ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, О. В. Коваленко

Задача Колмогорова на классе кратно монотонных функций

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Получены необходимые и достаточные условия на систему положительных чисел M_{k_1}, $M_{k_2}, \dots, M_{k_d}$, $0 \leqslant k_1 < \dots < k_d \leqslant r$, для того, чтобы гарантировать существование r-кратно монотонной функции такой, что $\|x^{(k_i)}\|_\infty = M_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots, d$.

Пусть G обозначает действительную ось $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ или отрицательную полуось $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. Через $L_\infty(G)$ обозначим пространство существенно ограниченных функций $x\colon G \to \mathbb{R}$ с обычной нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_\infty(G)}$.

Для $r \in \mathbb{N}$ через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство функций $x\colon G \to \mathbb{R}$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$, $x^{(0)} = x$, и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Положим $L^r_{\infty,\infty}(G) = L^r_\infty(G) \bigcap L_\infty(G)$.

А. Н. Колмогоров (см. [1]) сформулировал следующую задачу:

Задача Колмогорова. *Пусть заданы класс функций $X \subset L^r_{\infty,\infty}(G)$ и произвольная система d целых чисел $0 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_d \leqslant r$. Требуется найти необходимые и достаточные условия на систему положительных чисел*

$$M_{k_1}, M_{k_2}, \dots, M_{k_d}, \tag{1}$$

которые бы обеспечивали существование функции $x \in X$ такой, что

$$\|x^{(k_i)}\| = M_{k_i}, \qquad i = 1, \dots, d. \tag{2}$$

Ясно, что задача Колмогорова может быть сформулирована для классов функций X с различными областями определения (ось, полуось, отрезок, окружность и т. д.), функций многих переменных, для других норм (возможно, различных для производных различных порядков).

Отметим, что для $d \geqslant 3$ любое точное неравенство для норм производных $\|x^{(k_i)}\|$, $\|x^{(k_l)}\|$ и $\|x^{(k_m)}\|$ $(k_i < k_l < k_m)$ функций $x \in X$ является необходимым условием на числа M_{k_i},

M_{k_l}, и M_{k_m} из (1) для того, чтобы существовала функция $x \in X$, для которой выполняются соотношения (2). Такие неравенства называются неравенствами типа Ландау–Колмогорова и имеют многочисленные приложения во многих областях математики (см., например, [2, гл. 7, 8]). Отметим, что в случае $d = 3$ точные неравенства такого типа обычно дают полное (необходимые и достаточные условия) решение задачи Колмогорова.

Обзор известных результатов. Полное решение сформулированной задачи для трех чисел (в случае, когда $d = 3$, $k_1 = 0$, $k_3 = r$ и $0 < k_2 = k < r$) и класса $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ получил Колмогоров [1]. Он показал, что существует функция $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$, для которой выполняются соотношения (2), тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$M_k \leqslant \frac{\|\varphi_{r-k}\|}{\|\varphi_r\|^{1-k/r}} M_0^{1-k/r} M_r^{k/r},$$

где φ_r — r-я периодическая первообразная с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$. Решение задачи Колмогорова для трех чисел в случае $k_1 > 0$ содержится в [2, §9.1].

В случае $d = 3$, $k_1 = 0$, $k_3 = r$ и класса $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ решение задачи Колмогорова следует из работы И. Шенберга, А. Каваретта [3].

А. М. Родов [4] впервые рассмотрел задачу Колмогорова для $d > 3$. Решения задачи Колмогорова при $d > 3$ для классов функций, заданных на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, известны в следующих случаях:

1. $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$; $k_1 = 0$, $k_2 = r - 2$, $k_3 = r - 1$, $k_4 = r$ (см. [4]).
2. $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$; $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r - 2$, $k_4 = r - 1$, $k_5 = r$ (см. [4]).
3. $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$; $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r - 1$, $k_4 = r$ (см. [5]).
4. $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$; $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r - 2$, $k_4 = r$ (см. [6]).

