Доповіді
Національної
Академії наук
України

6 • 2009

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 62-5(075.3)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Сингуларисные переходные функции звеньев систем автоматического управления

Наводяться перехідні функції основних ланцюгів систем автоматичного керування, виражені в сингуларисній формі.

В работах по автоматическому управлению, например, в [1–3] представлены понятия о переходных функциях звеньев систем автоматики, связи, управления. Переходная функция звена $h(t)$ отображает реакцию (выходной сигнал) звена на входное воздействие в виде единичной скачкообразной функции $1(t) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{при} & t \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} & t < 0 \end{array}\right\}$. Ранее нами показано [4, 5], что в электрических цепях с реактивными элементами в начале переходного процесса крутизна нарастания выходного сигнала меньше крутизны на остальных участках переходного процесса. Это связано с тем, что электроцепь с реактивными элементами в начале переходного процесса оказывает большее сопротивление входному воздействию по сравнению с дальнейшим протеканием процесса. Такой эффект объясняется автоматическим разложением скачкообразных функций на ряд составляющих, среди которых имеются затухающие гармоники, что было зарегистрировано экспериментально в лаборатории отдела надежности и динамической прочности Института проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины. На основании анализа такого явления и с учетом того, что функция $1(t)$ может быть представлена рядом Фурье [6], нами было разработано новое разложение $1(t)$, названное сингуларисным, в виде [5]

$$\begin{gathered} 1(t) = 1 - \ell^{-\alpha t} + \ell^{-\alpha t} \sum_{s=1}^{n} U_s \cos \omega_s t, \\ U_{a1} = \frac{1}{\pi}, \qquad U_{as} = \frac{U_{a1}}{s}, \qquad s = \frac{\omega_s}{\omega_1}, \end{gathered} \tag{1}$$

где α — коэффициент затухания ($\alpha \to \infty$); ω_s — круговая частота k-й гармоники; t — время.

Коэффициент затухания α значительно больше коэффициента затухания электроцепи с реактивными элементами. Для безынерционной электроцепи выражение (1) автоматически равно $1(t)$.

Имея выражение (1), можно и целесообразно определить переходные функции основных звеньев систем автоматического управления. Назовем эти переходные функции сингуларисными. Перейдем к определению сингуларисных переходных функций стандартных звеньев систем автоуправления. В этих звеньях входной сигнал — $x(t)$, а выходной — $y(t)$. При определении переходных функций примем $x(t) = 1\,(t) = (1)$.

1. Пропорциональное (безынерционное звено). Уравнение звена $y = Kx$, где K — коэффициент пропорциональности. Переходная функция этого звена при $x(t) = 1(t)$, $h_1(t) = K1(t)$. Так как в безынерционном звене отсутствуют реактивные элементы, то к функции $1(t)$ можно не применять сингуларисное разложение и поэтому классическая переходная функция отображает сингуларисную переходную функцию.

2. Интегрирущее звено. Уравнение этого звена $y = K\int\limits_0^t x(t)dt + y_0$. Сингуларисная переходная функция здесь такая:

$$h_{C2}(t) = K\int\limits_0^t (1)dt =$$
$$= K\left[t - \frac{1}{\alpha}(1-\ell^{-\alpha t}) + \ell^{-\alpha t}\sum_{s=1}^{n}\frac{U_{ak}\omega_k}{\alpha^2+\omega_k^2}\left(\frac{\alpha}{\omega_s} + \sin\omega_s t - \frac{\alpha}{\omega_s}\cos\omega_s t\right)\right]. \tag{2}$$

3. Дифференцирующее звено. Уравнение этого звена $y = K\dfrac{dx}{dt}$. Сингуларисная переходная функция дифференцирующего звена следующая:

$$h_{C3}(t) = K\frac{d(1)}{dt} = K\left(\frac{d(1)}{dt} + \alpha\ell^{-\alpha t} - \alpha\ell^{-\alpha t}\sum_{s=1}^{n}U_{as}\cos\omega_s t - \ell^{-\alpha t}\sum_{s=1}^{n}\omega_s U_{as}\sin\omega_s t\right). \tag{3}$$

