УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК

МАКСИМИЗАЦИЯ ОТНОШЕНИЯ ОМЕГА С ПОМОЩЬЮ ДВУХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ключевые слова: *отношение омега, мера эффективности, оптимизация портфеля, линейное программирование.*

ВВЕДЕНИЕ

При оптимизации инвестиционного портфеля используются разнообразные меры эффективности, характеризующие соотношение между его доходностью и риском [1, 2]. Последний, в свою очередь, оценивается различными мерами, например классическим использованием в этом качестве дисперсии [3]. Понятно, что на практике необходимо рассматривать проблемы выбора портфеля в некотором многокритериальном смысле, т.е. искать портфельные решения, приемлемые по многим из подобных критериев. Тем не менее любая попытка упростить поиск оптимальных портфельных решений по какому-либо критерию полезна, поскольку потенциально упрощает также поиск важных с практической точки зрения решений многокритериальных постановок.

Используемые в настоящее время меры эффективности отличаются от классического отношения Шарпа [4] двумя важными особенностями: оценкой эффективности относительно некоторой эталонной величины и учетом асимметрии распределения доходности, которая характеризуется отклонениями вверх и вниз [5]. Подобной является и омега, которая введена в [6] в виде отношения среднего отклонения вверх к среднему отклонению вниз от некоторого эталонного значения. Она невыпуклая и негладкая функция, поэтому оказалась непростой для оптимизации. В работе [7] приведены сложности, возникающие при ее оптимизации, и перечень достаточно трудоемких методов глобальной оптимизации, тестируемых для использования в этой задаче.

В [5] сделано существенное продвижение в решении задачи оптимизации отношения омега, состоящее в следующем. Исходная проблема была сведена к задаче, близкой по виду к проблеме линейного программирования (ЛП), но с условиями дополнительности. В случае, когда эталонная величина L, используемая для построения критерия, меньше максимальной средней доходности портфеля, проблема сводится к проблеме ЛП, поскольку тогда условиями дополнительности можно пренебречь. Если указанное условие не выполняется, для поиска оптимального решения предлагалось использовать методы нелинейного программирования и глобальной оптимизации, что достаточно трудоемко.

Затем в [8, 9] проблема оптимизации отношения омега изучалась с помощью подхода эффективной границы между числителем и знаменателем отношения омега и предлагалось максимизировать это отношение для портфеля с помощью решения задачи ЛП, подобной по содержанию рассматриваемой в [5]. В [9] такое сведение исходной задачи к проблеме ЛП использовалось для изучения робастных вариантов таких задач.

Однако, как известно из [5], нельзя получить решение исходной задачи с помощью такой проблемы ЛП, если среднее значение эталонной величины L превышает максимальную среднюю доходность оптимизируемого портфеля. Формальное решение такой задачи ЛП приводит к отношению омега, равному единице, что заведомо неправильно. При использовании метода эффективной границы из [8] после решения большого количества задач ЛП получим лишь аппроксимацию искомого решения. Различные методы, изучаемые в [7] для максимизации отношения омега, являются достаточно трудоемкими.

В настоящей статье показано, что и в случае, когда среднее значение L превышает максимальную среднюю доходность портфеля, исходную задачу можно свести к некоторой другой проблеме ЛП. Это позволяет независимо от выбора эталонной величины L легко находить решения, оптимизирующие отношение омега для портфеля, с помощью решения не более двух задач ЛП.

Заметим, что вычисление отношения омега для разных уровней L позволяет эффективно описывать профили риска для изучаемой доходности портфеля, а сама величина L трактуется как некоторая случайная величина (с.в.). Например, в качестве нее можно выбрать доходность некоторого базового актива или индекса, не входящего в оптимизируемый портфель.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для финансового актива со случайной доходностью R и эталонной величиной L мера эффективности отношения омега введена в [5] следующим образом:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^{\infty} (1-F(x))dx}{\int_{-\infty}^{L} F(x)dx} = \frac{E[\max(R-L,0)]}{E[\max(L-R,0)]} = \frac{E[R-L]^+}{E[L-R]^+}, \tag{1}$$

где F — кумулятивная функция распределения с.в. доходности актива R, т.е. $F(x) = P\{R \le x\}$, $E[\cdot]$ обозначает математическое ожидание, а $[\cdot]^+$ — неотрицательную составляющую величины в скобках.

