УДК 519.83

**С.И. ДОЦЕНКО, А.В. МАРИНИЧ**

# ИГРА В ЦЕНЗУРУ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА

**Ключевые слова:** *задача оптимального выбора, остановка цепи Маркова, матричная игра, равновесие по Нэшу, смешанная стратегия, пороговая стратегия.*

Задача выбора наилучшего объекта является одной из классических задач исследования операций, а именно стохастической оптимизации. Изначально она была разработана Мартином Гарднером в середине XX века как головоломка. Впоследствии оказалось, что данная задача и ее множественные модификации могут служить иллюстративными примерами в теории оптимальной остановки марковских процессов и теории игр. В основе анализа многошаговых игр лежит так называемая концепция сложного рационального поведения игроков, когда каждый игрок исходит из таких предпосылок: «Я веду себя оптимальным образом. Я знаю, что противник ведет себя оптимальным образом. Я знаю, что противник знает, что я веду себя оптимальным образом» и т.д.

Игровые ситуации, возникающие в задаче оптимального выбора, условно можно разделить на два типа. В одном случае игроки борются за выбор элемента по определенным правилам и имеют одинаковое (или сходное) множество допустимых стратегий. Такие игры принято называть войнами или битвами. Процесс борьбы за выбор наилучшего элемента на одном множестве элементов рассматривался в [1]. Ситуации, когда игроки делают выбор на отдельных (т.е. каждый на своем) множествах элементов, исследовались в [2, 3]. В работе [2] целью игрока был выбор наилучшего элемента раньше, чем это сделает противник, а в [3] нужно было выбрать элемент, ранг которого выше, чем у противника.

В играх другого типа, в отличие от битв, множества допустимых стратегий игроков различны, при этом их цели также отличаются. Цель одного игрока — выбор наилучшего элемента, цель другого — доступными средствами помешать ему это сделать. Игры такого типа принято называть партизанскими. В [4] исследована задача, в которой игрок, мешающий осуществлению выбора другого игрока, мог влиять определенным образом на порядок просмотра элементов.

В данной статье рассматривается класс игр, в которых один из игроков создает помехи для выбора наилучшего элемента путем запрета или ограничения просмотра отдельных элементов. Борьба игроков в процессе просмотра элементов является конфликтно-управляемым процессом. Процессы такого типа исследовались в [5].

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

В работах [6, 7] рассмотрена задача выбора наилучшего объекта, сформулированная следующим образом. Пусть некто в случайном порядке просматривает $n$ объектов и должен выбрать среди них наилучший. При этом после ознакомления с очередным объектом нужно либо остановить на нем свой выбор, либо продолжить просмотр; возвращаться к ранее просмотренным объектам нельзя. Объекты упорядочены определенным образом, т.е. качества любых двух объектов сравнимы между собой. Ознакомление в случайном порядке означает, что изначально все $n!$ перестановок, задающих порядок просмотра объектов, равновероятны.

Объект, наилучший среди всех $n$, назовем наилучшим, а объект, лучший среди $k$ просмотренных, — максимальным. Очевидно, что в ходе просмотра следует анализировать целесообразность остановки выбора на некотором объекте, только если он является максимальным. При этом оказывается, что первый объект максимальный и индексы максимальных объектов образуют цепь Маркова с переходными вероятностями $p(k, j) = \dfrac{k}{j(j-1)}$, $j > k$. Независимо от того, максимальный $k$-й элемент или нет, вероятность того, что среди элементов с индексами $k+1, \ldots, n$ минимальным индексом максимального элемента будет $j$, равна $\dfrac{k}{j(j-1)}$, $j > k$, и с вероятностью $1 - \sum\limits_{j=k+1}^{n} p(k, j) = \dfrac{k}{n}$ в последовательности $k+1, \ldots, n$ не встретится ни одного максимального элемента.

В работе [6, с. 100] доказано, что для выбора наилучшего из $n$ объектов с максимальной вероятностью нужно придерживаться такой стратегии: вначале пропустить все элементы с индексами $1, \ldots, k_n - 1$, затем остановить свой выбор на первом максимальном элементе с индексом, не меньшим $k_n$, где $k_n$ определяется из двойного неравенства

$$\frac{1}{k_n} + \ldots + \frac{1}{n-1} \le 1 < \frac{1}{k_n - 1} + \ldots + \frac{1}{n-1}. \qquad (1)$$

Очевидно, что $\dfrac{k_n}{n} \to \dfrac{1}{e}$ при $n \to \infty$, а вероятность выбора наилучшего объекта при соблюдении описанной стратегии стремится к $e^{-1}$.

