УДК 517.956.223

А. В. Заворотинский

Об эллиптических с малым параметром краевых задачах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Рассмотрены эллиптические краевые задачи, в которых оператор в области полиномиально зависит от малого параметра, а в краевых условиях содержатся дополнительные неизвестные функции. Найден аналог условия типа Шапиро–Лопатинского, который позволяет в специальных функциональных пространствах, зависящих от параметра, получить априорную оценку для исследуемой задачи.

Дифференциальные операторы, полиномиально зависящие от малого параметра, возникают в различных разделах математической физики (особенно в теории упругости) и хорошо известны. Общая теория таких задач берет свое начало с работы М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1]. Современный вид этой теории и роль в ней метода Вишика–Люстерника придал Л. Р. Волевич в работе [2] (подробные ссылки на другие публикации по этой тематике можно найти там же).

Основная особенность такой задачи состоит в том, что при малых значениях параметра получается эллиптическое уравнение меньшего порядка, требующее меньшего количества граничных условий. В этой связи при малых $\varepsilon \to 0$ требуются поправки, позволяющие удовлетворить оставшимся граничным условиям. М. И. Вишик и Л. А. Люстерник нашли, что в случае вырождения эллиптической задачи в эллиптическую задачу меньшего порядка эти поправки вне любой ε-окрестности границы убывают как $\exp\{-C(\delta)/\varepsilon\}$. Их принято называть экспоненциальными пограничными слоями. Был предложен простой и конструктивный метод построения погранслоя, основанный на решении краевой задачи на полупрямой для обыкновенного уравнения (с постоянными коэффициентами) относительно оператора дифференцирования по направлению, трансверсальному границе области.

В настоящей работе исследуется общая эллиптическая краевая задача с малым параметром и дополнительными неизвестными функциями на границе области. Эллиптические задачи с дополнительными неизвестными функциями на границе области возникают в теории упругости, гидродинамики и, как вспомогательные, в теории эллиптических задач в негладких областях и при изучении гиперболических задач. Такие задачи были исследованы в работах [3–5].

В работе получены априорные оценки для рассматриваемой задачи в специальных функциональных пространствах, зависящих от параметра. Полученные оценки дают возможность построить левый и правый параметрикс задачи и исследовать слабо эллиптические задачи с неизвестными дополнительными функциями на границе области.

1. Постановка задачи. Пусть G — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с границей ∂G, которая является бесконечно гладким замкнутым многообразием размерности $n-1$. Как обычно, $\overline{G} := G \bigcup \partial G$.

Рассмотрим следующую краевую задачу в области G, содержащую параметр ε:

$$A(x,D,\varepsilon)u(x) \equiv \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-j} A_{2m-j}(x,D)u(x) = f(x), \qquad x \in G, \tag{1}$$

$$(B_j(x',D)u)(x') + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(x',D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \qquad x' \in \partial G, \qquad j = 1,\ldots,m+\varkappa. \tag{2}$$

Здесь m, μ, $\varkappa \in \mathbb{N}$, $m > \mu > 0$; $A_{2m-j}(x,D)$ — линейный дифференциальный оператор (л. д. о.) в $\overline{G}$; $B_j(x,D)$ — граничный л. д. о. на ∂G; $C_{j,k}(x',D')$ — касательный л. д. о. на ∂G. Коэффициенты этих операторов — комплекснозначные бесконечно гладкие функции, а порядки удовлетворяют условиям

$$\operatorname{ord} A_{2m-j} \leqslant 2m-j, \qquad \operatorname{ord} B_j = m_j, \qquad \operatorname{ord} C_{j,k} \leqslant m_j + \alpha_k,$$

где m_j, $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ и

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_{\mu+\varkappa} < m_{\mu+\varkappa+1} \leqslant \cdots \leqslant m_{m+\varkappa}. \tag{3}$$

Как обычно, $C_{j,k} \equiv 0$, если $m_j + \alpha_k < 0$.

Задача (1), (2) кроме неизвестной функции $u(x)$, $x \in \overline{G}$, содержит $\varkappa$ дополнительных неизвестных функций $\sigma_1(x'),\ldots,\sigma_\varkappa(x')$, $x' \in \partial G$. Поэтому число краевых условий равно $m+\varkappa$.