Фактически это соотношение есть не что иное, как отношение среднего отклонения вверх к среднему отклонению вниз доходности актива R относительно эталонной доходности L. Первое можно рассматривать как меру потенциального выигрыша, а второе — как меру потенциальных потерь относительно L.

Сделаем в (1) элементарное преобразование. Нетрудно видеть, что

$$\frac{E[R-L]^+}{E[L-R]^+} = \frac{E[R-L]^+ \pm E[L-R]^+}{E[L-R]^+} = \frac{E[R-L]}{E[L-R]^+} + 1. \tag{2}$$

Последнее равенство в (2) используем далее в качестве базового соотношения для исследования. Рассмотрим соответствующую портфельную постановку.

Будем считать, что распределение доходностей всех компонент портфеля z_j, $j = 1, \dots, k$, представлено в виде матрицы H размера $n \times k$, чей j-й столбец описывает распределение доходности j-й компоненты по соответствующим k сценариям (дискретно распределенные с.в.). Вектор $u = (u_1, \dots, u_k)$, описывающий структуру портфеля, рассматривается как переменная, причем $\sum_{i=1}^{k} u_i = 1$, $u_i \ge 0$, $i = 1, \dots, k$. Если известен вектор сценарных вероятностей $p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, то задачу максимизации отношения омега для портфеля можно сформулировать в следующем виде:

$$\max_{\sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0} \frac{E[Hu-L]}{E[L-Hu]^+} + 1. \tag{3}$$

Замечание 1. Дискретно распределенные с.в. описываются в виде векторов со своими посценарными значениями. В этом смысле далее понимаются дискретные с.в. Hu и L, представленные в соответствующих оптимизационных проблемах. Если в качестве эталонной величины L выбирается некоторая детерминированная величина L_1, то она учитывается как с.в., которая при всех сценариях равна L_1, т.е. в виде $L_1 e$, где $e' = (1, 1, \ldots, 1)$.

Величину $E[L - Hu]^+$ можно представить в форме задачи минимизации, тогда проблема (3) переписывается как

$$\max_{\sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0} \left(\frac{E[Hu - L]}{\min\limits_{b \ge L - Hu,\, b \ge 0} \langle b, p_0 \rangle} \right) + 1. \tag{4}$$

Знаменатель дроби из (4) неотрицательный. Будем считать, что он не принимает значение нуль, иначе проблема становится тривиальной и теряет смысл. Тогда (4) можно переформулировать в виде

$$\max_{\sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0} \left(E[Hu - L] \max_{b \ge L - Hu,\, b \ge 0} \frac{1}{\langle b, p_0 \rangle} \right) + 1. \tag{5}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ТЕХНИКИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу (5) при двух альтернативных условиях в зависимости от знака первого сомножителя.

Условие 1: $\max \left\{ E[Hu - L] : \sum\limits_{i=1}^{k} u_i = 1, u \ge 0 \right\} \ge 0$.

Условие 2: $\max \left\{ E[Hu - L] : \sum\limits_{i=1}^{k} u_i = 1, u \ge 0 \right\} < 0$.

Очевидно, выполнение этих условий легко проверяется решением соответствующей задачи ЛП

$$\max_{\sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0} E[Hu] \tag{6}$$

и вычитанием из полученной максимальной средней доходности величины $E[L]$.

