УДК 517.977:519.63

А. П. Власюк, д-р техн. наук, професор,
О. М. Багнюк, асистент

Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне

ЗНАХОДЖЕННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ ДЖЕРЕЛА ЗАБРУДНЕННЯ В ОДНОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ МАСОПЕРЕНОСУ

У результаті проведеного математичного моделювання процесу масопереносу забруднень від миттєвого точкового джерела в одновимірному нестаціонарному випадку на відрізку, знайдено невідому координату його місцеположення на основі інформації про необхідну кількість замірів концентрації в заданих точках. Розв'язок оберненої крайової задачі знайдено декількома методами. Наведено результати числових експериментів та їх аналіз.

Ключові слова: *ідентифікація, джерело забруднення, метод функції Гріна, спряжене рівняння.*

1. Вступ, загальна постановка задачі. У наш час досить важливою є проблема охорони навколишнього середовища від забруднень. У зв'язку з цим виникає необхідність визначення невідомих параметрів різних джерел забруднення. Розв'язок задачі ідентифікації невідомих параметрів джерел забруднень дозволяє встановити вклад окремих джерел в забруднення ґрунту, повітря або води. Вивченню даних питань присвячені роботи [1–8].

Нехай в деякій точці X області G розміщено джерело забруднення потужності Q. Розглядається дифузійне або конвективно-дифузійне перенесення забруднень від даного джерела в деякому однорідному середовищі (грунті, повітрі або воді) за законом Фіка. Потрібно при заданих вхідних даних (потужності джерела Q, коефіцієнта конвективної дифузії D, швидкості конвективного переносу v та замірів концентрації забруднень в деяких заданих точках досліджуваної області) знайти координату X_0 місцеположення даного джерела забруднення.

2. Математична модель задачі. У результаті формалізації вищенаведеної постановки задачі, отримаємо її математичну модель:

- потрібно знайти координату X_0 точки розміщення джерела забрунень із розв'язку оберненої крайової задачі для рівняння параболічного типу

$$Lc\left(X, X_0, t\right) = -Q\delta\left(X, X_0\right)\delta\left(t, t_0\right), X, X_0 \in G, t > 0 \qquad (1)$$

- в обмеженій області $\Omega = G \times \left(0, T\right)$ при наступних крайових умовах:

$$c\left(X,X_0,0\right)=0\,, \tag{2}$$

$$c\left(X,X_0,t\right)=0\,,\ X\in\partial G\,, \tag{3}$$

де L — диференціальний оператор параболічного типу, X — координата біжучої точки в області G, X_0 — координата точки розміщення джерела забруднень, δ — дельта-функція Дірака, $c\left(X,X_0,t\right)$ — концентрація забруднень в точці з координатою X в момент часу t від джерела, розміщеного в точці X_0; ∂G — межа області G, t_0 — момент часу «спрацювання» миттєвого джерела.

Зокрема, Lc може задавати один з виразів (4)–(6)

$$Lc\left(x,x_0,t\right)\equiv D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\gamma c-\frac{\partial c}{\partial t}\,, \tag{4}$$

$$Lc\left(x,x_0 t\right)\equiv D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-v\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma c-\frac{\partial c}{\partial t}\,, \tag{5}$$

$$Lc\left(x,y,x_0,y_0,t\right)\equiv D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)-v_x\frac{\partial c}{\partial x}-v_y\frac{\partial c}{\partial y}-\gamma c-\frac{\partial c}{\partial t}\,. \tag{6}$$

Тут D — коефіцієнт дифузії або конвективної дифузії, γ — коефіцієнт масообміну, v (або v_x, v_y) — швидкість (або компоненти швидкості) конвективного перенесення забруднень.

У цій роботі знайдемо координату x_0 точки розміщення джерела забруднень, концентрація $c\left(x,x_0,t\right)$ від якого визначається із розв'язку наступної оберненої крайової задачі:

$$Lc\left(x,x_0,t\right)\equiv D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-v\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma c-\frac{\partial c}{\partial t}=-Q\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(t-t_0\right), \tag{7}$$

$$c\left(x,x_0,0\right)=0\,, \tag{8}$$

$$c\left(0,x_0,t\right)=c\left(l,x_0,t\right)=0\,. \tag{9}$$

Тут $c\left(x,x_0,t\right)$ — концентрація забруднень в точці x в момент часу t, що поширюється від джерела, розміщеного в точці x_0, D — коефіцієнт конвективної дифузії, Q — потужність точкового джерела забруднень.

