УДК 517.54

А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский

Экстремальные задачи для частично неналегающих областей со свободными полюсами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Решен ряд задач об экстремальном разбиении комплексной плоскости со свободными полюсами на лучевых системах точек. Эти результаты распространяют некоторые известные на более широкие классы областей, допускающих частичное налегание.

Экстремальные задачи о неналегающих областях составляют известное направление геометрической теории функций комплексного переменного. Исследованию этого направления посвящено множество работ (см., например, [1–15]). В работе А. К. Бахтина [1, с. 95] было получено решение одной достаточно общей экстремальной задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на (n, m)-лучевой системе точек. В данной работе этот результат распространяется на области, допускающие частичное налегание.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация или сфера Римана, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Для фиксированных чисел n, $m \in \mathbb{N}$ систему точек

$$A_{n,m} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C}\colon k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}\},$$

назовем (n, m)-лучевой системой точек, если при всех $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&0 < |a_{k,1}| < \dots < |a_{k,m}| < \infty;\\
&\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \dots = \arg a_{k,m} =: \theta_k;\\
&0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.
\end{aligned}\tag{1}$$

Для таких систем точек рассмотрим следующие величины:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}[\theta_{k+1} - \theta_k], \qquad k = \overline{1,n}, \qquad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \qquad \alpha_0 := \alpha_n, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Если $m = 1$, получаем n-лучевую систему точек, которую будем обозначать A_n (см. [1–5]).

Рассмотрим систему угловых областей:

$$P_k = \{w \in \mathbb{C}\colon \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Далее будем пользоваться обозначениями, принятыми в работе [1].

Для произвольной (n,m)-лучевой системы и фиксированного $R \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим "управляющий" функционал

$$M_R := M_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{1/\alpha_k}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{1/\alpha_{k-1}}\right)\right]^{1/2}|a_{k,p}|,$$

где $\chi(t) = \dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$.

На n-лучевой системе точек A_n рассмотрим следующий "управляющий" функционал:

$$L(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{1/(2\alpha_k)}\right)\cdot|a_k|.$$

Если T_n — произвольный набор из n различных точек единичной окружности и $\partial U \setminus T_n$, где $\partial U = \{z\colon |z| = 1\}$, состоит из объединения n непересекающихся дуг с длинами $\gamma_1 = \sigma_1\pi, \ldots, \gamma_n = \sigma_n\pi$, то

$$\mu(T_n) := \prod_{k=1}^{n}\sigma_k.$$

При каждом $k=\overline{1,n}$ обозначим через $z_k(w)$ ту ветвь многозначной аналитической функции $\zeta(w) = -i(e^{-i\theta_k}w)^{1/\alpha_k}$, которая реализует однолистное и конформное отображение области P_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$, при этом луч $\arg w = (\theta_k+\theta_{k+1})/2$ преобразуется в положительную действительную полуось. Тогда функция

$$\zeta_k^{(R)}(w) := \frac{R^{1/\alpha_k} - z_k(w)}{R^{1/\alpha_k} + z_k(w)}$$

однолистно и конформно отображает область P_k на единичный круг $U = \{z\colon |z| < 1\}$, $k=\overline{1,n}$. Обозначим $\omega_{k,p}^{(1)}(R) := \zeta_k^{(R)}(a_{k,p})$, $\omega_{k,p}^{(2)}(R) := \zeta_k^{(R)}(a_{k+1,p})$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)}(R) := \omega_{n,p}^{(2)}(R)$ $(k=\overline{1,n}, p=\overline{1,m})$. При всех $k=\overline{1,n}$ множество $\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^{m}\bigcup\{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^{m}$ состоит из $2m$ различных точек на $\partial U_R := \{z\colon |z| = R\}$. Тогда пусть

$$\mu_k(R) := \mu\Big(\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^{m}\bigcup\{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^{m}\Big), \qquad k=\overline{1,n}.$$

Пусть D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — произвольное открытое множество и $w = a \in D$, тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D, содержащую a. Для произвольной (n,m)-лучевой системы $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ и открытого множества D, $A_{n,m} \subset D$ обозначим $D_k(a_{p,s})$ связную компоненту множества $D(a_{p,s})\bigcap\overline{P_k}$, содержащую точку $a_{p,s}$, $k=\overline{1,n}$, $p=k, k+1$, $s=\overline{1,m}$, $a_{n+1,s} := a_{1,s}$.

Будем говорить, что открытое множество D, $A_{n,m} \subset D$ удовлетворяет условию неналегания относительно заданной (n,m)-лучевой системы $A_{n,m}$, если

$$D_k(a_{p,l})\bigcap D_k(a_{q,s}) = \varnothing \tag{2}$$

при каждом фиксированном $k=\overline{1,n}$ и для всех различных точек $a_{p,l}$ и $a_{q,s}$, принадлежащих $\overline{P}_k$.