Допустим, выполняется условие 1. Тогда, учитывая неотрицательность обоих сомножителей задачи (5), ее можно свести к следующей дробно-линейной проблеме:

$$\max_{\sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0} \left(E[Hu - L] \max_{b \ge L - Hu,\, b \ge 0} \frac{1}{\langle b, p_0 \rangle} \right) + 1 =$$

$$= \max_{\substack{(b, u) \\ \sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0 \\ b \ge L - Hu,\, b \ge 0}} \frac{\langle Hu - L, p_0 \rangle}{\langle b, p_0 \rangle} + 1. \tag{7}$$

Применяя к полученной задаче дробно-линейного программирования (7) стандартные преобразования переменных $\tilde{u} = ut$ и $\tilde{b} = bt$, где $\langle b, p_0 \rangle = 1/t$, получаем задачу ЛП следующего вида:

$$\max_{\substack{(\tilde{u}, \tilde{b}, t) \\ \sum_{i=1}^{k} \tilde{u}_i = t,\, \tilde{u} \ge 0,\, t \ge 0 \\ \tilde{b} \ge Lt - H\tilde{u},\, \tilde{b} \ge 0 \\ \langle \tilde{b}, p_0 \rangle = 1}} \langle H\tilde{u} - Lt, p_0 \rangle + 1. \tag{8}$$

Сформулируем этот результат в виде формального утверждения.

Утверждение 1. При выполнении условия 1 исходная задача максимизации отношения омега (3) сводится к проблеме ЛП (8). Значение этого отношения совпадает со значением оптимального решения по функции, а структура оптимального портфеля вычисляется по оптимальному значению переменной $(\widetilde{u}_*, \widetilde{b}_*, t_*)$ как $u_* = \widetilde{u}_* / t_*$.

Обратимся теперь к задаче (4):

$$\max_{\sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0} \left(\frac{E[Hu - L]}{\min\limits_{b \ge L - Hu,\, b \ge 0} \langle b, p_0 \rangle} \right) + 1. \tag{9}$$

При выполнении условия 2 числитель дроби в (9) отрицательный, знаменатель — всегда положительный. Нетрудно видеть, что в скобках стоит отношение значений эффективной границы соотношений между $E[Hu - L]$ и $E[L - Hu]^+$, которые можно получить следующим образом. Перебирая значения средней доходности от минимальной доходности компонент портфеля $\mu_{\min}$ до максимальной $\mu_{\max}$ и решая задачи ЛП в виде

$$\min_{\substack{(u,b) \\ \sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0 \\ b \ge L - Hu,\, b \ge 0 \\ \langle Hu, p_0 \rangle \ge \mu}} \langle b, p_0 \rangle \tag{10}$$

для $\mu \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, построим эффективную границу по таким соотношениям, как $\langle Hu_* - L, p_0 \rangle$ и $\langle b_*, p_0 \rangle$, где (u_*, b_*) — решение задачи (10). Соответственно значение отношения омега для таких u_* вычисляется

$$\Omega(u_*, L) = \frac{\langle Hu_* - L, p_0 \rangle}{\langle b_*, p_0 \rangle} + 1. \tag{11}$$

Однако это достаточно трудоемкий процесс: надо разбить интервал $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ с некоторым дискретным шагом, затем решить для каждого μ из такого множества задачи вида (10) и, вычислив в решениях значение отношения омега с помощью (11), выбрать максимальное. Естественно, что это будет лишь некоторая аппроксимация искомого решения, точность которой определяется шагом разбиения интервала $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, и далее можно приближаться к искомому решению, уточняя значения эффективной границы лишь вблизи такой аппроксимации.

