УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ СІМ'Ї ОПУКЛИХ ЛІПШІЦЕВИХ ФУНКЦІЙ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ

У статті встановлено критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірна апроксимація, скінченновимірний підпростір.*

Вступ. Проблеми відновлення функціональних залежностей, які не означені точно, приводять до задачі найкращої у деякому розумінні апроксимації багатозначного відображення множинами однозначних відображень.

У праці [1] розглянуто, зокрема, задачу найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Більш загальною є задача найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень, яка розглядається у цій роботі.

Постановка задачі. Нехай S — метричний компакт, s — його елементи, X — лінійний над полем комплексних чисел сепарабельний нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою: $\|g\| = \max_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність усіх непорожніх компактів простору X, $\tilde{C}(S,K(X))$ — множина багатозначних півнеперервних зверху на S відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$, V — скінченновимірний підпростір простору $C(S,X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S,X)$, $i=\overline{1,n}$, $\{p_s\}_{s\in S}$ — сім'я на X опуклих ліпшіцевих функцій $p_s, s\in S$, з константою Ліпшіця l таких, що відображення $s\in S \to p_s(x)$ неперервне на S при кожному $x\in X$.

Задачею найкращої у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s\in S}$ рівномірної апроксимації компактнозначного відображення $a\in \tilde{C}(S,K(X))$ підпростором V неперервних однозначних відображень будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y-g(s)). \tag{1}$$

Відображення $g^* \in V$ таке, що

$$\alpha_a^*(V) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right),$$

будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Отримані критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (1) слугуватимуть відправним пунктом для побудови чисельних методів відшукання величини (1) та її екстремального елемента.

Мета роботи. Встановити критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s\in S}$ опуклих ліпшіцевих функцій $p_s, s\in S$, з константою Ліпшіця l рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Допоміжні твердження. Нехай X^* — простір, спряжений з X, X_R — дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором X, тобто простір X розглядуваний лише над полем дійсних чисел, X_R^* — простір, спряжений з X_R.

Елемент $\varphi \in X_R^*$ називається субградієнтом функції p, заданої на X, в точці $x_0 \in X$, якщо

$$p(x) - p(x_0) \ge \varphi(x - x_0), x\in X.$$

Множину субградієнтів функції p в точці $x_0 \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial p(x_0)$.

Якщо p є опуклою неперервною на X функцією, то для $x_0 \in X$ $\partial p(x_0)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [2, с. 327]).

Для $x_0 \in X$ будемо позначати

$$\partial_C p\left(x_0\right)=\left\{f : f \in X^*,\ \operatorname{Re} f \in \partial p\left(x_0\right)\right\}.$$

Очевидно (див., наприклад, [3, с. 327]), що

$$\partial_C p\left(x_0\right)=\left\{f : f \in X^*,\ f\left(x\right)=\varphi\left(x\right)-i\varphi\left(x\right),\ \varphi \in \partial p\left(x_0\right)\right\}.$$

Для $g^* \in C\left(S, X\right)$ покладемо

$$S_a\left(g^*\right)=\left\{s : s \in S,\ \max_{y \in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)=\max_{s \in S}\max_{y \in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)\right\},$$

а для $s \in S_a\left(g^*\right)$ покладемо

$$a\left(s, g^*\right)=\left\{y : y \in a\left(s\right), p_s\left(y-g^*(s)\right)=\max_{y \in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right)\right\}.$$

Покладемо далі

$$L\left(g^*\right)=\bigcup_{s \in S_a\left(g^*\right)}\ \bigcup_{y \in a\left(s, g^*\right)}\ \bigcup_{f \in \partial_C p_s\left(y-g^*\left(s\right)\right)}\left(\operatorname{Re} f\left(g_1\left(s\right)\right),\ldots,\operatorname{Re} f\left(g_n\left(s\right)\right)\right).$$

Твердження 1. Множина $L\left(g^*\right)$ є компактом простору R^n.

Доведення. Для кожного $s \in S_a\left(g^*\right)$, $y \in a\left(s, g^*\right)$, $f \in \partial_C p_s\left(y-g^*\left(s\right)\right)$ маємо, що

$$\left\|\left(\operatorname{Re} f\left(g_1\left(s\right)\right),\ldots,\operatorname{Re} f\left(g_n\left(s\right)\right)\right)\right\|=$$

$$=\sqrt{\left(\operatorname{Re} f\left(g_1\left(s\right)\right)\right)^2+\ldots+\left(\operatorname{Re} f\left(g_n\left(s\right)\right)\right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\|f\|^2\left\|g_1\left(s\right)\right\|^2+\ldots+\|f\|^2\left\|g_n\left(s\right)\right\|^2} \leq l\sqrt{\left\|g_1\right\|^2+\ldots+\left\|g_n\right\|^2},$$

оскільки $\|f\| \leq l$ для всіх $f \in \bigcup_{s \in S}\bigcup_{x \in X}\partial_C p_s\left(x\right)$ (див. [4]).