Сформулируем условия, которым удовлетворяет задача (1), (2). Пусть $x \in \overline{G}$. Обозначим

$$A^0(x,\xi,\varepsilon) := \sum_{j=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-j} A^0_{2m-j}(x,\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \varepsilon > 0,$$

где $A^0_{2m-j}(x,\xi)$ — главный символ оператора $A_{2m-j}(x,D)$. Заметим, что функция $A^0(x,\xi,|\xi|^{-1})$ однородная по ξ порядка 2μ.

Условие 1. Существует $C > 0$ такое, что

$$|A^0(\xi,\varepsilon)| \geqslant C|\xi|^{2\mu}(1+\varepsilon|\xi|)^{2m-2\mu} \tag{4}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, $\varepsilon > 0$.

Это условие *эллиптичности с малым параметром* оператора $A^0(x,D,\varepsilon)$ в точке $x \in \overline{G}$.

Замечание 1. Неравенство (4) равносильно следующим условиям:

$$A^0_{2m}(x,\xi) \neq 0, \qquad A^0_{2\mu}(x,\xi) \neq 0, \qquad A^0(x,\xi,\varepsilon) \neq 0 \tag{5}$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, $\varepsilon > 0$ [2, предложение 1.2].

Отметим, что первые два неравенства в (5) означают эллиптичность операторов $A^0_{2m}(x,\xi)$ и $A^0_{2\mu}(x,\xi)$.

Пусть $x' \in \partial G$ и U — достаточно малая окрестность точки x' из топологии в ∂G. Выберем в U локальные координаты $(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ такие, что x_n — расстояние от точки $x \in U$ до границы ∂G. Запишем в этих координатах символы $A^0_{2m-j}(x',\xi)$ и $A^0(x,\xi,\varepsilon)$ для каждого $\varepsilon > 0$. Полученные полиномы обозначим через $A^0_{2m-j}(\xi)$ и $A^0(\xi,\varepsilon)$ соответственно.

Предположим, что выполняется условие 1 в точке $x = x'$. Пусть $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда уравнения $A^0(\xi', \tau, \varepsilon) = 0$ и $A^0_{2\mu}(\xi', \varepsilon) = 0$ не имеют вещественных τ-корней. Обозначим через $m^{\pm}(\xi', \varepsilon)$ и $\mu^{\pm}(\xi', \varepsilon)$ число корней соответственно первого и второго уравнений, лежащих в полуплоскости $\mathbb{C}_{\pm} := \{\tau \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} \tau \gtrless 0\}$. Поскольку эти корни непрерывно зависят от ξ' и ε, числа $m^{\pm}(\xi') = m^{\pm}(\xi', \varepsilon)$ не зависят от $\varepsilon > 0$ при каждом фиксированном ξ'. В случае $n \geqslant 3$ множество $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ связно и поэтому числа $m^{\pm}(\xi')$ и $\mu^{\pm}(\xi')$ и не зависят также от ξ'.

Условие 2. Для каждого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ выполняются равенства

$$m^+(\xi') = m^-(\xi') = m, \qquad \mu^+(\xi') = \mu^-(\xi') = \mu.$$

Это условие *правильной эллиптичности с малым параметром* оператора $A^0(x', D, \varepsilon)$ в точке $x' \in \partial G$.

Заметим, что при $n \geqslant 3$ равенство $\mu^+(\xi') = \mu^-(\xi')$ выполняется автоматически [2].

Как и прежде, $x' \in \partial G$. Запишем в локальных координатах главные символы операторов $B_j(x', D)$ и $C_{j,k}(x', D')$. Полученные полиномы обозначим соответственно через $B^0_j(\xi)$ и $C^0_{j,k}(\xi')$, где $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi \equiv (\xi', \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

В задаче (1), (2) отбросим младшие члены дифференциальных операторов, положим $f \equiv 0$, перейдем к локальным координатам в окрестности точки ξ' и применим преобразование Фурье по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Получим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (1) на полуоси $t := x_n > 0$:

$$A^0(\xi', D_t, \varepsilon)v(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{6}$$

$$(B^0_j(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \qquad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{7}$$

Здесь гладкая функция $v(t)$ и числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa$ искомые, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa}$ — произвольно заданные комплексные числа. Задача (6), (7) зависит от двух параметров $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ и $\varepsilon > 0$. Она называется *граничным символом* задачи (1), (2) в точке $x' \in \partial G$.