Покажем, что точное решение поставленной задачи можно получить значительно проще. Обратимся к задаче (10). Выберем в качестве тестовых три значения μ, а именно $\mu_1 = \mu_{\min}$; $\mu_{\min} < \mu_2 < \mu_{\max}$; $\mu_3 = \mu_{\max}$. Решая для них задачи вида (10), можно получить некоторые их решения, которые обозначим соответственно (u_*^1, b_*^1), (u_*^2, b_*^2) и (u_*^3, b_*^3). Нетрудно видеть, что в силу выбора μ_i, $i = 1, 2, 3,$ имеют место следующие соотношения:

$$\langle Hu_*^1 - L, p_0 \rangle \le \langle Hu_*^2 - L, p_0 \rangle \le \langle Hu_*^3 - L, p_0 \rangle, \tag{12}$$

$$\langle b_*^1, p_0 \rangle \le \langle b_*^2, p_0 \rangle \le \langle b_*^3, p_0 \rangle, \tag{13}$$

причем $\langle Hu_*^3, p_0 \rangle = \mu_{\max}$.

Поскольку все значения в соотношениях (12) отрицательные, а в (13) — положительные, то выписав отношения между соответствующими членами соотношений (12) и (13), получим:

$$\frac{\langle Hu_1^* - L,\, p_0 \rangle}{\langle b_1^*,\, p_0 \rangle} \le \frac{\langle Hu_2^* - L,\, p_0 \rangle}{\langle b_2^*,\, p_0 \rangle} \le \frac{\langle Hu_3^* - L,\, p_0 \rangle}{\langle b_3^*,\, p_0 \rangle}.$$

Добавив к каждому из членов неравенств по единице, нетрудно выписать следующие соотношения между соответствующими отношениями омега:

$$\Omega(u_1^*, L) \le \Omega(u_2^*, L) \le \Omega(u_3^*, L). \tag{14}$$

Следовательно, при условии 2 отношение омега, вычисляемое в виде (11) в решении задачи

$$\min_{\substack{(u,b) \\ \sum_{i=1}^{k} u_i = 1,\, u \ge 0 \\ b \ge L - Hu,\, b \ge 0 \\ \langle Hu,\, p_0 \rangle \ge \mu_{\max}}} \langle b,\, p_0 \rangle, \tag{15}$$

является максимальным.

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение 2. При выполнении условия 2 исходная задача максимизации отношения омега (3) сводится к решению задачи (15) и вычислению в ее решении значения отношения омеги в виде (11).

Поскольку максимальная доходность портфеля совпадает с максимальной доходностью его компонент, из представления проблемы (15) нетрудно извлечь очевидное следствие этого утверждения.

Следствие. Если в портфеле имеется компонента, чья средняя доходность превышает средние доходности остальных компонент, то при выполнении условия 2 портфель, состоящий из одной такой компоненты, является оптимальным, т.е. максимизирует отношение омега.

Полученные утверждения 1, 2 позволяют предложить очевидный алгоритм для решения исходной проблемы оптимизации отношения омега для портфеля (3) с помощью техники ЛП.

Алгоритм решения.

1. Решаем задачу ЛП (6) и получаем $\mu_{\max}$. Сравниваем его с $E[L]$.

2.1. Если выполняется условие 1, решаем проблему ЛП (8). Значение максимального отношения омега совпадает со значением оптимального решения по функции, а структура оптимального портфеля вычисляется в решении $(\widetilde{u}_*, \widetilde{b}_*, t_*)$ задачи (8) как $u_* = \widetilde{u}_* / t_*$.

2.2. Если выполняется условие 2, решаем задачу ЛП (15). Значение максимального отношения омега вычисляется в решении (u_*, b_*) задачи (15) в виде (11), а структура оптимального портфеля u_* есть соответствующая компонента такого решения.

Замечание 2. Чтобы избежать решения задачи (6), достаточно вычислить средние доходности каждой из компонент портфеля и эталонной величины L, а затем сравнить $E[L]$ с максимальной средней доходностью компонент. Последняя величина и есть максимальной средней доходностью портфеля.

При выполнении условия 2 иногда можно избежать решения задачи (15), ограничившись только вычислением отношения омега для конкретного портфеля. Подобная возможность описана в следствии.