Звідси випливає обмеженість множини $L\left(g^*\right)$.

Переконаємося у замкненості цієї множини. Нехай $\left(a_1^*,\ldots,a_n^*\right)$ є граничною точкою $L\left(g^*\right)$. Тоді існують послідовності $\left\{s_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{f_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $s_k \in S_a\left(g^*\right)$, $y_k \in a\left(s_k, g^*\right)$, $f_k \in \partial_C p_{s_k}\left(y_k-g^*\left(s_k\right)\right)$ і

$$\lim_{k \to \infty}\operatorname{Re} f_k\left(g_i\left(s_k\right)\right)=a_i^*, i=\overline{1, n}. \tag{2}$$

Оскільки S — метричний компакт, а X — сепарабельний нормований простір та $\|\operatorname{Re} f_k\| \le l$, $k = 1, 2, \ldots$, то з послідовностей $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{\operatorname{Re} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати відповідно підпослідовності $\{s_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ та $\{\operatorname{Re} f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ такі, що підпослідовність $\{s_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ сильно збігається до $s^* \in S$, а підпослідовність $\{\operatorname{Re} f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ слабко збігається до $\varphi^* \in X_R^*$.

Внаслідок (2)

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{Re} f_{k_m}\left(g_i\left(s_{k_m}\right)\right) = a_i^*, i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

З іншого боку, для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left|\operatorname{Re} f_{k_m}\left(g_i\left(s_{k_m}\right)\right) - \varphi^*\left(g_i\left(s^*\right)\right)\right| \le l\left\|g_i\left(s_{k_m}\right) - g_i\left(s^*\right)\right\| +$$
$$+\left|\operatorname{Re} f_{k_m}\left(g_i\left(s^*\right)\right) - \varphi^*\left(g_i\left(s^*\right)\right)\right|.$$

Враховуючи неперервність відображень $g_i, i = \overline{1,n}$, слабку збіжність послідовності $\{\operatorname{Re} f_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ до φ^*, звідси робимо висновок, що

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{Re} f_{k_m}\left(g_i\left(s_{k_m}\right)\right) = \varphi^*\left(g_i\left(s^*\right)\right), i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

З (3), (4) одержимо, що

$$\left(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*\right) = \left(\varphi^*\left(g_1\left(s^*\right)\right), \ldots, \varphi^*\left(g_n\left(s^*\right)\right)\right). \tag{5}$$

Оскільки $a \in \tilde{C}\left(S, K\left(X\right)\right)$, то для околу $O_r\left(0\right)$ нуля простору X радіуса $\frac{1}{r}$ існує окіл $B_r\left(s^*\right)$ точки s^* такий, що $a\left(s\right) \subset a\left(s^*\right) + O_r\left(0\right)$ для всіх $s \in B_r\left(s^*\right)$. Внаслідок того, що $\lim\limits_{m\to\infty} s_{k_m} = s^*$, існує підпослідовність $\{s_{k_{m_r}}\}_{r=1}^{\infty}$ послідовності $\{s_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ така, що $s_{k_{m_r}} \in B_r\left(s^*\right), r = 1, 2, \ldots$. Тоді $a\left(s_{k_{m_r}}\right) \subset a\left(s^*\right) + O_r\left(0\right)$. Тому $y_{k_{m_r}} = \widehat{y}_r + z_r$, де $\widehat{y}_r \in a\left(s^*\right)$, а $\|z_r\| < \frac{1}{r}$. Враховуючи, що елементи $\widehat{y}_r$, $r = 1, 2, \ldots$, належать компакту $a\left(s^*\right)$, з послідовності $\{\widehat{y}_r\}_{r=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну до $y^* \in a\left(s^*\right)$

підпослідовність. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що уже $\lim\limits_{r\to\infty} \hat{y}_r = y^*$. З рівності $y_{k_{m_r}} = \hat{y}_r + z_r$ отримаємо, що

$$\lim_{r\to\infty} y_{k_{m_r}} = \lim_{r\to\infty} \hat{y}_r + \lim_{r\to\infty} z_r = y^* + 0 = y^*. \tag{6}$$

Переконаємося далі у справедливості рівності

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) = \varphi^*\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right). \tag{7}$$

Для цього використаємо такі співвідношення

$$\left|\operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) - \varphi^*\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)\right| \le$$

$$\le l\left\|\left(g^*\left(s^*\right) - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) + \left(y_{k_{m_r}} - y^*\right)\right\| +$$

$$+\left|\operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right) - \varphi^*\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)\right|.$$

Оскільки $g^* \in C\left(S, X\right)$, $\lim\limits_{r\to\infty} s_{k_{m_r}} = s^*$, має місце співвідношення (6) і послідовність $\operatorname{Re} f_{k_{m_r}} \xrightarrow[r\to\infty]{сл.} \varphi^*$, то права частина цієї нерівності прямує до нуля при $r \to \infty$. Отже, (7) має місце.