Если остановиться на максимальном элементе, имеющем индекс $k$, то условная вероятность выигрыша будет равна $p_1(k) = \dfrac{k}{n}$, а если продолжить просмотр и остановиться на следующем максимальном элементе, то вероятность выигрыша составит $p_2(k) = \dfrac{k}{n} \sum\limits_{j=k}^{n-1} \dfrac{1}{j}$. Вследствие неравенства (1) справедливы такие неравенства:

$$p_1(k) \le p_2(k) \text{ при } k \le k_n, \;\; p_1(k) > p_2(k) \text{ при } k > k_n. \qquad (2)$$

### ИГРА В ЦЕНЗУРУ

Данная игра является антагонистической и ведется на множестве из $n$ элементов. Пусть у второго игрока (назовем его выбирающим) та же цель, что и в классической задаче, — найти наилучший элемент. Цель первого игрока (назовем его цензором) — помешать ему это сделать. Все $n!$ перестановок равновероятны, и оба игрока не могут влиять на порядок просмотра элементов. Цензор просматривает каждый элемент перед тем, как его просмотрит выбирающий. Он имеет некоторые полномочия, которые заключаются в частичном запрете или ограничении прав выбирающего на просмотр элементов. Рассмотрим два варианта полномочий цензора:

— цензор один раз за игру может запретить просмотр элемента (после этого его полномочия исчерпываются);

— цензор один раз за игру может закрыть просмотр любого элемента; просматривающий может открыть закрытый элемент (но тогда он должен закончить просмотр и выбрать закрытый элемент) либо продолжить просмотр (полномочия цензора на этом исчерпываются).

**Первый вариант.** В этом случае цензору не следует запрещать просмотр элементов, меньших $k_n$, поскольку на этом его полномочия исчерпаются и выбирающий, придерживаясь оптимальной стратегии классической задачи, выберет оптимальный элемент с вероятностью $1/e + o(1)$ (как в отсутствие цензора). Цензору следует запретить просмотр первого максимального элемента с индексом, не меньшим $k_n$ (обозначим $k$ индекс такого элемента). Действительно, если он этого не сделает, то выбирающему выгодно будет остановиться на данном элементе. В этом случае вероятность выигрыша составит $p_1(k)=\dfrac{k}{n}$. Если просматривающий не остановится на этом элементе, то величина выигрыша не будет превышать $p_2(k)$, но $p_2(k)< p_1(k)$ в силу (2). Если цензор запретит просмотр $k$-го элемента, то выбирающему нужно остановиться на следующем максимальном элементе, и, таким образом, вероятность выигрыша составит $p_2(k)$. Оптимальная стратегия цензора найдена.

Определим оптимальную стратегию выбирающего. Если он будет придерживаться классической стратегии с поправкой на то, что цензор запретит ему просмотр первого максимального после $k_n$ элемента, то вероятность выигрыша согласно формуле полной вероятности составит

$$f^*(n):=\sum_{j=k_n}^{n}\frac{k_n-1}{j(j-1)}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{j}{i(i-1)}\frac{i}{n}=\frac{k_n-1}{n}\sum_{j=k_n-1}^{n-1}\frac{1}{j}\sum_{i=j}^{n-1}\frac{1}{i}. \tag{3}$$

Так как функция $(u,v)\to(uv)^{-1}$ непрерывна на компакте $\{(u,v): e^{-1}\le u\le 1,$ $u\le v\le 1\}$, интегральная сумма $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{j=[n/e]-1}^{n-1}\dfrac{1}{j/n}\sum\limits_{i=j}^{n-1}\dfrac{1}{i/n}$ сходится к $\int\limits_{1/e}^{1}\dfrac{1}{u}\int\limits_{u}^{1}\dfrac{1}{v}\,dvdu=\dfrac{1}{2}$ и в силу сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}k_n/n=e^{-1}$ получаем

$$\lim_{n\to\infty}f^*(n)=(2e)^{-1}\approx 0{,}184. \tag{4}$$

Если цензор не запретит просмотр $k$-го элемента, то выбирающий должен незамедлительно воспользоваться его ошибкой, остановившись на этом элементе.