Некоторые другие, более частные результаты, можно найти в работе [7].

Что касается случая произвольного d (с $k_d = r$), то в работе В. К. Дзядыка, В. А. Дубовика [8] приведены некоторые достаточные условия на систему чисел (1), обеспечивающие существование функции $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$, для которой имеют место соотношения (2).

Для класса функций $X = L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ решение задачи Колмогорова при $d > 3$ известно только в следующем случае: $d = 4$, $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r - 1$, $k_4 = r$ [9].

Для заданных r, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leqslant r$, обозначим через $L^{r,m}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ класс функций $x \in \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, которые неотрицательные вместе со своими производными до порядка m (производная порядка m должна быть неотрицательной почти всюду в случае $m = r$). Будем называть этот класс классом m-кратно монотонных функций.

В. М. Оловянишников [10] (в случае, когда $d = 3$, $k_1 = 0$, $k_3 = r$ и $0 < k_2 = k < r$) показал, что существует функция $x \in L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, для которой выполняются соотношения (2) тогда и только тогда, когда для чисел M_0, M_k, M_r имеет место неравенство (ниже $\phi_r(t) := l \cdot (r!)^{-1} \cdot (t+1)^r_+$)

$$M_0 \geqslant \frac{\|\phi_r\|}{\|\phi_{r-k}\|^{r/(r-k)}} M_k^{r/(r-k)} M_r^{-k/(r-k)}.$$

В [11] и независимо в [12] было получено обобщение этого результата на класс $(r-2)$-кратно монотонных функций. Кроме того, в [13] было получено решение задачи Колмогорова для трех чисел и класса $L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ в случае $k_1 > 0$.

В случае $d > 3$ известны следующие результаты для классов кратно монотонных функций:

1. $X = L^{r,r-2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и $k_1 = 0 < k_2 < k_3 = r-1$, $k_4 = r$ (см. [14]).
2. $X = L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ и $k_1 = 0 < k_2 < k_3 < k_4 = r$ (см. [13]).

Пусть заданы $d \in \mathbb{N}$ и целые числа $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_d \leqslant r$. Положим $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$. Для $i = 1, \ldots, d$ положим $\mathbf{k}^i = (k_i, k_{i+1}, \ldots, k_d)$ так, что $\mathbf{k}^1 = \mathbf{k}$. Множества положительных чисел $\{M_{k_1}, \ldots, M_{k_d}\}$ и $\{M_{k_i}, \ldots, M_{k_d}\}$ обозначим через $M_{\mathbf{k}}$ и $M_{\mathbf{k}^i}$ соответственно. Для заданных $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$ и $x \in X$ положим

$$M_{\mathbf{k}}(x) := (\|x^{(k_1)}\|, \ldots, \|x^{(k_d)}\|).$$

Определение 1. Назовем множество $M_{\mathbf{k}}$ **допустимым** для класса функций $X \subset \subset L^r_{\infty,\infty}(G)$, если существует функция $x \in X$ такая, что $M_{\mathbf{k}}(x) = M_{\mathbf{k}}$. Семейство всех допустимых множеств $M_{\mathbf{k}}$ обозначим $A_d(X) = A_d(X, \mathbf{k})$.

Отметим, что во всех описанных выше случаях решение задачи Колмогорова можно трактовать следующим образом. Для класса функций X находится d-параметрическое семейство функций F (порождающее семейство) такое, что

$$A_d(X) = \{M_{\mathbf{k}}(x)\colon x \in F\}. \tag{3}$$

При этом естественно на множество F наложить требование минимальности, которое, например, может состоять в том, что для произвольного $x \in F$ множество $F \setminus \{x\}$ уже не является порождающим семейством.

Определение 2. Минимальное d-параметрическое семейство функций $F \subset X$ такое, что для заданного $\mathbf{k}$ имеет место (3), будем называть порождающим для $A_d(X, \mathbf{k})$ и обозначать через $F_d(X, \mathbf{k})$.

