обозначает обратный к оператору G, а $\dot{+}$ — прямую сумму.

Решение $y(t)$ задачи (1), (4), (5) на отрезке $[t_0 - \omega, T]$ находим последовательно для $j = 1, 2, \ldots, N_0 + 1$ на отрезках $[t_{j-1}, t_j]$ с помощью решений $y(t) = y_j(t)$ уравнения (2) без импульсных воздействий на отрезках $[t_{j-1}, t_j]$ с начальными условиями на отрезках $[t_{j-1} - \omega, t_{j-1}]$ и в точках t_{j-1} вида

$$y(t) = y_{j-1}(t), \qquad \text{п.в.} \quad t_{j-1} - \omega \leqslant t \leqslant t_{j-1},$$
$$(Ay)(t_{j-1} + 0) = (Ay_{j-1})(t_{j-1} - 0) + Kh_{j-1}.$$

Существование и единственность решения $y_j(t)$ в случае ограничения (6) установлены в [4, теорема 1]. Условия разрешимости начальной задачи (1), (4), (5) приводятся в теореме 1. Для формулировки теоремы введем в рассмотрение следующие операторы и функции:

$$(Lv)(t) = \overline{G^{-1}} \int\limits_{t_0}^{t} U(t-s) Q_1 v(s) ds + G^{-1} Q_2 v(t), \qquad L \in \mathcal{L}(H_X, H_Y),$$

$$(Fv)(t) = \begin{cases} v(t-\omega), & t \geqslant t_0 + \omega, \\ 0, & t < t_0 + \omega, \end{cases} \qquad F \in \mathcal{L}(H_Y),$$

$$w_1(t) = G^{-1} U(t - t_0) q, \qquad w_2(t) = G^{-1} \sum_{k=1}^{N} \chi(t - \tau_k) U(t - t_k) K z_k,$$

$$y_0(t) = \begin{cases} g(t-\omega), & t \leqslant t_0 + \omega, \\ 0, & t > t_0 + \omega, \end{cases} \qquad w_1(t), w_2(t), y_0(t) \in H_Y.$$

Теорема 1. *Пусть в правой полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant C_1$ *пучок операторов* $\lambda A + B_0$ *имеет резольвенту* $R(\lambda)$ *и псевдорезольвента* $AR(\lambda)$ *удовлетворяет оценке* (6), *оператор* G^{-1} *ограничен на своей области определения,* $\mathrm{Im} K \subset AD$, $\mathrm{Im}(Q_1 B_1) \subset AD$, $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$, *значения функции* $Q_1 f(t)$ *принадлежат* AD *для почти всех* $t \in [t_0, T]$, $B_0 G^{-1} Q_1 f(t) \in L_2(t_0, T; X)$, $q \in AD$ *и* $g(t) \in L_2(t_0 - \omega, t_0; Y)$. *Тогда существует единственное решение* $y(t)$ *задачи* (1), (4), (5) *и это решение допускает представление*

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N_1 - 1} (LB_1F)^j (w_1 + w_2 + Lf + LB_1 y_0)(t), \qquad \textit{п.в.} \quad t \in [t_0, T],$$
$$N_1 = \min\{l \in \mathbb{N} \colon T - t_0 \leqslant l\omega\}. \tag{7}$$

Явная формула (7) для решения $y(t)$ задачи (1), (4), (5) устанавливается последовательно на отрезках времени $[\theta_{-1}, \theta_m]$, где $\theta_m = t_0 + m\omega$, если $m = -1, 0, \ldots, N_1 - 1$, $\theta_{N_1 - 1} < T$,

$\theta_{N_1} = T \leqslant t_0 + N_1\omega$. На каждом шаге используется следующее соотношение, которому удовлетворяет решение $y(t)$ задачи (1), (4), (5):

$$y(t) = G^{-1}\Bigg[U(t-t_0)q + \int\limits_{t_0}^{t} U(t-s)Q_1[B_1y(s-\omega)+f(s)]ds +$$
$$+ Q_2[B_1y(t-\omega)+f(t)] + \sum_{k=1}^{N}\chi(t-\tau_k)U(t-\tau_k)Kz_k\Bigg], \qquad \text{п.в. } t\in[t_0,T].$$