4. Инерционное звено. Уравнение этого звена $T\dfrac{dy}{dt} + y = Kx$. Определим $h_c(t)$ с помощью операционного метода Карсона [7]. Здесь

$$y(p) = \frac{K1(p)}{Tp+1}, \tag{4}$$

где T — постоянная времени; p — оператор Лапласа; $(1(p))$ — изображение Карсона сингуларисного разложения (1),

$$(1(p)) = K\left[\frac{\alpha}{\alpha+p} + \sum_{s=1}^{n}\frac{U_{as}p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega_s^2}\right]. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$y(p) = K\frac{1}{Tp+1}\left[\frac{\alpha}{\alpha+p} + \sum_{s=1}^{n}\frac{U_{as}p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega_s^2}\right]. \tag{6}$$

Оригинал, соответствующий изображению (6), является сингуларисной переходной функцией инерционного звена. Этот оригинал находим с помощью метода представления (6) суммой простых дробей и таблиц связи изображений Карсона и их оригиналов [7]. В результате имеем

$$h_{C4}(t) = K\left\langle A_4(1-\ell^{-t/T}) + \frac{B_4}{\alpha}(1-\ell^{-\alpha t}) + \sum_{s=1}^{n} U_{as}\left\{a_{s4}\left(1-\ell^{-t/T}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{B_{s4}}{\omega_s}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_s t + \frac{C_{s4}}{\alpha^2+\omega_s^2}\left[1-\ell^{-\alpha t}\left(\cos\omega_s t + \frac{\alpha}{\omega_s}\sin\omega_s t\right)\right]\right\}\right\rangle, \tag{7}$$

где

$$a_{s4} = \frac{-C_{s4}}{\alpha_s^2+\omega_s^2}, \qquad C_{s4} = (\alpha_s^2+\omega_s)^2(B_{s4}T-1);$$

$$B_{s4} = \frac{T(\alpha_s^2+\omega_s^2)-\alpha}{T^2(\alpha_s^2+\omega_s^2)-2\alpha+1}; \qquad A_4 = \frac{-\alpha T}{1-\alpha T}; \qquad B_4 = \frac{\alpha}{1-\alpha T}.$$

5. Форсирующее звено. Уравнение этого звена $y = K\left(x + T\dfrac{dx}{dt}\right)$. Сингуларисная переходная функция следующая:

$$h_{c5}(t) = K(1) + T(3). \tag{8}$$

6. Инерционно-дифференцирующее звено. Его уравнение $y + T\dfrac{dy}{dt} = K\dfrac{dx}{dt}$. Изображение Карсона данного уравнения приводит к виду

$$y(p) = K\frac{px(p)}{1+Tp}. \tag{9}$$

Оригинал, соответствующий (9) при $x(t) = 1(t)$, является сингуларисной переходной функцией $h_c(t)$ данного звена. Изображение Карсона этой функции следующее:

$$h_{c6}(p) = p(6). \tag{10}$$

На основании (10) находим $h_c(t)$ в виде

$$h_{c6}(t) = K\left\langle A_6\left(1-\ell^{-t/T}\right) + \frac{B_6}{\alpha}(1-\ell^{-\alpha t}) + \sum_{s=1}^{n} U_{as}\left\{a_{s6}T\ell^{-t/T} + c_{s6}T^2\left(1-\ell^{-t/T}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{b_{s6}}{\omega_s}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_s t + \frac{d_{s6}}{\alpha_s^2+\omega_s^2}\left[1-\ell^{-\alpha t}\left(\cos\omega_s t + \frac{\alpha}{\omega_s}\sin\omega_s t\right)\right]\right\}\right\rangle, \tag{11}$$