З огляду на те, що

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g^*\left(s\right)\right) = \max_{y\in a\left(s_{k_{m_r}}\right)} p_{s_{k_{m_r}}}\left(y - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) =$$

$$= p_{s_{k_{m_r}}}\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right),$$

$g^* \in C\left(S, X\right)$, $\lim\limits_{r\to\infty} s_{k_{m_r}} = s^*$, має місце рівність (6) та за припущенням $\lim\limits_{s\to s^*} p_s\left(x\right) = p_{s^*}\left(x\right)$ для всіх $x \in X$, з нерівності

$$\left|p_{s_{k_{m_r}}}\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) - p_{s^*}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)\right| \le$$

$$\le \left|p_{s_{k_{m_r}}}\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) - p_{s_{k_{m_r}}}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)\right| +$$

$$+\left|p_{s_{k_{m_r}}}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right) - p_{s^*}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)\right| \le$$

$$\le l\left\|g^*\left(s^*\right) - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right\| + l\left\|y_{k_{m_r}} - y^*\right\| +$$

$$+\left|p_{s_{k_{m_r}}}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right) - p_{s^*}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)\right|$$

випливає рівність

$$\lim_{r\to\infty} p_{s_{k_{m_r}}}\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) =$$
$$= \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = p_{s^*}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right). \quad (8)$$

З урахуванням того, що $s^* \in S$, $y \in a\left(s^*\right)$, звідси одержуємо, що $s^* \in S_a\left(g^*\right)$, $y^* \in a\left(s^*, g^*\right)$.

Переконаємося, що $\varphi^* \in \partial p_{s^*}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)$. Дійсно маємо для $x \in X$

$$p_{s_{k_{m_r}}}(x) - p_{s_{k_{m_r}}}\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) \geq \operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\left(x - \left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right)\right),$$

оскільки $\operatorname{Re} f_{k_{m_r}} \in \partial p_{s_{k_{m_r}}}\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right)$.

Перейшовши в цій нерівності до границі при $r \to \infty$, одержимо, що для всіх $x \in X$

$$p_{s^*}(x) - p_{s^*}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right) \geq \varphi^*(x) - \varphi^*\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right), x \in X. \quad (9)$$

При цьому ми використали те, що за припущенням $\lim_{s\to s^*} p_s(x) = p_{s^*}(x)$, $x \in X$; мають місце рівності (7), (8) та $\left\{\operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\right\}_{r=1}^{\infty} \xrightarrow[r\to\infty]{сл.} \varphi^*$.

Тому $\varphi^* \in \partial p_{s^*}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)$. Нехай f^* — функціонал простору X^*, для якого $f^*(x) = \varphi^*(x) - i\varphi^*(ix), x \in X$.

Тоді $f^* \in \partial_C p_{s^*}\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)$, $\operatorname{Re} f^* = \varphi^*$, $s^* \in S_a\left(g^*\right)$, $y^* \in a\left(s^*, g^*\right)$ і згідно з (5)

$$\left(a_1^*, ..., a_n^*\right) = \left(\operatorname{Re} f^*\left(g_1\left(s^*\right)\right), ..., \operatorname{Re} f^*\left(g_n\left(s^*\right)\right)\right).$$

Звідси випливає, що $\left(a_1^*, ..., a_n^*\right) \in L\left(g^*\right)$.

Отже, $L\left(g^*\right)$ є обмеженою замкненою множиною простору R^n. Тому $L\left(g^*\right)$ — компакт цього простору.

Твердження доведено.

Основні результати.

Теорема 1. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in$ $\in \partial_C p_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$ такі, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \le 0$.

Теорема 2. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб $0 \in coL\left(g^*\right)$, де $coL\left(g^*\right)$ — опукла оболонка $L\left(g^*\right)$.

Доведення. Необхідність. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (1). Згідно з теоремою 1 не існує елемента $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \in V$ такого, що для всіх $s \in S_a\left(g^*\right)$, $y \in a\left(s, g^*\right)$, $f \in \partial_C p_s\left(y - g^*\left(s\right)\right)$ $\operatorname{Re} f\left(g\left(s\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f\left(g_i\left(s\right)\right) > 0$.