Заметим, что классическая стратегия выбирающего с поправкой на цензора не является оптимальной. Действительно, пусть выбирающий решает остановиться на первом максимальном элементе, начиная не с $k_n$, а, скажем, с $\left[\dfrac{2}{3}k_n\right]$. Тогда в интервале $\left[\left[\dfrac{2}{3}k_n\right];k_n-1\right]$ с положительной вероятностью может встретиться максимальный элемент. Если таковой элемент встретится и выбирающий на нем остановится (а, как показано выше, цензор не будет этому препятствовать), то вероятность выигрыша выбирающего будет превышать $\dfrac{2k_n}{3n}$.

Если в указанном интервале не встретится ни одного максимального элемента, то на интервале $[k_n;n]$ будет разыгран классический просмотр с цензурой, при этом условная вероятность выигрыша составит согласно (4) величину $f^*(n)$. Таким образом, по формуле полной вероятности вероятность выигрыша просматривающего при больших $n$ превысит $0{,}5e^{-1}$.

Аналогично классическому случаю методом обратной индукции можно показать, что оптимальная стратегия имеет пороговый вид: остановка на первом максимальном элементе с индексом, большим $s_n$, где $s_n\le k_n$.

Найдем значение $s_n$ и предел $t:=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n}{n}$. Поскольку выбирающему еще не выгодно останавливаться на элементе $s_n-1$, имеет место неравенство

$$\frac{s_n-1}{n}<\sum_{j=s_n}^{k_n-1}\frac{s_n-1}{j(j-1)}\frac{j}{n}+\frac{s_n-1}{k_n-1}f^*(n),$$

откуда

$$1<\sum_{j=s_n-1}^{k_n-2}\frac{1}{j}+\frac{n}{k_n-1}f^*(n).$$

Заметим, что если в формуле суммы или произведения нижний предел изменения индекса превышает верхний, то такую сумму полагаем равной нулю, а произведение — единице.

В то же время, поскольку выбирающему становится выгодно останавливаться на элементе $s_n$, должно выполняться аналогичное неравенство с противоположным знаком

$$1 \geq \sum_{j=s_n}^{k_n-2} \frac{1}{j} + \frac{n}{k_n - 1} f^*(n).$$

Таким образом, порог $s_n$ определяется подобно $k_n$ из двойного неравенства

$$\sum_{j=s_n}^{k_n-2} \frac{1}{j} + \frac{n}{k_n - 1} f^*(n) \leq 1 < \sum_{j=s_n-1}^{k_n-2} \frac{1}{j} + \frac{n}{k_n - 1} f^*(n), \tag{5}$$

где $f^*(n)$ задается формулой (3). Вероятность выигрыша определяется формулой

$$w_n = \frac{s_n - 1}{n} \sum_{j=s_n-1}^{k_n-2} \frac{1}{j} + \frac{s_n - 1}{k_n - 1} f^*(n). \tag{6}$$

Переходя в формуле (5) к пределу при $n \to \infty$, с учетом (4) имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=s_n-1}^{[n/e]} \frac{1}{j} = \frac{1}{2}$, откуда получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = e^{-3/2}$. Используя (6), заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = e^{-3/2}$.

Таким образом, оптимальная стратегия выбирающего — остановка на первом максимальном элементе после $s_n$, при этом вероятность выигрыша при условии, что цензор придерживается найденной ранее оптимальной стратегии, равна (асимптотически) $e^{-3/2}$.

Рассмотрим допредельный частный случай $n = 10$. Согласно (1) $k_{10} = 4$, и вероятность выигрыша с поправкой на запрет согласно (3) составляет $f^*(10) \approx 0{,}221$. Используя (5), находим $s_{10} = 3$, а учитывая (6), имеем вероятность выигрыша $w_{10} \approx 0{,}247$.

**Второй вариант.** В этом случае цензор имеет не запретительные, а лишь ограничительные полномочия. Если он будет закрывать только максимальные элементы, то выбирающий, имея право открыть такой элемент, может придерживаться классической стратегии и не замечать действий цензора. Поэтому цензор должен в ряде случаев блефовать, т.е. иногда закрывать элементы, не являющиеся максимальными. Заметим, что цензору не следует закрывать элементы с индексами, меньшими $k_n$ (поскольку в этом случае выбирающий проигнорирует такое закрытие, полномочия цензора исчерпаются и вероятность выигрыша, как и в классическом случае, будет равна $1/e + o(1)$). В то же время, если цензор не закрыл первый максимальный элемент, появившийся после $k_n - 1$, то выбирающему нужно остановиться на нем, поскольку тогда $p_1(k) > p_2(k)$. Следовательно, оптимальная стратегия цензора строится таким образом: нужно закрыть первый максимальный элемент, появившийся после $k_n - 1$, при этом следует блефовать, т.е. с какими-то вероятностями закрывать элементы, которые встречаются после $k_n - 1$, вплоть до появления максимального элемента. Найдем количественные характеристики блефа. Пусть выбирающий наблюдает закрытый элемент, индекс которого равен $k \geq k_n$. Он пытается угадать, что явилось причиной закрытия: максимальный элемент или имеет место блеф. Выигрыш выбирающего зависит от причины закрытия элемента.