где

$$A_6 = \frac{B_6}{\alpha}, \qquad B_6 = \frac{\alpha^2}{\alpha T - 1}, \qquad a_{s6} = 1; \qquad d_{s6} = -c_{c6}(\alpha^2+\omega_s^2);$$

$$c_{s6} = \alpha(1-\alpha) - B_{s6}T; \qquad B_{s6} = \frac{\alpha^2(2\alpha-3)+\omega_s^2 - T(\alpha^2+\omega_s^2)\alpha(1-\alpha)}{1-2\alpha-T^2(\alpha^2+\omega_s^2)}.$$

7. Инерционно-форсирующее звено. Его уравнение следующее: $y + T_2\dfrac{dy}{dt} = K\biggl(y + {}$ $+ T_1\dfrac{dx}{dt}\biggr)$. В операционной форме изображение $y(p)$ имеет вид $y(p) = Kx(p)\dfrac{1+T_1p}{1+T_2p}$.

При $x(t) = 1(t)$

$$y(p) = K(5)\frac{1+T_1p}{1+T_2p}$$

и

$$h_{c7}(t) = K\biggl\langle A_7T_2^2\Bigl(1-\ell^{-t/T_2}\Bigr) + \frac{B_7}{\alpha}(1-\ell^{-\alpha t}) + {}$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} U_{as}\biggl\{a_{s7}T_2\ell^{-t/T_2} + c_{s7}T_2^2\Bigl(1-\ell^{-t/T_2}\Bigr) + \frac{b_{s7}}{\omega_s}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_s t + {}$$
$$+ \frac{c_{s7}}{\alpha_s^2+\omega_s^2}\biggl[1-\ell^{-\alpha t}\biggl(\cos\omega_s t + \frac{\alpha}{\omega_s}\sin\omega_s t\biggr)\biggr]\biggr\}\biggr\rangle, \tag{12}$$

где

$$A_7 = \frac{\alpha - B_7}{\alpha}; \qquad B_7 = \frac{\alpha(\alpha T_1 - 1)}{\alpha T_2 - 1}; \qquad a_{s7} = T_1; \qquad c_{s7} = 1 - \alpha T_1 - T_2B_{s7};$$
$$d_{s7} = -c_{c7}(\alpha^2+\omega_s^2); \qquad B_{s7} = \frac{2\alpha^2T_1 + (\alpha^2+\omega_s^2)(T_2 - T_1 - \alpha T_1T_2)}{1 - 2\alpha T^2 + T_2^2(\alpha^2+\omega_s^2)}.$$

8. Колебательное звено. Его уравнение имеет вид $y(t) + 2\xi T\dfrac{dy(t)}{dt} + T^2\dfrac{d^2y(t)}{dt} = Kx(t)$. Изображение

$$y(p) = \frac{Kx(p)}{T^2p^2 + 2\xi T_p + 1}. \tag{13}$$

В (13) включим $x(p) = K(5)$. Тогда, используя метод суммы простых дробей, получим

$$y(p) = h(p) = \frac{K(5)}{T^2p^2 + 2\xi T_p + 1}. \tag{14}$$

Оригинал, соответствующий (13), является сингуларисной переходной функцией $h_c(t)$ колебательного звена:

$$h_{c8}(t) = K\biggl\langle \frac{A_8}{\alpha}(1-\ell^{-\alpha t}) + \frac{B_8}{\omega}\ell^{-\xi t/T}\sin\omega t + D_8T^2\biggl[1-\ell^{-\xi t/T}\biggl(\cos\omega t + \frac{\xi}{T\omega}\sin\omega t\biggr)\biggr] + {}$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} U_{as}\biggl\{\frac{a_{s8}}{\omega}\ell^{-\xi t/T}\sin\omega t + c_{s8}T^2\biggl[1-\ell^{-\xi t/T}\biggl(\cos\omega t + \frac{\xi}{T\omega}\sin\omega t\biggr)\biggr] + {}$$
$$+ \frac{b_{s8}}{\omega_s}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_s t + \frac{d_{s8}}{\alpha^2+\omega_s^2}\biggl[1-\ell^{-\alpha t}\biggl(\cos\omega_s t + \frac{\alpha}{\omega_s}\sin\omega_s t\biggr)\biggr]\biggr\}\biggr\rangle, \tag{15}$$