Нас будут интересовать решения, удовлетворяющие условию

$$v(t) \to 0, \qquad \text{при} \qquad t \to \infty. \tag{8}$$

Условие 3. Для любых $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (6)–(8) имеет единственное решение $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$.

Это аналог условия Лопатинского для краевой задачи (1), (2) при фиксированном ε.

В следующих двух условиях идет речь о разрешимости краевой задачи для оператора $A^0(\xi', D_t, \varepsilon)$ в предельных случаях $\varepsilon \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ (ср. с [2]).

Пусть $r \in \{m, \mu\}$. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$A^0_{2r}(\xi', D_t)v(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{9}$$

$$(B^0_j(\xi', D_t)v)(0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^0_{j,k}(\xi')\sigma_i = \varphi_j, \qquad j = 1, \ldots, r + \varkappa. \tag{10}$$

Условие 4. Для любого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (9), (10), (8) имеет единственное решение $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ при $r = m$.

Условие 5. Для любого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (9), (10), (8) имеет единственное решение $(v(t), \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa)$ при $r = \mu$.

Поскольку при $\varepsilon = 0$ оператор $A^0(\xi', D_t, \varepsilon)$ совпадает с оператором $A^0_{2\mu}(\xi', D_t)$ порядка $2\mu < 2m$, то при малых $\varepsilon > 0$ требуются поправки к решению задачи (6), (7), позволяющие удовлетворить оставшимся $m - \mu$ краевым условиям. Из метода Вишика–Люстерника [1, 2] вытекает, что эти поправки являются решением следующей краевой задачи:

$$A^0(0, D_t, 1)v(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{11}$$

$$(B^0(0, D_t)v(t))|_{t=0} = \varphi_j, \qquad j = \mu + \varkappa + 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{12}$$

Условие 6. Для любых $\varphi_{\mu+\varkappa+1}, \ldots, \varphi_{m+\varkappa} \in \mathbb{C}$ задача (11), (12), (8) имеет единственное решение $v(t)$.

Определение. Краевая задача (1), (2) называется *эллиптической с малым параметром* если в произвольной точке $x \in \overline{G}$ выполняется условие 1 и в произвольной точке $x' \in \partial G$ выполняются условия 2–6.

Условия 4–6 были получены в работе автора [6]. Из условий 1–3 следует, что при произвольных фиксированных $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ и $\varepsilon > 0$ краевая задача (1), (2) эллиптическая как задача без параметра, но с дополнительными неизвестными функциями на границе области [3, 4].

Замечание 2. Рассматриваемый класс задач тесно связан со слабо эллиптическими граничными задачами [7, 8], которые являются обобщением эллиптическим с большим параметром граничных задач, рассмотренных в работах С. Агмона [9] и М. С. Аграновича, М. И. Вишика [10]. Слабо эллиптические задачи возникают, в частности, в теории параболических уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени [11]. Такие задачи получаются при замене "малого" параметра ε на "большой" параметр $\lambda = 1/\varepsilon > 0$ (подробнее см. [12]).

2. Функциональные пространства, зависящие от параметра. Введем необходимые нам функциональные пространства.

Под пространством $H^{r,s} = H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, $r \geqslant s$, понимается совокупность элементов соболевского пространства H^r, снабженная нормой

$$\|u\|_{r,s} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s (1 + \varepsilon^2|\xi|^2)^{(r-s)} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}, \tag{13}$$

где $\widehat{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$.

Введем обозначение

$$\Xi_{\rho,\sigma}(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} |\xi|^\sigma (1 + \varepsilon^2|\xi|^2)^{(\rho-\sigma)/2}, & \sigma \geqslant 0, \\ \varepsilon^{-\sigma}(1 + \varepsilon^2|\xi|^2)^{\rho/2}, & \sigma < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Определим $H^{r,s}(\mathbb{R}^n_+)$ как факторпространство $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)/H^{r,s}(\mathbb{R}^n)_-$, где $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)_-$ — подпространство $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций (распределений), сосредоточенных в полупространстве $\mathbb{R}^n_- = \{(x,t), t \leqslant 0\}$.