Систему областей $\{B_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, назовем системой частично неналегающих областей, если

$$D := \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{p=1}^{m} B_{k,p} \tag{3}$$

является открытым множеством, удовлетворяющим условию (2).

Обозначим через $r(B;a)$ внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см. [6–9]).

Предметом изучения нашей работы являются следующая задача.

Задача. Пусть n, $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Определить максимум величины

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}; a_{k,p}),$$

где $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ — любая (n,m)-лучевая система точек вида (1), а $\{B_{k,p}\}$ — произвольный набор частично неналегающих областей вида (3), $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, и описать все экстремали $(k = \overline{1,n}, p = \overline{1,m})$.

Такого рода задачи для открытого множества, удовлетворяющего условию (2), решены в работе [1].

Теорема 1. *Пусть $R \in \mathbb{R}_+$, n, $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда для произвольной (n,m)-лучевой системы точек вида (1) и любого набора частично неналегающих областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in$ $\in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$ справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}; a_{k,p}) \leqslant 2^{nm} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{m} \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k(R) \right)^{1/2} M_R(A_{n,m}).$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $\{a_{k,p}\}$ и области $\{B_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left((R^{n/2} - iw^{n/2})^{2m} + \left(R^{n/2} + iw^{n/2}\right)^{2m}\right)^2} dw^2.$$

При $m = 1$ можно получить более сильный результат.

Теорема 2. *Пусть $R \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $(A_n) = R^n$, и любого набора частично неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k; a_k) \leqslant 2^{n} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) L(A_n).$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и области $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2} dw^2. \tag{4}$$

Как следствия теоремы 2 получаем следующие результаты.

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $L(A_n) = 1$, и любого набора частично неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k; a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{5}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $\{a_k\}_{k=1}^n$ и области $\{B_k\}_{k=1}^n$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}dw^2.$$

Следствие 2 [1]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $L(A_n) = 1$, и любого набора попарно неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство* (5). *Знак равенства в этом неравенстве достигается при условиях следствия 1.*

Следствие 3 [6–8]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, и любого набора попарно неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство* (5). *Знак равенства в этом неравенстве достигается при условиях следствия 1.*

Следствие 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $L(A_n) = 1$, и любого набора частично неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k; a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n. \tag{6}$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается при условиях следствия 1.

Следствие 5 [1]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $L(A_n) = 1$, и любого набора попарно неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство (6). Знак равенства в этом неравенстве достигается при условиях следствия 1.*

Следствие 6 [6–8]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, и любого набора попарно неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство* (6). *Знак равенства в этом неравенстве достигается при условиях следствия 1.*

Следствие 7. *Пусть $R \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $L(A_n) = R^n$, и любого набора частично неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k; a_k) \leqslant \left(\frac{4R}{n}\right)^n.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда точки $\{a_k\}_{k=1}^n$ и области $\{B_k\}_{k=1}^n$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (4).

Доказательство теоремы 1. Согласно определению системы частично неналегающих областей, соотношением (3) введено открытое множество D, удовлетворяющее (2). Отсюда имеем

$$B_{k,p} \subset D, \qquad k = \overline{1,n}, \qquad p = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Пользуясь результатами работ [6, 7, 9], из (7) получаем

$$r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant r(D, a_{k,p}), \qquad k = \overline{1,n}, \qquad p = \overline{1,m}. \tag{8}$$

Перемножая неравенства (8), окончательно делаем вывод, что

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}; a_{k,p}) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D; a_{k,p}).$$

Далее, используя теорему 3.1.3 [1], получаем окончательный результат. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится подобно доказательству теоремы 1.

1. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ. – 2008. – Т. 73. – 308 с.
2. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 596–610.
3. *Дубинин В. Н.* О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена // Мат. сб. – 2009. – **200**, № 10. – С. 25–38.
4. *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 298–303.
5. *Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере // Доп. НАН України. – 2008. – № 9. – С. 31–36.
6. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
7. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3–76.
8. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 1997. – **237**. – С. 56–73.
9. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
10. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159–245.
11. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
12. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
13. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 2001. – **276**. – С. 253–275.
14. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Там же. – 2002. – **286**. – С. 103–114.
15. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.04.2013

О. К. Бахтін, А. Л. Таргонський

Екстремальні задачі для частково неперетинних областей з вільними полюсами

Розв'язано низку задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на променевій системі точок. Ці результати поширюють деякі відомі на більш широкі класи областей, які допускають часткове налягання.

A. K. Bakhtin, A. L. Targonskii

Extremal problems for partially non-overlapping domains with free poles

We solved several problems on extremal subdivision of complex plane with free poles on the raywise system of points. These results generalized some famous ones on a wider class of domains, which satisfy some conditions of overlapping.