Используя эти определения мы можем переформулировать задачу Колмогорова.

Задача Колмогорова. *Для заданного класса функций $X \subset L^r_{\infty,\infty}(G)$ и фиксированных d и $\mathbf{k}$ найти (или охарактеризовать) порождающее множество $F_d(X, \mathbf{k})$ для $A_d(X, \mathbf{k})$.*

Упомянутый результат Колмогорова может быть записан в следующем виде:

$$F_3(L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}), \mathbf{k}) = \{a\varphi_r(\lambda t) + C\colon a > 0, \lambda > 0, C \geqslant 0\},$$

а результат Оловянишникова — в виде

$$F_3(L^{r,r-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-), \mathbf{k}) = F_3(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-), \mathbf{k}) = \{a\phi_r(\lambda t) + C\colon a > 0,\ \lambda > 0,\ C \geqslant 0\},$$

где $\mathbf{k} = (k_1 = 0, k_2 = k, k_3 = r)$.

Основные результаты. Нам понадобятся следующие определения.

Пусть заданы r, $s \in \mathbb{N}$, $a_1 > a_2 > \cdots > a_s > 0$ и $l > 0$. Определим функцию, которую мы будем называть сплайном порядка r с узлами $-a_1 < -a_2 < \cdots < -a_s < 0$, следующим образом:

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s, l; t) := \frac{l}{r!} \sum_{j=1}^{s} (-1)^{j+1} (t + a_j)^r_+.$$

Пусть $\Phi_{r,n} := \{\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s, l; t)\colon s \in \mathbb{N}, s \leqslant n, a_1 > a_2 > \cdots > a_s > 0, l > 0\}$ обозначает множество всех сплайнов порядка r с не более чем n узлами.

Пусть заданы $d \in \mathbb{N}$ и целые числа $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_d \leqslant r$.

Определение 3. Допустимое множество $M_{\mathbf{k}} \in A_d$ является множеством **типа 1**, если существует сплайн $\varphi \in \Phi_{r,d-1} \setminus \Phi_{r,d-2}$ такой, что $M_{\mathbf{k}}(\varphi) = M_{\mathbf{k}}$. Семейство всех допустимых множеств $M_{\mathbf{k}}$ типа 1 мы будем обозначать A_d^1.

Определение 4. Допустимое множество $M_{\mathbf{k}} \in A_d$ является множеством **типа 2**, если существует сплайн $\varphi \in \Phi_{r,d-2}$ такой, что $M_{\mathbf{k}}(\varphi) = M_{\mathbf{k}}$. Семейство всех допустимых множеств $M_{\mathbf{k}}$ типа 2 мы будем обозначать A_d^2.

Определение 5. Допустимое множество $M_{\mathbf{k}} \in A_d$ с $k_1 = 0$ является множеством **типа 3**, если существует константа $C > 0$ и сплайн $\varphi \in \Phi_{r,d-1}$ такой, что $M_{\mathbf{k}}(\varphi + C) = M_{\mathbf{k}}$, и это множество не является множеством типа 1. Семейство всех допустимых множеств $M_{\mathbf{k}}$ типа 3 мы будем обозначать A_d^3.

Теорема 1 (существование и экстремальные свойства сплайна). *Пусть заданы r, $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 3$, и целые числа $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_d \leqslant r$. Пусть также задана функция $x(t) \in L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$. Существует сплайн $\varphi(t) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_s, l; t) \in \Phi_{r,d-1}$ и число $C \geqslant 0$ такие, что $M_{\mathbf{k}}(\varphi + C) = M_{\mathbf{k}}(x)$.*