Если цензор блефует, то вероятности выигрыша выбирающего при открытии элемента либо продолжении просмотра составляют соответственно 0 и $\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}$, а если цензор закрывает максимальный элемент, то вероятности выигрыша выбирающего при аналогичных действиях составляют $\frac{k}{n}$ и $\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}$ соответственно.

Пусть $p(k)$ — вероятность блефа цензора, т.е. закрытия $k$-го элемента при условии, что он не максимальный, а $Q(k)$ — апостериорная вероятность блефа цензора при условии, что $k$-й элемент закрыт. Вероятность выигрыша при выборе закрытого элемента составит $\frac{k}{n}(1-Q(k))$, а при продолжении просмотра будет равна $\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}$. Естественно, выбирающий должен совершить действие, соответствующее максимуму из этих величин. Для цензора оптимальной стратегией будет выбор такой вероятности блефа $p(k)$, чтобы вероятность выигрыша выбирающего не зависела от его действия, т.е. $\frac{k}{n}(1-Q(k))=\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}$, откуда

$$Q(k)=1-\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}. \tag{7}$$

Заметим, что правая часть (7) неотрицательная при $k \geq k_n$ в силу (1). Найдем соответствующую вероятность $p(k)$. По определению условной вероятности

$$Q(k)=P\{k\text{-й элемент не максимальный} \,/\, k\text{-й элемент закрыт}\}=$$

$$=\frac{P\{k\text{-й элемент закрыт, } k\text{-й элемент не максимальный}\}}{P\{k\text{-й элемент закрыт}\}}=\frac{\frac{k-1}{k}p(k)}{\frac{k-1}{k}p(k)+\frac{1}{k}},$$

откуда $p(k)=\frac{Q(k)}{(1-Q(k))(k-1)}$. Подставляя значение $Q(k)$ из (7), имеем

$$p(k)=\frac{1-\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}}{\left(\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\right)(k-1)}. \tag{8}$$

Обозначим $\pi(k)$ условную вероятность того, что $k$-й элемент закрыт цензором (элемент оказался максимальным или вследствие блефа) при условии, что предыдущие элементы закрыты не были. Из изложенного следует, что

$$\pi(k)=\frac{1}{k}+\frac{k-1}{k}p(k)=\frac{1}{k}\frac{1}{\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}}. \tag{9}$$

Пусть $\phi(k)$ — вероятность выигрыша выбирающего при условии, что предстоит просмотр $k$-го элемента, причем ни выбирающий, ни цензор еще не вышли из игры (т.е выбирающий не сделал своего выбора, а цензор не исчерпал полномочий), и далее цензор будет придерживаться оптимальной стратегии. Поскольку стратегия, при которой выбирающий всегда останавливается на закрытом элементе, активна, а вероятность выигрыша в силу формулы полной вероятности равна $\sum_{i=k}^{n}\left(\prod_{j=k}^{i-1}(1-\pi(j))\right)\pi(i)\frac{1/i}{\pi(i)}\frac{i}{n}$, по теореме об активных стратегиях для матричных игр получим

$$\phi(k)=\sum_{i=k}^{n}\left(\prod_{j=k}^{i-1}(1-\pi(j))\right)\pi(i)\frac{1/i}{\pi(i)}\frac{i}{n}=\frac{1}{n}\left(1+\sum_{i=k+1}^{n}\prod_{j=k}^{i-1}(1-\pi(j))\right). \tag{10}$$

Найдем оптимальную стратегию выбирающего. Это будет смешанная стратегия выбора закрытого элемента, зависящая от номера просматриваемого элемента $k$. Если просматривающий видит, что $k$-й ($k \geq k_n$) элемент закрыт, то пусть он открывает его с вероятностью $y(k)$ и продолжает просмотр с дополнительной вероятностью. Пусть цензор блефует с вероятностью $r(k)$, не обязательно совпадающей с найденной ранее вероятностью $p(k)$. Тогда вероятности выбора цензором стратегий «Закрытие максимального элемента», «Закрытие элемента, блеф», «Оставить элемент открытым» составят $\frac{1}{k}$, $\frac{k-1}{k}r(k)$, $\frac{k-1}{k}(1-r(k))$ соответственно. Величины выигрыша выбирающего во всех возможных ситуациях, которые могут сложиться в ходе просмотра $k$-го элемента обоими игроками, представлены в табл. 1.