Замечание 3. В [8, 9] предлагалось максимизировать отношение омега с помощью задачи (8), в которую добавлено еще ограничение $\langle H\widetilde{u} - Lt,\, p_0 \rangle \ge 0$. Отметим, что при условии 1 оно выполняется автоматически, а при условии 2 не приводит к решению и это ограничение становится совместным при $t=0$, где $\sum_{i=1}^{k}\tilde{u}_i=t$, а значение оптимизируемой функции, вычисляемое в качестве отношения омега, равно единице.

В задачу (3) нетрудно включить в форме системы линейных неравенств технологические ограничения на выбор переменной u. Эти ограничения можно описать в следующем общем виде:

$$Au \le c. \tag{16}$$

Например, ограничения типа $\bar{u}_1 \le u \le \bar{u}_2$ легко представляются в виде (16) при $A=\begin{pmatrix}-I\\ I\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}-\bar{u}_1\\ \bar{u}_2\end{pmatrix}$, где I — тождественная матрица. Добавление таких ограничений можно очевидным образом учесть в алгоритме максимизации отношения омега для портфеля.

При наличии ограничений (16) условия 1 и 2 заменяются соответственно следующими условиями:

Условие 1′: $\max\left\{E[Hu-L] : \sum_{i=1}^{k}u_i=1, Au\le c, u\ge 0\right\}\ge 0$.

Условие 2′: $\max\left\{E[Hu-L] : \sum_{i=1}^{k}u_i=1, Au\le c, u\ge 0\right\}< 0$.

Задача (6) заменяется следующей проблемой:

$$\max_{\substack{\sum_{i=1}^{k}u_i=1,\, u\ge 0\\ Au\le c}} E[Hu], \tag{6′}$$

а задачи (8) и (15) — соответственно проблемами

$$\max_{\substack{(\tilde{u},\tilde{b},t)\\ \sum_{i=1}^{k}\tilde{u}_i=t,\ \tilde{u}\ge 0,\ t\ge 0\\ A\tilde{u}\le ct\\ \tilde{b}\ge Lt-H\tilde{u},\ \tilde{b}\ge 0\\ \langle \tilde{b},\, p_0\rangle=1}} \langle H\tilde{u}-Lt,\ p_0\rangle+1, \tag{8′}$$

$$\min_{\substack{(u,b)\\ \sum_{i=1}^{k}u_i=1,\, u\ge 0\\ Au\le c\\ b\ge L-Hu,\, b\ge 0\\ \langle Hu,\, p_0\rangle\ge \mu'_{\max}}} \langle b,\, p_0\rangle. \tag{15′}$$

Отметим, что величину $\mu'_{\max}$ для (15′) получаем в результате решения проблемы (6′).

НЕКОТОРЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Продемонстрируем использование предложенного подхода на классическом примере данных о доходностях девяти американских компаний из книги Марковица [10], приведенных в табл. 1. Отметим также, что эти данные рассматривались в [11] в качестве примера для оптимизации финансового портфеля на основе принципа безопасности.

