КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В.И. ЗОРКАЛЬЦЕВ

УДК 330.115

АГРЕГИРОВАНИЕ ПОКУПАТЕЛЕЙ

Ключевые слова: *функция полезности, агрегирование, кривые Энгеля.*

ВВЕДЕНИЕ

Из-за большого количества лиц, задействованных в экономике, огромного множества разнообразия видов благ, осуществляемых экономических операций необходимо агрегирование первичных данных в укрупненные показатели. Выделим три составляющие процесса агрегирования: во времени; экономических показателей; экономических субъектов.

В данной статье ограничимся рассмотрением только третьей составляющей — агрегированием экономических субъектов. Рассмотрим эту проблему на примере задачи агрегирования покупателей (потребителей) благ.

ИСХОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть R_{+}^{n}, R_{++}^{n} — подмножества векторов R^{n} с неотрицательными и всеми положительными компонентами. Пусть $U(Q)$ — функция полезности некоторого покупателя, зависящая от получаемых благ с номерами $j=1,\ldots,n,$ объемы которых составляют вектор $Q\in R_{+}^{n}$.

Согласно воззрениям современной экономической теории выбираемый набор благ представим в виде вектор-функции от вектора цен $P\in R_{++}^{n}$, располагаемых денежных средств $v\geq 0$ и функции полезности:

$$Q(P,v,U)=\arg\max\{U(Q)\colon\ Q\in R_{+}^{n},\ \sum_{i=1}^{n}P_i\,Q_i=v\}. \tag{1}$$

Пусть ψ — множество функций полезности U, для которых вектор $Q(P,v,U)$ однозначно определяется условием (1) при любых $P\in R_{++}^{n}$, $v\geq 0$. При этом вектор-функция $Q(P,v,U)$ непрерывна по v (при любом фиксированном векторе цен $P\in R_{++}^{n}$).

Функцию полезности $U\in\psi$ назовем квазиоднородной, если при любых $P\in R_{++}^{n}, v\geq 0, \lambda>0$

$$Q(P,\lambda v,U)=\lambda\,Q(P,v,U). \tag{2}$$

Функции полезности U, $\widetilde{U}$ из ψ назовем квазиэквивалентными, если при любых $P\in R_{++}^{n}, v\geq 0$ следует

$$Q(P,v,U)=Q(P,v,\widetilde{U}). \tag{3}$$

ТРЕБОВАНИЕ СОГЛАСОВАННОСТИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ И КОЛЛЕКТИВНОЙ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Пусть U_i — функции полезности из ψ с номерами $i=0,1,\ldots,k$ при некотором $k\geq 2$. Функции полезности с номерами $i=1,\ldots,k$ назовем индивидуальными, функцию полезности с номером $i=0$ — коллективной. Индивидуальные и коллективную функции полезности назовем согласованными, если при любых $P \in R^n_{++}$, $v^i \ge 0$, $i=1,\ldots,k$,

$$Q(P, \sum_{i=1}^{n} v^i, U^0) = \sum Q(P, v^i, U^i). \tag{4}$$

Это требование постулирует, что сумма выбираемых каждым индивидуумом благ должна составить общий выбор благ рассматриваемого коллектива, если полагаем, что сумма затрат индивидуумов является затратами денег на приобретение благ коллектива.

Теорема. Требование согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности выполняется в том и только в том случае, если все индивидуальные и коллективная функции полезности квазиоднородные и квазиэквивалентные.

Доказательство. Если функции полезности квазиэквивалентные, то при любых $P \in R^n_{++}$, $v \ge 0$, имеем

$$Q(P, v, U^0) = Q(P, v, U^i), \ i=1,\ldots,k. \tag{5}$$

Из квазиоднородности следует

$$Q(P, v, U^0) = v\, Q(P, 1, U^0). \tag{6}$$

Используя (5), затем (6) и снова (5), получаем

$$\sum_{i=1}^{k} Q(P, v^i, U^i) = \sum_{i=1}^{k} Q(P, v^i, U^0) = \sum_{i=1}^{k} v^i\, Q(P, 1, U^0) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} v^i \right) Q(P, 1, U^0) = Q\left(P, \sum_{i=1}^{k} v^i, U^0 \right).$$

Итак, квазиоднородность и квазиэквивалентность влекут выполнение требования (4).

Осталось доказать обратное: из требования (4) следует, что функции полезности U^i, $i=0,1,\ldots,k$, должны удовлетворять условиям (2), (3). Для этого представим объем приобретения одного из благ (с номером *j*) *i*-м покупателем при фиксированном векторе цен P в виде функции от располагаемых денежных средств: $f_i(v^i) = Q_j(P, v^i, U^i)$.