Звідси випливає, що

$$D = \left\{\alpha : \alpha = \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \in R^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i > 0, l = \left(l_1, ..., l_n\right) \in L\left(g^*\right)\right\} = \varnothing .$$

Тому, враховуючи компактність $L\left(g^*\right)$ (див. твердження 1), звідси робимо висновок, що $0 \in coL\left(g^*\right)$ (див., наприклад, [2, с. 90]).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $0 \in coL\left(g^*\right)$. Тоді $D = \varnothing$ (див., наприклад, [2, с. 90]). Тому не існує вектора $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \in V$, $\left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \in R^n$, такого, що для всіх $s \in S_a\left(g^*\right)$, $y \in a\left(s^*, g^*\right)$, $f \in \partial_C p_s\left(y - g^*\left(s\right)\right)$ виконується нерівність $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f\left(g_i\left(s\right)\right) > 0$. Згідно з теоремою 1 g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 3. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували точки $s_j \in S_a\left(g^*\right)$, $y_j \in a\left(s_j, g^*\right)$, функціонали $f_j \in \partial_C p_{s_j}\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right)$, додатні числа $\rho_j, 1 \le j \le k \le n+1$, $\sum_{j=1}^{k} \rho_j = 1$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k} \rho_j \operatorname{Re} f_j\left(g\left(s_j\right)\right) = 0, \; g \in V. \tag{10}$$

Доведення. Необхідність. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (1). На підставі теореми 2 $0 \in coL\left(g^*\right)$. Згідно з теоремою Каратеодорі (див., наприклад, [2, с. 76]) з цього співвідношення випливає, що існують $l_j \in L\left(g^*\right)$ та числа $\rho_j > 0, j = \overline{1,k}, 1 \le k \le n+1$, $\sum_{j=1}^{k} \rho_j = 1$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k} \rho_j l_j = 0. \tag{11}$$

За означенням множини $L\left(g^*\right)$ для кожного $j \in \{1,...,k\}$ існують $s_j \in S_a\left(g^*\right)$, $y_j \in a\left(s_j, g^*\right)$, $f_j \in \partial_C p_{s_j}\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right)$ такі, для яких

$$l_j = \left(\operatorname{Re} f_j\left(g_1\left(s_j\right)\right), ..., \operatorname{Re} f_j\left(g_n\left(s_j\right)\right)\right).$$

З урахуванням (11) отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{k} \rho_j \operatorname{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) = 0, \; i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

З (12) випливає справедливість рівності (10).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для $g^* \in V$ існують елементи $s_j \in S_a\left(g^*\right)$, $y_j \in a\left(s_j, g^*\right)$, $f_j \in \partial_C p_{s_j}\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right)$, додатні числа $\rho_j, 1 \le j \le k \le n+1$, $\sum_{j=1}^{k} \rho_j = 1$, такі, що має місце рівність (10). Переконаємося, що g^* є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки $f_j \in \partial_C p_{s_j}\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right)$, $j = \overline{1,k}$, то для будь-якого $g \in V$

$$p_{s_j}\left(y_j-g\left(s_j\right)\right)-p_{s_j}\left(y_j-g^*\left(s_j\right)\right)=p_{s_j}\left(y_j-g\left(s_j\right)\right)-$$

$$-\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*\left(s\right)\right)\geq \operatorname{Re} f_j\left(g^*\left(s_j\right)-g\left(s_j\right)\right),\ j=\overline{1,k}.$$

Звідки, врахувавши (10), отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{k}\rho_j p_{s_j}\left(y_j-g\left(s_j\right)\right)-\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*\left(s\right)\right)\geq$$

$$\geq\sum_{j=1}^{k}\rho_i\left(\operatorname{Re} f_j\left(g^*\left(s_j\right)-g\left(s_j\right)\right)\right)=0.$$

Звідси

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*\left(s\right)\right)\leq\sum_{j=1}^{k}\rho_i p_{s_j}\left(y_j-g\left(s_j\right)\right)\leq\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g\left(s\right)\right).$$

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Висновки. Для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень встановлено критерії екстремального елемента.

Список використаних джерел:

1. Гудима У. В. Критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором / У. В. Гудима // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 76–85.
2. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
3. Кадец В. М. Курс функционального анализа : учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В. М. Кадец. — Х. : ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. — 607 с.
4. Гнатюк В. А. Некоторые критерии глобальной липшицевости функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1987. — 39, №6. — С. 768—771.

In this article criterions of the extremal element for the problem of the best at sense of the family convex lipschitz functions uniform approximation of continuous compact-valued maps by finite dimensional space of continuous single-valued maps are established.

Key words: *the compact-valued maps, the best at sense of the family convex lipschitz functions uniform approximation, the finite dimensional space.*

Отримано: 12.03.2013