Т а б л и ц а 1

Год	Годовые доходности акций								
	Am.T.	A.T.&T	U.S.S	G.M.	A.T.&Sfe	C.C.	Bdn.	Frstn.	S.S.
1937	– 0.305	– 0.173	– 0.318	– 0.477	– 0.457	– 0.065	– 0.319	– 0.400	– 0.435
1938	0.513	0.098	0.285	0.714	0.107	0.238	0.076	0.336	0.238
1939	0.055	0.200	– 0.047	0.165	– 0.424	– 0.078	0.381	– 0.093	– 0.295
1940	– 0.126	0.030	0.104	– 0.043	– 0.189	– 0.077	– 0.051	– 0.090	– 0.036
1941	– 0.280	– 0.183	– 0.171	– 0.277	0.637	– 0.187	0.087	– 0.400	– 0.240
1942	– 0.003	0.067	– 0.039	0.476	0.865	0.156	0.262	1.113	0.126
1943	0.428	0.300	0.149	0.225	0.313	0.351	0.341	0.580	0.639
1944	0.192	0.103	0.260	0.290	0.637	0.233	0.227	0.473	0.282
1945	0.446	0.216	0.419	0.216	0.373	0.349	0.352	0.229	0.578
1946	– 0.088	– 0.046	– 0.078	– 0.272	– 0.037	– 0.209	0.153	– 0.126	0.289
1947	– 0.127	– 0.071	0.169	0.144	0.026	0.355	– 0.099	0.009	0.184
1948	– 0.015	0.056	– 0.035	0.107	0.153	– 0.231	0.038	0.000	0.114
1949	0.305	0.038	0.133	0.321	0.067	0.246	0.273	0.223	– 0.222
1950	– 0.096	0.089	0.732	0.305	0.579	– 0.248	0.091	0.650	0.327
1951	0.016	0.090	0.021	0.195	0.040	– 0.064	0.054	– 0.131	0.333
1952	0.128	0.083	0.131	0.390	0.434	0.079	0.109	0.175	0.062
1953	– 0.010	0.035	0.006	– 0.072	– 0.027	0.067	0.210	– 0.084	– 0.048
1954	0.154	0.176	0.908	0.715	0.469	0.077	0.112	0.756	0.185

Т а б л и ц а 2

L_1	Оптимальные портфели						Отношение омега			
	U.S.S	G.M.	A.T.&Sfe	C.C.	Bdn.	S.S.	S(17)	S(8)	S(15)	Fr_Apr
0.000	0.4498	0	0.1222	0.0714	0.3565	0	8.9056	8.9056	4.1446	8.8721
0.025	0.4667	0	0.1062	0	0.4270	0	6.5448	6.5448	3.4750	6.5257
0.050	0.3672	0	0.1510	0	0.4044	0.0773	4.4739	4.4739	2.8801	4.4739
0.075	0.2199	0.1126	0.1878	0	0.4259	0.0538	2.9774	2.9774	2.3841	2.9678
0.100	0	0.3499	0.2552	0	0.3949	0	2.1355	2.1355	1.9806	2.1099
0.125	0	0.5484	0.4516	0	0	0	1.6898	1.6898	1.6518	1.6651
0.150	0	0.0708	0.9292	0	0	0	1.3912	1.3912	1.3859	1.3859
0.175	0	0	1.0000	0	0	0	1.1670	1.1670	1.1670	1.1670
0.200	0	0	1.0000	0	0	0	1.0000	1.0000	0.9876	0.9876
0.225	0	0	1.0000	0	0	0	1.0000	1.0000	0.8382	0.8382
0.250	0	0	1.0000	0	0	0	1.0000	1.0000	0.7118	0.7118
0.275	0	0	1.0000	0	0	0	1.0000	1.0000	0.6036	0.6036
0.300	0	0	1.0000	0	0	0	1.0000	1.0000	0.5098	0.5098

В работе [5] при условии 1 исходная задача сводилась к следующей проблеме:

$$\max_{\substack{(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{d},t) \\ H\tilde{u}-\tilde{v}+\tilde{d}-Lt=0 \\ \sum_{i=1}^{k}\tilde{u}_i=t \\ \langle \tilde{d}, p_0\rangle=1 \\ \tilde{u}\ge 0,\, \tilde{v}\ge 0,\, \tilde{d}\ge 0,\, t\ge 0}} \langle \tilde{v},\, p_0 \rangle . \tag{17}$$

Используем ее для тестирования полученных результатов при условии 1.

Для тестирования вычислений при условии 2 используем аппроксимации решений, получаемые с помощью уже упомянутого подхода эффективной границы из [8]. Для простоты интерпретации в качестве эталонной величины L выбирем некоторые детерминированные величины L_1 (одинаково распределенные по всем сценариям с.в.).

Результаты вычислений оптимальных портфелей представлены в табл. 2, которая содержит ненулевые компоненты оптимальных портфелей, выраженные в весовых коэффициентах, а также значения максимальных отношений омега, вычисленных с помощью решения задач (17), (8), (15) и аппроксимации решения методом эффективной границы S(17), S(8), S(15) и Fr_Apr соответственно.