Кроме того, если $k_d = r$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ таково, что для некоторого $i = 0, 1, \ldots, d-1$ выполняются соотношения $k_i < k < k_{i+1}$ ($k_0 := -1$) и $x^{(k_1)} \neq \varphi^{(k_1)}$, то

$$(-1)^i \|x^{(k)}\| > (-1)^i \|\varphi^{(k)}\|,$$

а если $k_d < r$ и $x^{(k_1)} \neq \varphi^{(k_1)}$, то

$$\|x^{(r)}\| > \|\varphi^{(r)}\|.$$

Для заданного $M_{\mathbf{k}}$ сплайн $\varphi \in \Phi_{r,d-1}$ такой, что $M_{\mathbf{k}}(\varphi) = M_{\mathbf{k}}$, мы будем обозначать $\varphi(M_{\mathbf{k}}; t)$.

Теорема 2 (решение задачи Колмогорова в случае $k_d = r$). *Пусть заданы $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 3$, и целые числа $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_d = r$.*

$$\{M_{\mathbf{k}} \in A_d(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-))\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{r} M_{\mathbf{k}^2} \in A^1_{d-1} \\ M_{k_1} \geqslant \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \end{array} \right\} \bigvee \left\{ \begin{array}{r} M_{\mathbf{k}^2} \in A^2_{d-1} \\ k_1 > 0 \\ M_{k_1} = \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \end{array} \right\} \bigvee \left\{ \begin{array}{r} M_{\mathbf{k}^2} \in A^2_{d-1} \\ k_1 = 0 \\ M_{k_1} \geqslant \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \end{array} \right\}.$$

Кроме того,

$$\left\{ \begin{array}{r} M_{\mathbf{k}^2} \in A^1_{d-1} \\ M_{k_1} \geqslant \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} M_{\mathbf{k}} \in A^1_d, & \textit{если} \quad M_{k_1} > \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \\ M_{\mathbf{k}} \in A^2_d, & \textit{если} \quad M_{k_1} = \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{r} M_{\mathbf{k}^2} \in A^2_{d-1} \\ k_1 > 0 \\ M_{k_1} = \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \end{array} \right\} \Longrightarrow \{M_{\mathbf{k}} \in A^2_d\},$$

$$\left\{ \begin{array}{r} M_{\mathbf{k}^2} \in A^2_{d-1} \\ k_1 = 0 \\ M_{k_1} \geqslant \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} M_{\mathbf{k}} \in A^2_d, & \textit{если} \quad M_{k_1} = \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \\ M_{\mathbf{k}} \in A^3_d, & \textit{если} \quad M_{k_1} > \|\varphi^{(k_1)}(M_{\mathbf{k}^2})\| \end{array} \right\}.$$

Замечание. Легко видеть, что $\{M_{k_1}, M_{k_2}\} \in A_1^1$ для всех $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant r$ и всех M_{k_1}, $M_{k_2} > 0$. Поэтому теорема 2 в случае $d = 3$ может быть переписана в следующем виде (см. [10, 13]): $(M_{k_1}, M_{k_2}, M_r) \in A_3(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-))$ тогда и только тогда, когда

$$M_{k_1} \geqslant \frac{(r-k_2)!^{(r-k_1)/(r-k_2)}}{(r-k_1)!} M_{k_2}^{(r-k_1)/(r-k_2)} M_r^{(k_1-k_2)/(r-k_2)}. \tag{4}$$

Теорема 3 (решение задачи Колмогорова в случае $k_d < r$). *Пусть заданы $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 3$, и целые числа $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_d < r$. $M_{\mathbf{k}} \in A_d(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-))$ тогда и только тогда, когда $M_{\mathbf{k^2}} \in A_{d-1}(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-))$ и*

$$M_{k_1} > \lim_{l\to\infty} \|\phi_l^{(k_1)}\|,$$

где сплайн $\phi_l \in \Phi_{r,d-1}$ таков, что $\|\phi_l^{(k_i)}\| = M_{k_i}$, $i = 2,\ldots,d$, и $\|\phi_l^{(r)}\| = l$ (который существует для всех $l \geqslant \|\varphi^{(r)}(M_{\mathbf{k^2}})\|$).