Поскольку при $\varepsilon > 0$ пространство $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ является подмножеством соболевского пространства $H^r(\mathbb{R}^n)$, то при $r > \ell + 1/2$ определен оператор следа $\mathcal{T}_\ell \colon u(x) \to D^\ell_n u(x', 0)$. Мы укажем нормы, в которых операторы следа будут равномерно ограниченными при $\varepsilon \to 0$. Используя обозначения (14), определим пространство $\mathcal{H}^{\rho,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})$ функций $f(x')$ с нормой

$$\|f, \mathcal{H}^{\rho,\sigma}(\mathbb{R}^{n-1})\| = \begin{cases} \|f, \mathbb{R}^{n-1}\| + \|\Xi_{\rho,\sigma}(D', \varepsilon)f, \mathbb{R}^{n-1}\|, & \sigma \geqslant 0, \\ \|\Xi_{\rho,\sigma}(D', \varepsilon)f, \mathbb{R}^{n-1}\|, & \sigma < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Аналоги пространства $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ на многообразии G с гладкой границей ∂G определяются стандартным образом. $H^{r,s}(G)$ — пространство сужений на G распределений из $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$, а $\mathcal{H}^{r,s}(\partial G)$ состоит из всех распределений на ∂G, которые в локальных координатах принадлежат $H^{r,s}(\mathbb{R}^{n-1})$ (см. [2, 7]).

3. Основной результат. Пусть, для простоты, числа r и s — целые, выполнено условие (3) и неравенства

$$r - s \geqslant 2m - 2\mu, \qquad r > m_j + \frac{1}{2}, \qquad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \tag{16}$$

Краевой задаче (1), (2) сопоставляется непрерывный оператор

$$\mathcal{A}\colon (u, \sigma_1, \ldots, \sigma_\varkappa) \longrightarrow (f, g_1, \ldots, g_{m+\varkappa}),$$

который действует в паре пространств

$$H^{r,s}(G) \times \prod_{i=1}^{\varkappa} \mathcal{H}^{r+\alpha_i-1/2, s+\alpha_i-1/2}(\partial G) \to$$
$$\to H^{r-2m, s-2\mu}(G) \times \prod_{j=1}^{m+\varkappa} \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\partial G). \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть задача* (1), (2) *эллиптическая с малым параметром и числа* r, s *удовлетворяют неравенствам* (16) *и неравенству* $m_{\mu+\varkappa} + 1/2 \leqslant s < m_{\mu+\varkappa+1} + 1/2$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|u; G\|_{r,s} + \sum_{i=1}^{\varkappa} \|\sigma_i; \mathcal{H}^{r+\alpha_i-1/2, s+\alpha_i-1/2}(\partial G)\| \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|A(x, D, \varepsilon)u; G\|_{r-2m, s-2\mu} + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \|g_j; \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\partial G)\| + \|u; G\|\right). \tag{18}$$

Здесь константа C *не зависит от* u, σ *и* ε.

4. Доказательство. Используя метод локализации (“замораживания коэффициентов”) доказательство сводится к доказательству соответствующей теоремы для модельных областей R^n и R^n_+. В случае всего пространства R^n теорема доказана в работе Л. Р. Волевича [13]. Ключевым моментом доказательства есть априорная оценка в полупространстве R^n_+. Укажем основные этапы доказательства. Рассмотрим следующую задачу в полупространстве R^n_+:

$$\begin{aligned} &A(D', D_n, \varepsilon)u(x) = f(x), \qquad x_n > 0, \\ &(B_j(D', D_n)u)(x', 0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \qquad j = 1, \ldots, m + \varkappa. \end{aligned} \tag{19}$$

В случае $f(x) \equiv 0$ верен следующий результат

Лемма 1. *Пусть для задачи* (19) *выполнены условия* (1)–(3) *и для фундаментальной системы решений задачи справедливы оценки основной теоремы [14, см. оценки* (15)*]. Пусть r и s — натуральные числа, удовлетворяющие* (16) *и условию $m_{\mu+\varkappa} + 1/2 \leqslant s < m_{\mu+\varkappa+1} + 1/2$. Тогда для решений однородной задачи*

$$
\begin{gathered}
A(D', D_n, \varepsilon)u(x) = 0, \qquad x_n > 0, \\
(B_j(D', D_n)u)(x', 0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(D')\sigma_k(x') = g_j(x'), \qquad j = 1, \ldots, m+\varkappa,
\end{gathered}
\tag{20}
$$