Максимальная средняя доходность в портфеле достигается на одной компоненте A.T.&Sfe и равна 0.1981. Поэтому при $L_1 \le 0.175$ выполняется условие 1, а при $L_1 \ge 0.200$ — условие 2. В соответствии с этим табл. 2 разделена на верхнюю и нижнюю части.

Сравнение результатов из табл. 2 показывает, что алгоритм, предложенный в данной статье, дает точное решение проблемы: S(8) при $L_1 \le 0.175$ и S(15) при $L_1 \ge 0.200$. Первые результаты точно тестируются с помощью S(17), а вторые — с помощью Fr_Apr.

Точность аппроксимаций Fr_Apr, получаемых методом эффективной границы, при условии 1 можно повысить, дополнительно решая соответствующие задачи ЛП. Но в этом нет необходимости, поскольку в таком случае решение S(8) точно тестируется с помощью S(17).

Отметим, что при условии 2 S(17) и S(8), помимо значений единица для отношения омега (см. табл. 2), дают и некорректные решения по структуре оптимального портфеля (в данной таблице не приведены).

Решения, вычисленные с помощью соответствующей проблемы ЛП из [8, 9], при условии 2 также дают некорректные значения по структуре портфеля и значению единица для отношения омега (не приведены в табл. 2). Однако при условии 1 они совпадают с результатами S(8), поскольку решается фактически та же самая задача (см. замечание 3).

Отметим, что наличие единственной компоненты A.T.&Sfe в оптимальном портфеле при условии 2 предусматривалось сформулированным ранее следствием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для оптимизации отношения омега для портфеля достаточно решить не более двух проблем ЛП: сначала — задачу (6), а затем в зависимости от сравнения полученного $\mu_{\max}$ с $E[L]$ — либо задачу (8), либо задачу (15). При наличии технологических ограничений (16) это будут соответственно проблемы (6′), (8′) и (15′).

Такой алгоритм делает поиск оптимального решения для портфеля, максимизирующего отношение омега, практически тривиальной задачей. Приведенные в данной статье вычисления подтверждают этот вывод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prigent J.-L. Portfolio optimization and performance analysis. — New York: Chapman & Hall/CRC, 2007. — 434 p.
2. Rachev S.T., Stoyanov S.V., Fabozzi F.J. Advanced stochastic models, risk assessment, and portfolio optimization. The ideal risk, uncertainty, and performance measures. — New York: Wiley, 2008. — 382 p.
3. Markowitz H.M. Portfolio selection // J. Finance. — 1952. — **7**, N 1. — P. 77–91.
4. Sharpe W.F. Mutual funds performance // J. Business. — Jan. 1966. — **39** (S1). — P. 119–138.
5. Mausser H., Saunders D., Seco L. Optimizing Omega // Risk. — Nov. 2006. — P. 88–92.
6. Shadwick W., Keating C. A universal performance measure // J. Perform. Measurement. — Spring 2002. — P. 59–84.
7. Kane S.J., Bartholomew-Biggs M.C., Cross M., Dewar M. Optimizing omega // J. Global Optimiz. — 2009. — **45**. — P. 153–167
8. Kapsos M., Zymler S., Christofide N., Rustem B. Optimizing the omega ratio using linear programming, 2011. — http://www.cs.uwaterloo.ca/~yuying/Courses/CS870_ 12/Omega_paper_Short-Cm.pdf.
9. Kapsos M., Christofides N., Rustem B. Worst-case robust omega ratio // Europ. J. Oper. Research, 2013. — doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.04.025
10. Markowitz H.M. Portfolio selection. Efficient diversification of investments. — New York: Wiley, 1959. — 344 p.
11. Норкин В.И., Бойко С.В. Оптимизация финансового портфеля на основе принципа безопасности // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 2. — С. 29–41.

Поступила 27.05.2013