Теорема 4 (переформулированное решение задачи Колмогорова). *Пусть заданы $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 3$, и вектор $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_d)$ с $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_d \leqslant r$. Тогда в случае $k_d = r$*

$$F_d(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-), \mathbf{k}) = \{\Phi_{r,d-1} \setminus \Phi_{r,d-2}\} \bigcup \{\varphi + C \colon \varphi \in \Phi_{r,d-2}, C \geqslant 0\},$$

а в случае $k_d < r$

$$F_d(L^{r,r}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-), \mathbf{k}) = \Phi_{r,d-1} \setminus \Phi_{r,d-2}.$$

1. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. тр. Математика, механика. – Москва: Наука, 1985. – С. 252–263.
2. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения // Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
3. *Schoenberg I. J., Cavaretta A.* Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on half line // Proc. of Conf. on Approximation theory. – Varna, 1970. – P. 297–308.
4. *Родов А. М.* Зависимости между верхними гранями производных функций действительного переменного // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1946. – **10**, № 3. – С. 257–270.
5. *Дзядык В. К., Дубовик В. А.* О проблеме А. Н. Колмогорова о зависимостях между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 3. – С. 291–299.
6. *Бабенко В. Ф., Коваленко О. В.* О зависимости между нормой функции и нормами ее производных порядка k, $r-2$ и r, $0 < k < r-2$ // Там же. – 2012. – **64**, № 5. – С. 597–603.
7. *Родов А. М.* Достаточные условия существования функции действительного переменного с заданными верхними гранями модулей самой функции и ее пяти последовательных производных // Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. – 1954. – **16**. – С. 65–72.
8. *Дзядык В. К., Дубовик В. А.* К проблеме А. Н. Колмогорова о зависимостях между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 3. – С. 300–317.
9. *Babenko V. F., Britvin Y. E.* On Kolmogorov's problem about existence of a function with given norms of its derivatives // East J. Approx. – 2002. – **8**, No 1. – P. 95–100.
10. *Оловянишников В. М.* К вопросу о неравенствах между верхними гранями последовательных производных на полупрямой // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 2 (42). – С. 167–170.
11. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Неравенства для производных монотонных функций // Приближение функций. Теорет. и прикл. аспекты: Сб. ст., посвящ. памяти проф. А. В. Ефимова. – Москва: МИЭТ, 2003. – С. 199–211.
12. *Babenko V., Babenko Yu.* The Kolmogorov inequalities for multiply monotone functions defined on a half-line // East J. Approx. – 2005. – **11**, No 2. – P. 169–186.

13. *Babenko V., Babenko Yu.* On the Kolmogorov's problem for the upper bounds of four consecutive derivatives of a multiply monotone function // Constr. Approx. – 2007. – **26**, No 1. – P. 83–92.
14. *Ятцелев М. Л.* Неравенство между четырьмя верхними гранями последовательных производных на полупрямой // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 1998. – **4**. – С. 106–111.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
Университет Кеннесоу, США

Поступило в редакцию 09.04.2013

В. Ф. Бабенко, Ю. В. Бабенко, О. В. Коваленко

Задача Колмогорова на класі кратно монотонних функцій

Отримано необхідні та достатні умови на систему додатних чисел $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots, M_{k_d}$, $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_d \leqslant r$, для того, щоб гарантувати існування r-кратно монотонної функції такої, що $\|x^{(k_i)}\|_\infty = M_{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$.

V. F. Babenko, Yu. V. Babenko, O. V. Kovalenko

Kolmogorov problem on a class of multiply monotone functions

Necessary and sufficient conditions for a system of positive numbers $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots, M_{k_d}$, $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_d \leqslant r$, to guarantee the existence of a multiply monotone function such that $\|x^{(k_i)}\|_\infty = M_{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$ are found.