где

$$a_{s8} = -b_{s8}T^2; \qquad d_{s8} = -c_{c8}(\alpha^2 + \omega_s^2); \qquad b_{s8} = \frac{1 - c_{s8}[1 - T^2(\alpha^2 + \omega_s^2)]}{2T(\xi - \alpha T)};$$

$$c_{s8} = \left[2\alpha T(\xi - \alpha T) + T^2(\alpha^2 + \omega_s^2) - 1\right]\left\{4\alpha T(\xi - \alpha T) - [1 - T^2(\alpha^2 + \omega_s^2)]^2\right\}^{-1};$$

$$\omega = \frac{1}{T}\sqrt{1 - \xi^2}.$$

9. Полуинтегрирующее звено. Уравнение этого звена $y(t) = K_9\sqrt{\int\limits_0^t x(t)dt}$. При $x = 1(t) = (1)$ сингуларисную переходную функцию запишем

$$h_{c9}(t) = K\sqrt{\int\limits_0^t (1)dt} = K\sqrt{h_{c2}(t)}. \tag{16}$$

10. Полуинерционное звено. Его уравнение следующее: $Kx(t) = y(t) + \sqrt{T\dfrac{dy^2(t)}{dt}}$. При $x(t) = (1)$ сингуларисная функция имеет вид [3, 5]

$$\begin{gathered} h_{c10}(t) = K\left(1 - \ell^{t/T}\operatorname{erf} c\sqrt{\frac{t}{T}}\right)(1), \\ \operatorname{erf} c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_z^\infty \ell^{-U^2}dU = 1 - \operatorname{erf}(z), \end{gathered} \tag{17}$$

где $\operatorname{erf}(z)$ — табулированный интеграл вероятности.

11. Звено запаздывания. Уравнение его имеет вид $y(t) = Kx(t - \tau)$, где τ — время запаздывания.

При $x(t) = (1)$

$$h_{c11}(t) = K\left[1 - \ell^{-\alpha(t-\tau)} + \ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{s=1}^{n} U_{as\cos\omega_s(t-\tau)}\right]. \tag{18}$$

12. Звено затухания. Его уравнение может быть следующим: $y(t) = K\ell^{-\gamma t}x(t)$, где γ — коэффициент затухания. При $x(t) = (1)$

$$h_{c12}(t) = K\ell^{-\gamma t}(1). \tag{19}$$

Таким образом, в виде выражений (2), (3), (7), (8), (11), (12), (15)–(19) получены сингуларисные функции основных звеньев систем автоматического управления. Эти функции, отображая переходные процессы на выходе рассмотренных звеньев при входном сигнале в виде сингуларисного разложения единичной функции (1), более точно определяют динамику соответствующих звеньев, имеющих в своем составе реактивные элементы.

1. *Фельдбаум А. А., Дудыкин А. Д., Мановцев А. П. и др.* Теоретические основы связи и управления / Под ред. А. А. Фельдбаума. – Москва: Физматгиз, 1963. – 932 с.

2. *Гузенко А. И.* Основы теории автоматического регулирования. – Москва: Высш. шк., 1967. – 408 с.
3. *Теория* автоматического управления / Под ред. проф. А. В. Нетушила. – Москва: Высш. шк., 1976. – 400 с.
4. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
5. *Божко А. Е.* Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электрических цепях // Там само. – 2007. – № 6. – С. 81–87.
6. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1969. – 779 с.
7. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 26.11.2007

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

Singularisnal transient functions for links of automatic control systems

The transient functions for basic links of systems of automatic control are given. These functions have singularisnal form.