справедливо неравенство

$$
\begin{gathered}
\|u; \mathbb{R}^n_+\|_{r,s} + \sum_{j=1}^{\varkappa} \|\sigma_j; \mathcal{H}^{r+\alpha_j-1/2, s+\alpha_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})\| \leqslant \\
\leqslant \mathrm{const}\left(\|A(x, D, \varepsilon)u; \mathbb{R}^n_+\|_{r-2m, s-2\mu} + \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \|g_j; \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})\|\right).
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Доказательство этой леммы опирается на важное следствие, непосредственно вытекающее из основной теоремы [14].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда*

$$
\left(\int_0^\infty |D_n^\ell v_j(x_n, \xi', \varepsilon)|^2 dx_n\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{const}\frac{\Xi_{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\xi', \varepsilon)}{\Xi_{r-\ell, s-\ell}(\xi', \varepsilon)}. \tag{22}
$$

Установим лемму 1 (ср. с [2]). Учитывая обозначения (14), норма (13) при целых неотрицательных r и s будет эквивалентна норме

$$
\begin{gathered}
|[u; \mathbb{R}^n]|_{r,s} := \|u; \mathbb{R}^n\| + \left(\sum_{\ell=0}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Xi_{r-\ell, s-\ell}(D', \varepsilon) D_n^{2\ell} u(., x_n); \mathbb{R}^{n-1}\|^2 dx_n\right)^{1/2} = \\
= \|u; \mathbb{R}^n\| + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\ell=0}^{r} \Xi^2_{r-\ell, s-\ell}(\xi', \varepsilon) D_n^{2\ell} |\widehat{u}'(\xi', x_n)|^2 d\xi' dx_n\right)^{1/2},
\end{gathered}
\tag{23}
$$

где $\widehat{u}'(\xi', x_n)$ — частичное преобразование Фурье функции $u(x)$ по переменным x'.

Учитывая это, норму первого слагаемого в левой части (21) можно заменить на эквивалентную норму (23), после чего это неравенство редуцируется к набору неравенств для $\ell = 0, 1, \ldots, r$:

$$
\begin{gathered}
\int_0^\infty \sum_{\ell=0}^{r} \|\Xi_{r-\ell, s-\ell}(D', \varepsilon) D_n^{\ell} u(., x_n); \mathbb{R}^{n-1}\|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\varkappa} \|\sigma_j; \mathcal{H}^{r+\alpha_j-1/2, s+\alpha_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})\| \leqslant \\
\leqslant \mathrm{const} \sum_{j=1}^{m} \|g_j; \mathcal{H}^{r-m_j-1/2, s-m_j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})\|^2.
\end{gathered}
\tag{24}
$$

После частичного преобразования Фурье по переменным x' мы редуцируем доказательство (24) к оценкам для подинтегральных выражений:

$$\Xi^2_{r-\ell,s-\ell}(\xi',\varepsilon)\int\limits_0^\infty |D_n^\ell \widehat{u}'(\xi',x_n)|^2 dx_n + \sum_{j=1}^{\varkappa} \Xi^2_{r+\alpha_j-1/2,s+\alpha_j-1/2}(\xi',\varepsilon)|\sigma'_j(\xi')|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} \sum_{j=1}^{m+\varkappa} \Xi^2_{r-m_j-1/2,s-m_j-1/2}(\xi',\varepsilon)|g'_j(\xi')|^2, \tag{25}$$

где $\widehat{u}'(\xi',x_n)$ — частичное преобразование Фурье функции $u(x)$ по переменным x'.

Функция $\widehat{u}'(\xi',x_n)$, $\sigma'_1(\xi'),\ldots,\sigma'_\varkappa(\xi')$, является решением задачи типа (20) и в силу условия (3) представляется в виде

$$\widehat{u}'(\xi',x_n) = \sum_{j=1}^{m+\varkappa} g'_j(\xi')v_j(x_n,\xi',\varepsilon), \quad \sigma'_k(\xi') = \sum_{j=1}^{m+\varkappa} g'_j(\xi')\sigma'_{jk}(\xi',\varepsilon), \quad k=1,\ldots,\varkappa, \tag{26}$$

где $v_j(x_n,\xi',\varepsilon)$, $\sigma'_{jk}(\xi',\varepsilon)$, $k=1,\ldots,\varkappa$, — j-ые компоненты фундаментального решения задачи (20).

Подставив (26) в (25) и воспользовавшись (22), мы докажем оценку (20) для $f(x)\equiv 0$.