**Т а б л и ц а 1**

| Стратегия цензора | Стратегия выбирающего | |
|---|---|---|
| | Открытие элемента | Продолжение просмотра |
| Закрытие максимального элемента | $\frac{k}{n}$ | $\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}$ |
| Закрытие элемента, блеф | 0 | $\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}$ |
| Оставить элемент открытым | $\phi(k+1)$ | $\phi(k+1)$ |

Обозначим $\vec{R}(r(k))=\left(\frac{1}{k},\frac{k-1}{k}r(k),\frac{k-1}{k}(1-r(k))\right)$, $\vec{Y}(k)=(y(k),1-y(k))$,

$$A(k)=\begin{pmatrix}\frac{k}{n} & \frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\\ 0 & \frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\\ \phi(k+1) & \phi(k+1)\end{pmatrix}.$$

Тогда вероятность выигрыша просматривающего равна

$$F(r(k),y(k))=\vec{R}(r(k))A(k)\vec{Y}^{T}(k). \tag{11}$$

Поскольку (11) является билинейной формой по $r(k)$ и $y(k)$, при любом фиксированном значении $y(k)$ минимум по $r(k)$ достигается на концах интервала, т.е. при $r(k)=0$ или $r(k)=1$ имеем

$$F(0,\, y(k)) = \frac{1}{n}\left[1 - \sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\right] y(k) + \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j} + \frac{k-1}{k}\phi(k+1)\,, \tag{12}$$

$$F(1,\, y(k)) = \frac{1}{n}\left[1 - k\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\right] y(k) + \frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\,. \tag{13}$$

Заметим, что $F(0,\, y(k))$ монотонно возрастает, а $F(1,\, y(k))$ монотонно убывает по $y(k)$. В силу формулы (9) имеем $\pi(k) \ge 1/k$, $k \ge k_n$, поэтому

$$\phi(k+1) = \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\prod_{j=k+1}^{i-1}(1-\pi(j)) \le \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\prod_{j=k+1}^{i-1}\frac{j-1}{j} = \frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i},\ \ k \ge k_n.$$

Отсюда заключаем, что $F(0,0) \le F(1,0)$, $F(0,1) \ge F(1,1)$. Тогда выражение $\min(F(0,\, y(k)), F(1,\, y(k)))$, являющееся гарантированным выигрышем выбирающего, достигает максимума при $F(0,\, y(k)) = F(1,\, y(k))$, откуда, учитывая (10), имеем

$$y(k) = 1 - \frac{1 + \sum_{i=k+2}^{n}\prod_{j=k+1}^{i-1}(1-\pi(j))}{k\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}}. \tag{14}$$

Если выбирающий начинает просмотр с $k_n$ и игроки придерживаются своих оптимальных стратегий, то величина выигрыша выбирающего составит $\phi(k_n)$. Однако, как и в первом случае, выбирающий может увеличить свой выигрыш, выбирая с некоторой вероятностью максимальный элемент в промежутке $[1, k_n - 1]$. Для элементов с индексами $s < k_n$, на которых следует остановиться, должно выполняться неравенство $\frac{s}{n} \ge \sum_{j=s+1}^{k_n-1}\frac{s}{j(j-1)}\frac{j}{n} + \frac{s}{k_n-1}\phi(k_n)$, откуда имеем

$$\sum_{j=s}^{k_n-2}\frac{1}{j} \le 1 - \frac{n}{k_n-1}\phi(k_n). \tag{15}$$

Пусть $s_n$ — минимальное значение $s$, для которого справедливо (15). Величина выигрыша в этом случае составит

$$\sum_{j=s_n}^{k_n-1}\frac{s_n-1}{j(j-1)}\frac{j}{n} + \frac{s_n-1}{k_n-1}\phi(k_n) = \frac{s_n-1}{n}\sum_{j=s_n-1}^{k_n-2}\frac{1}{j} + \frac{s_n-1}{k_n-1}\phi(k_n). \tag{16}$$

Если правая часть (15) отрицательная, то это значит, что выбирающему следует начать просмотр с $k_n$, иначе его нужно начинать раньше.