Потрібно при заданих вхідних даних $Q>0$, $D>0$, $\gamma>0$ та значеннях концентрації, заміряних в заданих точках x_i, $i=\overline{1,N}$, знайти координату точки розміщення джерела із розв'язку оберненої задачі (7)–(9).

3. Розв'язок задачі методом функції Гріна. Нехай відомо координату x_0 точки розміщення джерела забруднень. Тоді розв'язок прямої задачі (7)–(9) знаходимо у вигляді

$$c(x,x_0,t)=\frac{2Q}{l}\exp\left[\frac{v}{2D}(x-x_0)-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(t-t_0)\right]\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cdot\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 D}{l^2}\right)(t-t_0). \tag{10}$$

Нехай в точках $x=x_i$, $i=\overline{1,N}$ в моменти часу $t=t_i$, $i=\overline{1,N}$ відомо наближені значення концентрації забруднень $c(x_i,x_0,t_i)=\overline{C_i}$. Тоді координата x_0 точки розміщення джерела забруднень задовільняє розв'язку сукупності таких нелінійних рівнянь

$$F\left(x_0^i\right)\equiv\exp\left[\frac{v}{2D}\left(x_i-x_0^i\right)-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(t_i-t_0)\right]\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_i}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x_0^i}{l}\cdot\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 D}{l^2}\right](t_i-t_0)-\frac{\overline{C}_i l}{2Q}=0,\ i=\overline{1,N}. \tag{11}$$

Наближений розв'язок нелінійного рівняння (11) знаходимо одним із чисельних методів [7]. Тоді наближене значення координати x_0 розміщення джерела забруднень знаходимо в найпростішому випадку як:

$$x_0\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_0^i .$$

Варто зауважити, що можна, також скористатися методом найменших квадратів для знаходження значення координати x_0 точки місцеположення джерела забруднень.

4. Розв'язок вихідної задачі методом інтегральних рівнянь зводиться до розв'язання наступної задачі

$$Lc(x,t)=0, \tag{12}$$
$$c(x,0)=f(x), \tag{13}$$
$$c(0,t)=c(l,t)=0, \tag{14}$$

де f — поки-що невідома функція. Тоді розв'язок задачі (12)–(14) представимо як:

$$c(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)d\xi, \tag{15}$$

де $G(x,\xi,t)$ — функція Гріна для задачі (7)–(9), яка має вигляд

$$G(x,\xi,t)=\frac{2Q}{l}\exp\left[\frac{v}{2D}(x-\xi)-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(t-t_0)\right]\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cdot\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 D}{l^2}\right](t-t_0). \qquad (16)$$

Для простоти викладки вважатимемо, що $t_0 = 0$.

Нехай в моменти часу $t = t_i$, $i = \overline{1, N}$ зроблені заміри концентрації $\overline{C_i}$ в точках $x_i, i = 1, N$. Тоді отримаємо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\overline{C}_i = \int_0^l G(x_i, \xi, t_i) f(\xi) d\xi,\ i = \overline{1, N}. \qquad (17)$$

Розв'язок цієї системи шукаємо у вигляді

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^{N} G(\xi, x_j, t_i) b_j, \qquad (18)$$

де b_j, $j = \overline{1, N}$ — невідомі коефіцієнти. Ці коефіцієнти знаходимо із розв'язку такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\overline{C}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j,\ i = \overline{1, N}, \qquad (19)$$

де коефіцієнти a_{ij} розраховуються за формулами

$$a_{ij} = \int_0^l G(x_i, \xi, t_i) G(\xi, x_j, t_i) d\xi, \quad i, j = \overline{1, N}. \qquad (20)$$

Враховуючи (16), отримаємо

$$a_{ij} = \frac{4Q^2}{l^2}\int_0^l\left(\left(\exp\left[\frac{v}{2D}(x_i-\xi)-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(t_i-t_0)\right]\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_i}{l}\cdot\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cdot\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 D}{l^2}\right](t_i-t_0)\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left[\frac{v}{2D}(x_j-\xi)-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(t_i-t_0)\right]\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_j}{l}\cdot\sin\frac{n\pi\xi}{l}\cdot\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 D}{l^2}\right](t_i-t_0)\right)\right)d\xi.$$

Система (19) має єдиний розв'язок, оскільки матриця $\{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, N}$ є додатно визначеною. Тоді x_0 дорівнює

$$x_0 = \xi \in Arg\max \widehat{f}\left(\xi\right). \qquad (21)$$

5. Розв'язок задачі з використанням спряжених рівнянь. Знайдемо розв'язок задачі (7)–(9) методом спряжених рівнянь [6, с. 40–65]. Для цього рівняння (7) домножимо на деяку функцію $c^* = c^*\left(x,t\right)$ і результат проінтегруємо по координаті і часу

$$\int_0^T dt \int_0^l c^* \left(D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial t} - v\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma c + Q\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(t-t_0\right) \right) dx = 0 .$$