Перейдем теперь к доказательству оценки (20) в общем случае. После частичного преобразования Фурье получим:

$$\begin{aligned} &A(\xi',D_n,\varepsilon)\widehat{u}'(\xi',x_n) = \widehat{f}'(\xi',x_n), \qquad x_n>0,\\ &B_j(\xi',D_n)\widehat{u}'(\xi',0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(\xi')\widehat{\sigma}_k = \widehat{g}'_j(\xi'), \qquad j=1,\ldots,m+\varkappa. \end{aligned} \tag{27}$$

Представим $\widehat{u}'(\xi',x_n)$ в виде $\widehat{u}'(\xi',x_n) = v(\xi',x_n)+w(\xi',x_n)$, где $v(\xi',x_n)$ — специально подобранное решение уравнения

$$A(\xi',D_n,\lambda)v(\xi',x_n) = \widehat{f}'(\xi',x_n), \qquad x_n>0. \tag{28}$$

Тогда $w(\xi',x_n)$ будет решением задачи

$$\begin{aligned} &A(\xi',D_n,\varepsilon)w(\xi',x_n) = 0, \qquad x_n>0,\\ &B_j(\xi',D_n)w(\xi',0) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{jk}(\xi')\widehat{\sigma}_k = \widehat{g}'_j(\xi') - \chi_j(\xi'), \qquad j=1,\ldots,m+\varkappa, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\chi_j(\xi') = B_j(\xi',D_n)v(\xi',0)$. Оценки решений этой задачи получаются по схеме, изложенной в [2].

Автор выражает глубокую благодарность Л. Р. Волевичу, М. Л. Горбачуку за постановку задачи и А. А. Мурачу за обсуждение результатов.

1. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, вып. 5. – С. 3–122.
2. *Волевич Л. Р.* Метод Вишика–Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром // Тр. Моск. мат. о-ва. – 2006. – **67**. – С. 104–147.

3. *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – x+276 p.
4. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.
5. *Гиндикин С. Г., Волевич Л. Р.* Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. – Москва: УРСС, 1999. – 272 с.
6. *Заворотинський А. В.* Еліптичні з малим параметром граничні задачі з невідомими додатковими функціями на межі області. Формальний асимптотичний розв'язок // Наук. вісн. Чернівец. нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. Математика. – 2011. – **1**, № 1–2. – С. 40–46.
7. *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R.* Boundary value problems for a class of elliptic operator pencils // Integ. Eq. Operator Th. – 2000. – **8**. – P. 410–436.
8. *Denk R., Mennicken R., Volevich L. R.* On Elliptic Operator Pencils with General Boundary Conditions // Ibid. – 2001. – **9**. – P. 25–40.
9. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Commun. Pure and Appl. Math. – 1962. – **15**. – P. 119–147.
10. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические краевые задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 43–161.
11. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Науч. книга, 1998. – 436 с.
12. *Заворотинский А. В.* Слабо эллиптические с параметром граничные задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Оценки фундаментальной системы решений // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2012. – **23**, № 2. – С. 63–75.
13. *Volevich L. R.* General elliptic boundary value problems with small parameter // Spectral and Evolution problems: Proc. of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 12. – Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, 2002. – P. 171–181.
14. *Заворотинский А. В.* Эллиптические с малым параметром граничные задачи и неизвестными дополнительными функциями на границе области. Оценки фундаментальных решений // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **9**, № 2. – С. 147–164.

Институт математики НАН Украины, Киев
Черниговский национальный педагогический университет им. Т. Г. Шевченка

Поступило в редакцию 23.04.2013

А. В. Заворотинський

Про еліптичні з малим параметром крайові задачі

Розглянуто еліптичні крайові задачі, в яких оператор в області поліноміально залежить від малого параметра, а в крайових умовах містяться додаткові невідомі функції. Знайдено аналог умови типу Шапіро–Лопатинського, який дозволяє в спеціальних функціональних просторах, залежних від параметра, отримати апріорну оцінку для досліджуваної задачі.

A. V. Zavorotynskiy

On elliptic boundary-value problems with small parameter

We investigate elliptic boundary-value problems where the operator defined in a domain depends on a small parameter, and the boundary conditions contain additional functions defined on the boundary of the domain. We found an analogue of conditions of the Shapiro–Lopatinskii type for the existence of an a priori estimate of the problem in special function spaces depending on a parameter.