Приведем численный пример при $n = 10$. В таком случае $k_{10} = 4$, $\phi(k_{10}) \approx 0{,}303$, а правая часть (15) равна $1 - \frac{10}{3}0{,}303 < 0$. Значит, выбирающему не следует останавливаться ранее чем на $k_{10}$, и, таким образом, вероятность выигрыша составит 0,303.

Значения вероятностей $p(k)$, $\pi(k)$ и $y(k)$ приведены в табл. 2.

**Таблица 2**

| Вероятность | Значения вероятностей при различных $k$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $p(k)$ | 0,001 | 0,085 | 0,167 | 0,273 | 0,462 | 1 | 1 |
| $\pi(k)$ | 0,251 | 0,268 | 0,305 | 0,377 | 0,529 | 1 | 1 |
| $y(k)$ | 0,321 | 0,375 | 0,415 | 0,446 | 0,471 | 0,5 | 1 |

Найдем асимптотическое поведение величин $\phi(k), p(k), \pi(k), y(k)$ при $n \to \infty$. Так как рассматриваемые величины определены для $k \ge k_n$, то $k \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть существует $t := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} \ge 1/e$, тогда из (8)–(10) получим

$$p(t) := \lim_{n\to\infty} np(k) = -\frac{1+\ln t}{t \ln t}, \quad \pi(t) := \lim_{n\to\infty} n\pi(k) = -\frac{1}{t \ln t},$$

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} = \int_t^1 \exp\left(-\int_t^u -\frac{1}{v \ln v} dv\right) du = \frac{t-1}{\ln t} - t$$

соответственно. В частности, $\phi(1/e) = 1 - \frac{2}{e}$ — предельное значение цены игры при условии, что просматривающий включается в игру начиная с элемента $k_n$. Однако чтобы максимизировать выигрыш, он должен включаться в игру начиная с $s_n$, которое определяется из (15). Найдем предельное значение $s := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}$. Из (15) следует уравнение $\ln\left(\frac{1/e}{s}\right) = 1 - e\left(1 - \frac{2}{e}\right)$, откуда $s = e^{e-4} \approx 0{,}278$. Цена игры стремится к этой же величине, что вытекает из (16).

Из (14) получим $y(t) := \lim\limits_{n\to\infty} y(k) = 1 + \frac{t - 1 - t\ln t}{t \ln^2 t}$. Данная функция монотонно возрастает на отрезке $[e^{-1}, 1)$, $y(e^{-1}) = 3 - e \approx 0{,}282$ и $\lim\limits_{t\to 1-0} y(t) = 0{,}5$.

Для сравнения в табл. 3 приведены величины выигрыша $w$ во всех рассмотренных случаях.

**Таблица 3**

| Число объектов | Величина выигрыша $w$ в задачах | | |
|---|---|---|---|
| | классической | цензуры-ограничения | цензуры-запрета |
| $n = 10$ | 0,366 | 0,303 | 0,247 |
| $n \to \infty$ | $e^{-1} \approx 0{,}368$ | $e^{e-4} \approx 0{,}278$ | $e^{-3/2} \approx 0{,}223$ |

Как показывают расчеты, цена игры убывает с ростом степени цензуры, чего и следовало ожидать. Рассмотрение других видов цензуры приводит к гораздо более трудоемким выкладкам, и, как следствие, формулы для оптимальных стратегий будут громоздкими или непредставимыми в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доценко С.И. Задача выбора наилучшего объекта как игра двух лиц // Кибернетика и вычислительная техника. — 2011. — Вып. 164. — С. 43–53.
2. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. — СПб.: Лань; 2010. — 446 с.
3. Доценко С.И. Игровые ситуации в модифицированной задаче оптимального выбора // Кибернетика и вычислительная техника. — 2012. — Вып. 168. — С. 3–8.
4. Carvalho M. de, Chaves L.M., Martins R. Variations of secretary problem via game theory and linear programming // J. Comput. Sci. — 2008. — **7**, N 3. — P. 24–30.
5. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
6. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. — М.: Наука, 1967. — 230 с.
7. Гусейн-Заде С.М. Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний // Теория вероятностей и ее применения. — 1966. — **11**, № 3. — С. 534–537.

*Поступила 23.10.2012*