Постановки задач импульсного оптимального управления для различных классов систем типа Соболева содержатся в [1, 5, 6, 7]. В настоящей работе мы изучаем систему с запаздыванием. Обозначим через $z = \{z_1,\ldots,z_N\}$ вектор пространства Z^N и через $\tau = \{\tau_1,\ldots,\tau_N\}$ — вектор пространства $\mathbb{R}^N$. Введем множество векторов $\Theta = \{\tau\in\mathbb{R}^N : \tau_k\in[t_0,T]\}$. Согласно теореме 1, импульсному управлению $u = u(\tau,z) = \sum\limits_{k=1}^{N} z_k\delta(t-\tau_k)$ отвечает единственное решение $y(t) = y(t,u)$ начальной задачи (1), (4), (5), которое строится в явном виде (7). Управление системой (1), (4), (5) осуществляется путем изменения моментов импульсных воздействий $\tau_1,\ldots,\tau_N$ и соответствующих интенсивностей импульсов $z_1,\ldots,z_N$. Подобно ситуации в [8, разд. 18.1], где изучаются распределенные системы управления с запаздыванием, для оценки качества управления введем квадратичный функционал

$$J(\tau,z) = J(u) = \int\limits_{t_0}^{T}\langle Ry(t),y(t)\rangle_Y dt + \langle Sz,z\rangle_{Z^N}. \tag{8}$$

Относительно операторов $R\in\mathcal{L}(Y)$ и $S\in\mathcal{L}(Z^N)$ предполагаем, что они являются неотрицательно определенными и $S\geqslant\gamma E$, $\gamma>0$. Задача заключается в нахождении минимума $\min\limits_{\tau\in\Theta,z\in Z^N} J(\tau,z)$ функционала качества (8) на решениях $y(t) = y(t,u)$ системы (1), (4), (5). Управление $u_* = u_*(\tau_*,z_*) = \sum\limits_{k=1}^{N} z_{*k}\delta(t-\tau_{*k})$, отвечающее элементам $\tau_*\in\Theta$, $z_*\in Z^N$, на котором достигается этот минимум, будем называть *оптимальным управлением*, а соответствующее решение $y_*(t) = y(t,u_*)$ системы (1), (4), (5) — *оптимальным решением*.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в правой полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda\geqslant C_1$ *пучок операторов* $\lambda A+B_0$ *имеет резольвенту* $R(\lambda)$ *и псевдорезольвента* $AR(\lambda)$ *удовлетворяет оценке* (6), *оператор* G^{-1} *ограничен на своей области определения,* $\mathrm{Im}K\subset AD$, $\mathrm{Im}(Q_1B_1)\subset AD$, $f(t)\in L_2(t_0,T;X)$, *значения функции* $Q_1f(t)$ *принадлежат* AD *для почти всех* $t\in[t_0,T]$, $B_0G^{-1}Q_1f(t)\in L_2(t_0,T;X)$, $q\in AD$ *и* $g(t)\in L_2(t_0-\omega,t_0;Y)$. *Тогда существуют векторы* $\tau_*\in\Theta$ *и* $z_*\in Z^N$ *и отвечающее им оптимальное управление* u_*, *на котором достигается минимум* $\min\limits_{\tau\in\Theta,z\in Z^N} J(\tau,z)$ *функционала качества* (8).

Схема доказательства. Представим функционал $J(u)$ (8) как квадратичную форму, определенную на Z^N:

$$J(u) = \langle Mz,z\rangle_{Z^N} + 2Re\langle\Psi^*R\widehat{w},z\rangle_{Z^N} + \langle R\widehat{w},\widehat{w}\rangle_{H_Y},$$

где

$$\Psi z = G^{-1}\sum_{k=1}^{N}\chi(t-\tau_k)U(t-\tau_k)Kz_k, \qquad \Psi\in\mathcal{L}(Z^N, H_Y),$$

$$\Psi^* v = \left\{K^*\int_{\tau_k}^{T} e^{W^*(t-\tau_k)}[G^{-1}]^* v(t)dt\right\}_{k=1}^{N}, \qquad \Psi^*\in\mathcal{L}(H_Y, Z^N),$$

$$M = S+\Psi^* R\Psi\in\mathcal{L}(Z^N), \qquad \widehat{w}(t)=\sum_{j=0}^{N_1-1}(LB_1F)^j(w_1+Lf+LB_1y_0)(t)\in H_Y.$$

Пусть сначала управление системой (1), (4), (5) осуществляется путем изменения интенсивностей $z_1,\ldots,z_N$ в фиксированные моменты времени $\tau_1,\ldots,\tau_N$. Управление

$$u_{*\tau}=\sum_{k=1}^{N} z_{*\tau k}\delta(t-\tau_k), \qquad z_{*\tau}=\{z_{*\tau 1},\ldots,z_{*\tau N}\}=-M^{-1}\Psi^* R\widehat{w} \tag{9}$$

есть единственное управление, на котором достигается минимум $\min\limits_{z\in Z^N} J(\tau,z)$.