Перетворимо ліву частину так, щоб функція $c^* = c^*\left(x,t\right)$ стояла під знаком диференціала

$$\int_0^T dt \int_0^l \int c\left(-\frac{\partial c^*}{\partial t} - D\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} - v\frac{\partial c^*}{\partial x} + \gamma c \right) dx + \int_0^l cc^* \Bigg|_{x=0}^{x=T} dx -$$

$$-D\int_0^T \left(c^* \frac{\partial c^*}{\partial x} - c\frac{\partial c^*}{\partial x} \right) \Bigg\|_0^l dt + v\int_0^T cc^* \Bigg|_0^l dt = Q\int_0^T dt \int_0^l c^* \delta\left(x-x_0\right)\delta\left(t-t_0\right) dx.$$

Припустимо, що функція $c^* = c^*\left(x,t\right)$ задовольняє такому спряженому рівнянню:

$$-\frac{\partial c^*}{\partial t} - D\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} - v\frac{\partial c^*}{\partial x} + \gamma c^* = p , \qquad (22)$$

де p — поки-що невизначена функція від x і t.

Тоді відповідна крайова задача для (22) є спряженою задачею для (7)–(9).

Нехай $J = Q\int_0^T dt \int_0^l cpdx$, деякий лінійний функціонал від c. Цей функціонал може бути обчислений в результаті розв'язку спряженої задачі, так що

$$J = Q\int_0^T c^*\left(x_0,t\right) dt , \qquad (23)$$

де c^* — деякий розв'язок рівняння

$$-\frac{\partial c^*}{\partial t} - D\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} - v\frac{\partial c^*}{\partial x} + \gamma c^* = \delta\left(x-x_1\right)\delta\left(t-t_1\right) . \qquad (24)$$

Знайдемо функцію c^*. Введемо нову змінну $t_1 = T - t$, $t_1 \in \left[0,T\right]$. Тоді рівняння (24) прийме вигляд

$$\frac{\partial c^*}{\partial t_1} - D\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} + v\frac{\partial c^*}{\partial x} + \gamma c^* = \delta\left(x-\xi_1\right)\delta\left(t-t_1-\tau_1\right), \qquad (25)$$

розв'язок якого представляється як

$$c^*(x,t_1)=\int_0^{t_1}\int_0^{l}\tilde{c}(x-\xi,t_1-\tau)\delta(\xi-\xi_1)\delta(T-\tau-\tau_1)\,d\xi d\tau,$$

де $\tilde{c}(x,t)$ — фундаментальний розв'язок для (25)

$$\tilde{c}(x,t)=\frac{2Q}{l}\exp\left[\frac{v}{2D}(x-x_0)-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(t-t_0)\right]\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cdot\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 D}{l^2}\right](t-t_0).$$

Повернувшись до старих змінних, отримаємо

$$c^*(x,t)=\begin{cases}\dfrac{2Q}{l}\exp\left[\dfrac{v}{2D}(x-\xi-x_0)-\left(\dfrac{v^2}{4D}+\gamma\right)(\tau_1-t-t_0)\right]\times\\ \times\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi(x-\xi)}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cdot\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 D}{l^2}\right](\tau_1-t-t_0),\\ t\in[0,\tau_1),\\ 0,\ t\in[t_1,T].\end{cases} \tag{26}$$

Підставляючи (26) в (23), знаходимо вираз для функціонала (23)

$$J=\frac{2Q}{l}\int_0^T\left(\exp\left[\frac{v}{2D}(x-\xi-x_0)-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(\tau_1-t-t_0)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi(x-\xi)}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cdot\exp\left[-\frac{n^2\pi^2 D}{l^2}\right](\tau_1-t-t_0)\right)dt.$$

Допустима для розміщення джерела забруднень область G визначається із нерівності $J(x)<C_0$, де C_0 деяка задана константа. Тоді координата x_0 місцеположення джерела забруднення визначається із умов

$$c(\xi_1,t_1)<C_0,\ |x_0-\xi_1|=\min_{x_0\in G},$$

де ξ_1, t_1, C_0 — задані константи.