Данная функция представляет кривую Энгеля, характеризующую зависимость объема потребления *j*-го блага от располагаемых доходов.

Из (1) следует, что

$$f_i(0) = 0. \tag{7}$$

Согласно (4) при любых $v^i \ge 0$, $i=1,\ldots,k$, имеем

$$f_0\left(\sum_{i=1}^{k} v^i \right) = \sum_{i=1}^{k} f_i(v^i). \tag{8}$$

Из (7), (8) при $v^i = 0$ для $i \ne t$ при любом $v^t \ge 0$ получаем

$$f_0(v^t) = f_t(v^t), \ t=1,\ldots,k. \tag{9}$$

Итак, все функции f_i, $i=0,\ldots,k$, одинаковые. Условие квазиэквивалентности (3) выполняется.

Докажем, что при любых $v \ge 0$, $\alpha \ge 0$ следует

$$f_0(\alpha v) = \alpha f_0(v). \tag{10}$$

При $\alpha = 0$ это равенство выполняется в силу (7). При $\alpha = 1$ оно является тождеством.

По индукции из того, что (10) выполняется для целого $\alpha = 1$, вытекает, что (10) выполняется для $\alpha + 1$. Действительно, используя (8), (9), имеем

$$f_0((\alpha+1)v) = f_1(v) + f_2(\alpha v) = f_0(v) + f_0(\alpha v) = f_0(v) + \alpha f_0(v) = (\alpha+1) f_0(v).$$

Из выполнения (10) для натуральных α следует, что (10) выполняется для $\alpha = \frac{1}{\beta}$, где β — целое положительное число. Действительно,

$$\frac{1}{\beta}(f_0(v)) = \frac{1}{\beta}\left(f_0\left(\frac{\beta}{\beta}v\right)\right) = \frac{1}{\beta}\left(\beta f_0\left(\frac{1}{\beta}v\right)\right) = f_0\left(\frac{1}{\beta}v\right).$$

Из доказанных фактов непосредственно получаем, что (10) выполняется при любом рациональном неотрицательном α.

Из определения множества ψ вытекает, что функции f_i должны быть непрерывными, поэтому из (10) для рациональных α следует выполнение (10) для всех вещественных $\alpha \geq 0$.

Соотношение (10) означает, что функция полезности U^0 квазиоднородная. В силу квазиэквивалентности такими же будут и остальные функции полезности U^i, $i = 1, \ldots, k$.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно доказанной теореме требование согласованности индивидуальных с коллективной функцией полезности выполняется только в том случае, если все эти функции из экономических соображений явно неудовлетворительны.

1. В одной и той же ценовой ситуации при одних и тех же денежных средствах все покупатели должны делать одинаковый выбор. Одним из основных мотивов введения в современную экономическую теорию функций полезности и их развития в отношении предпочтений было стремление отразить различия потребностей и вкусов разных людей и их групп.

2. Корректное агрегирование возможно только в том случае, если изменение доходов каждого покупателя ведет к изменению в тех же масштабах объемов приобретения всех благ. Кривые Энгеля, выражающие зависимость объемов потребления отдельных товаров от доходов, являются прямыми, выходящими из начала координат.

3. Кривые Энгеля для данных товаров у разных покупателей (у всех исходных и агрегированного) одинаковые.

Приведенная теорема опубликована в [1]. Она может быть перенесена на случай ординалистской концепции полезности. Аналогичные результаты справедливы для процедур агрегирования продавцов. Подробное обсуждение проблем агрегирования продавцов и покупателей благ в рамках современной экономической теории имеется в [2], где приведен более подробный список литературы.

Близкий к указанной теореме результат ранее был получен В. Горманом [3]. Проблему агрегирования покупателей он рассматривал в несколько иной постановке — через согласования оптимальных уровней функций полезности. При этом использовались более сильные предположения о свойствах функций полезности, чем приведенные здесь требования к функциям из множества ψ. В итоге результат Гормана близкий к приведенной здесь теореме, но более слабый. Согласно результатам его исследований функции полезности будут согласованными, если кривые Энгеля для одного и того же товара — параллельные прямые у разных субъектов. Из наших исследований вытекает, что эти кривые должны быть одинаковыми прямыми у разных субъектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зоркальцев В.И. Проблемы агрегирования в экономике: есть ли логическая совместимость микроэкономики и макроэкономики: Препр. / ИСЭМ СО РАН. — Иркутск, 1997. — 51 с.
2. Зоркальцев В.И. Проблема агрегирования экономических субъектов // Вест. Новосибирск. гос. ун-та. Сер. Социально-экономические науки. — 2010. — **10**, вып. 1. — С. 107–118.
3. Gorman W.N. Community preference fields // Econometrica. — 1953. — **5**, N 1. — P. 63–80.

Поступила 19.09.2012