Теперь управление системой (1), (4), (5) будем осуществлять путем изменения моментов импульсных воздействий $\tau_1,\ldots,\tau_N$ и интенсивностей импульсов $z_1,\ldots,z_N$. Оператор $\Psi=\Psi(\tau)$ и его сопряженный $\Psi^*=\Psi^*(\tau)$ являются сильно непрерывными по $\tau\in\Theta$. Поэтому сильно непрерывным по $\tau\in\Theta$ является оператор $M=M(\tau)$. Обратный оператор $M^{-1}=M^{-1}(\tau)$ равномерно ограничен и, следовательно, сильно непрерывен по $\tau\in\Theta$. Отсюда получаем, что $z_{*\tau}$ (9) как функция $\tau\in\Theta$ со значениями в Z^N непрерывна. Функция $\min\limits_{z\in Z^N} J(\tau,z)=J(u_{*\tau})$ является непрерывной по $\tau\in\Theta$. Если $\tau_*=\{\tau_{*1},\ldots,\tau_{*N}\}\in\Theta$ — вектор, на котором достигается минимум $\min\limits_{\tau\in\Theta} J(u_{*\tau})$, то оптимальное управление u_* есть

$$u_*=u_{*\tau_*}=\sum_{k=1}^{N} z_{*k}\delta(t-\tau_{*k}), \qquad z_*=\{z_{*1},\ldots,z_{*N}\}=-M^{-1}(\tau_*)\Psi^*(\tau_*)Rw.$$

Полученные результаты применяются к исследованию систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, например, для следующей смешанной задачи:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}[l(y)-ay(t,x)]+[l^2(y)+b(x)y(t,x)]=[B_1y(t-\omega,x)+Ku+f(t,x),\\
u=\sum_{k=1}^{N} z_k(x)\delta(t-\tau_k),\\
y(t,x)=g(t,x), \qquad (l(y)-ay)(0,x)=q(x),\\
y(t,x)_{|\Gamma}=0, \qquad l(y)(t,x)_{|\Gamma}=0, \qquad t\in[0,T], \qquad x\in\Omega,
\end{gathered} \tag{10}$$

где $l(y)=-\sum\limits_{i,j=1}^{m}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}y(x)\right)+a_0(x)y(x)$ — равномерно эллиптическое дифференциальное выражение в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ;

$\tau_k \in [0, T]$; B_1, K — ограниченные линейные операторы в комплексном пространстве $L_2(\Omega)$. Интерес к подобным дифференциальным уравнениям в частных производных вызван рядом прикладных задач, например, в [9–12]. Дифференциальные выражения $l(y)$ использовались при описании распределенных систем с импульсным управлением в [13, 14]. При определенных ограничениях на функции $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$, $b(x)$, $q(x)$, $z_k(x)$, $f(t,x)$, $g(t,x)$ и число a смешанная задача (10) записывается в абстрактной форме (1), (4), (5) в пространстве $L_2(\Omega)$. Устанавливается, что пучок дифференциальных операторов $\lambda A + B_0$ удовлетворяет оценке (6), что позволяет применить теоремы 1, 2 к исследованию задачи (10).

1. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 472 с.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
3. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006. – 273 с.
4. *Vlasenko L. A.* An optimal control problem for Sobolev retarded systems // Functional Dif. Equations. – 2010. – **17**, No 3–4. – P. 401–412.
5. *Lyashko S. I., Semenov V. V.* Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions // Cybernetics and Systems Analysis. – 2001. – **37**, iss. 1. – P. 13–32.
6. *Власенко Л. А., Руткас А. Г., Самойленко А. М.* Проблема импульсного регулятора для одной динамической системы типа Соболева // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 8. – С. 1027–1034.
7. *Власенко Л. А., Руткас А. Г.* Стохастическое импульсное управление параболическими системами типа Соболева // Диф. уравнения. – 2011. – **47**, № 10. – С. 1482–1491.
8. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – Москва: Мир, 1972. – 415 с.
9. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 336 с.
10. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. – Москва: Наука, 1986. – 288 с.
11. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1981. – 304 с.
12. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – Москва: Физматлит, 2007. – 736 с.
13. *Ляшко С. И.* Некоторые вопросы импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 3. – С. 368–371.
14. *Ляшко С. И., Маньковский А. А.* Управляемость параболических систем с импульсным воздействием // Докл. АН СССР. – 1989. – **306**, № 2. – С. 276–279.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 25.02.2013

Л. А. Власенко, член-кореспондент НАН України **С. І. Ляшко, А. Г. Руткас**

Про імпульсивне оптимальне керування динамічними системами типу Соболєва із запізненням

Вивчається задача імпульсного оптимального керування системами, що описуються лінійними операторно-диференціальними рівняннями типу Соболева із запізненням. Основне припущення полягає в обмеженні зростання резольвенти характеристичного жмутка операторів рівняння у деякій правій півплощині. Розглядаються застосування до диференціальних рівнянь з частинними похідними, що не належать типу Ковалевської.

L. A. Vlasenko, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **S. I. Lyashko,**
A. G. Rutkas

On an impulse optimal control over Sobolev delay dynamic systems

We study the problem of impulse optimal control for systems governed by Sobolev delay linear operator differential equations. The main assumption is a restriction imposed on the resolvent growth of the characteristic operator pencil in a certain right half plane. Applications to partial differential equations that do not belong to the Kovalevskaya type are considered.