6. Результати числових експериментів. Числові розрахунки в безрозмірних величинах проведено на такому прикладі. Спочатку розглядалась пряма задача на відрізку $[0,10]$ при відомій точці розміщення джерела забруднення $x_o=3$ для таких значень вхідних параметрів $D=0.1$, $Q=1$, $\gamma=0,01$, $v=0,015$. На основі розв'язку (10) прямої задачі отримано розподіл концентрації забруднень в часі (рис. 1). Далі розв'язуємо обернену задачу з урахуванням результатів прямої задачі, а саме: з числових розрахунків прямої задачі взято значення концентрації $c_1 = 0.00207$ при $t_1 = 3$ в точці $x_1 = 5.5$. При тих же вхідних даних знайдено наближене значення координати x_0 із розв'язку сукупності нелінійних рівнянь: $\tilde{x}_0 = 2.8907$. Наближене значення координати x_0 методом інтегральних рівнянь становить $\tilde{x}_0 = 2.9905$, і методом, що зводиться до спряжених рівнянь — $\tilde{x}_0 = 3{,}0182$. Аналогічні результати отримаємо для інших вхідних даних. З цього видно, що результати знаходження координати місцеположення джерела забруднень різними методами достатньо добре співпадають.

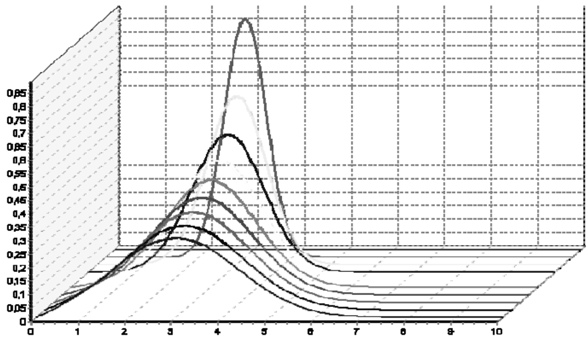

Рис. 1. *Графік розподілу концентрації* $c(x, x_o, t)$ *забруднень від джерела, розміщеного на відрізку* $[0,10]$ *в точці* $x_0 = 3$ *в різні моменти часу з кроком* $\Delta t = 1$

7. Висновки. Отриманий в роботі розв'язок задачі на визначення координати миттєвого джерела забруднень на основі розв'язку оберненої задачі для одновимірного нестаціонарного рівняння конвективної дифузії на відрізку дає можливість застосовувати його до вирішення ряду важливих практичних задач охорони навколишнього середовища від забруднень. Зокрема, наприклад, при вирішенні задачі несанкціонованого викиду забруднень в оточуюче середовище.

Розв'язок оберненої задачі отримано декількома методами, реалізація кожного з яких завершена проведенням числових експериментів. Показано достатньо добре співпадіння результатів розрахунків, обчислених різними методами.

Список використаних джерел:

1. Борухов В. Т. Численное решение обратной задачи восстановления источника в параболическом уравнении / В. Т. Борухов, П. Н. Вабищевич // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, №11, — С. 93–100.

2. Власюк А. П. Ідентифікація місцеположення джерела забруднення в стаціонарній одновимірній задачі масоперенесення / А. П. Власюк, О. М. Багнюк // Матем. та комп. моделювання. Серія «Технічні науки». — 2012. — Вип. 6. — С. 40–48.
3. Обратная задача восстановления источника для уравнения конвективной диффузии / Ю. А. Криксин, С. Н. Плющев, Е. А. Самарская, В. Ф. Тишкин // Математическое моделирование. — № 11. — С.93–100 .
4. Лагранжово-ейлеровий підхід до розв'язання оберненої задачі конвективної дифузії / С. І. Ляшко, Д. А. Клюшин, В. В. Семенов, К. В. Шевченко // Доповіді НАН України. — 2007. — № 10. — С. 38–43.
5. Наконечний О. Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними / О. Г. Наконечний // Київський університет. — К., 2004. — 103 с.
6. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. — М. : Наука, 1989. — 320 с.
7. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Научный мир, 2003. — 316 с.
8. Стеля О. Б. Чисельна процедура відтворення невідомих параметрів джерел для задач масопереносу / О. Б. Стеля, О. С. Тригуб // Національний університет «Києво-Могилянська академія» : наукові записки. — 2000. — Т. 18. Комп'ютерні науки. — С. 40–46.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.

As a result of the mathematical modeling of the mass transfer process from a point source of pollution in the one dimensional case on the transient segment an unknown coordinate of its location was found on the basis of identification of the required number measurements of the concentration in the given points. Solution of the inverse boundary value problem was found by several methods. Numerical results were presented and analyzed.

Key words: *identification, source of pollution, Green function method, conjugate equation.*

Отримано: 17.09.2014