

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ ПРОЕКТА С СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ключевые слова: *оптимизация, распределение ограниченных ресурсов, размещение геометрических объектов.*

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального распределения ограниченных ресурсов различной физической природы: финансовых, временных, кадровых, материальных и т.д., возникают во многих областях практической деятельности. При этом различают два типа задач:

— оптимальное планирование ресурсов предприятия [1] в условиях серийного производства, где требование ограниченности временного ресурса отсутствует или не является критичным, т.е. непрерывное планирование;

— управление ресурсами инвестиционного проекта [2] как конечного множества операций, имеющих уникальный набор свойств и подлежащих выполнению в строго заданных временных рамках.

Актуальность описанных задач повышается в контексте растущего давления на субъекты экономики, обусловленного конкуренцией, жесткими требованиями инвесторов и потребителей конечного продукта и другими объективными факторами.

Данная проблематика находится в центре постоянного внимания специалистов [3–6]. В нашей стране исследования в этой области в свое время были инициированы академиком В.М. Глушковым, который внес огромный вклад в их организацию, непосредственно участвуя и поддерживая процесс формирования таких научных направлений, как сетевое планирование и управление ресурсами предприятия, теория расписаний и календарное планирование.

Фундаментальные научные результаты, заложившие базис построения точных и приближенных методов решения оптимизационных задач календарного планирования производства, в том числе, определения кратчайших путей на сетях, были получены академиком В.С. Михалевичем и его научной школой [7, 8].

Инструментальные средства решения задач распределения ограниченных ресурсов, основанных на использовании арсенала нечеткой логики, мягких вычислений, интервальной математики и т.д., приведены в [9, 10].

Важным классом задач второго типа являются оптимизационные задачи управления ресурсами инвестиционно-строительных проектов [3, 11], в том числе проектов реконструкции инженерных коммуникаций. Анализ их практических постановок показывает, что подобные проекты характеризуются необходимостью привлечения значительных капитальных вложений, большим объемом используемых основных и оборотных средств, а также продолжительностью времени исполнения, что в условиях динамично изменяющейся внешней среды повышает риск невыполнения проекта.

Решение данных задач необходимо предполагает продолжение исследований по их моделированию как многомерных многокритериальных задач теории исследования операций [12, 13], включая разработку методики учета технологических ограничений и предпочтений ЛПП при формировании области допустимых решений оптимизационной задачи.

В данной работе развит подход, предложенный в [14, 15] и основанный на использовании результатов такого раздела теории оптимизационного геометрического проектирования [16], как размещение в ограниченной области геометрических объектов с переменными метрическими характеристиками и пространственной формой [17].

Цель статьи — выделение и формализация частных критериев качества решения и набора ограничений на область допустимых решений оптимизационной задачи распределения ограниченных ресурсов проекта как задачи размещения прямоугольных объектов с изменяемыми метрическими характеристиками, связанными функциональными зависимостями, разработка оптимизационных методов решения задачи, а также проведение численных экспериментов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ОПЕРАЦИИ

Рассмотрим практические задачи управления ресурсами, возникающие на различных стадиях инвестиционно-строительного проекта.

Пусть имеется проект R , состоящий из N работ (операций), $R = \{R_i\}$, $i = 1, \dots, N$. На множестве работ R задано условие частичной упорядоченности вида $R_i < R_j$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, определенное конкретной последовательностью выполнения работ (работа R_j непосредственно следует за R_i). Отметим, что определение этой последовательности предусматривает участие ЛППР (менеджера проекта), так как на практике может быть несколько таких последовательностей.

Для каждой работы R_i известен ее объем S_i , выраженный в человеко·часах, $S_i = \text{const}$. На проект в целом в каждый момент времени выделяется не более W_i непосредственных исполнителей.

Необходимо составить план выполнения работ проекта, оптимальный по требуемым ресурсам.

Рассмотрим данную задачу как $2D$ задачу теории оптимизационного геометрического проектирования, в рамках которой свойства изучаемых объектов интерпретируются как геометрические характеристики. Тогда ресурсы проекта в целом можно представить как область R_0 двумерного пространства ресурсов OTW , где OT — временная ось (время выполнения проекта), OW — ось трудовых ресурсов, масштаб которой согласован с единицами измерения T .

Каждую работу R_i проекта R можно представить как объект размещения R_i , пространственная форма которого — прямоугольник $R_i(a_i, b_i)$. При этом метрические характеристики a_i, b_i означают продолжительность работы R_i и число ее исполнителей соответственно в каждый момент времени. Момент начала выполнения работы R_i и ее привязка к необходимому количеству трудовых ресурсов определяются параметрами $v_i = (t_i, w_i)$ размещения работы в пространстве ресурсов OTW (рис. 1).

Замечание 1. В предположении, что метрические характеристики объектов размещения R_i , $i = 1, 2, \dots, N$, являются переменными: $a_i, b_i - \text{var}$, причем объем S_i , $S_i = a_i \times b_i = \text{const}$, имеет место соотношение $b_i = S_i / a_i$.

Замечание 2. На основании учета технологических характеристик проекта для выполнения каждой ра-

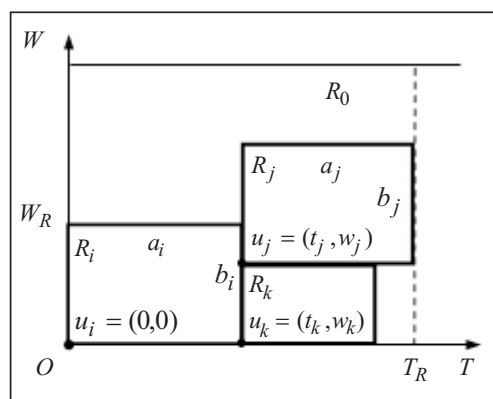


Рис. 1. Графическое размещение работ $\{R_i, R_j, R_k\}$ в пространстве ресурсов

боты R_i выделяются максимально и минимально допустимые значения ресурсов. Другими словами, метрические характеристики объекта R_i есть элементы множеств A и B (рис. 2):

$$a_i \in A_i, b_i \in B_i, \quad (1)$$

где $A_i = [a_{i \min}, a_{i \max}]$, $B_i = [b_{i \min}, b_{i \max}]$, $a_{i \min} > 0$, $b_{i \min} > 0$.

В зависимости от постановки конкретной задачи множества A и B могут быть как непрерывными, так и дискретными. При дискретном характере задания ресурсов

$$b_i = \lceil S_i / a_i \rceil. \quad (2)$$

Отметим, что при $\lceil S_i / a_i \rceil \neq S_i / a_i$ имеют место следующие соотношения: $S_i \leq a_{i \min} \times b_{i \max}$, $S_i \leq a_{i \max} \times b_{i \min}$. Следовательно, при такой постановке для работы R_i эндогенными являются параметры $u_i = (v_i, a_i) = (t_i, w_i, a_i)$. Далее полагаем записи R_i и $R_i(u_i)$ эквивалентными.

Очевидно, множество работ R_j , непосредственно следующих за R_i , может состоять из более чем одного элемента $j \in \{1, 2, \dots, J\}$, $1 \leq j < N$, $i \neq j$. Обозначим I_i^j множество индексов таких работ.

Таким образом, задачу оптимального распределения ресурсов можно поставить как задачу размещения N прямоугольников $\{R_i\}$ без взаимных наложений в прямоугольнике R_0 вида

$$W_R \times T_R \rightarrow \min_{\mu \in D \subset E^{3N+2}}, \quad (3)$$

где W_R, T_R — метрические характеристики прямоугольной области размещения R_0 , $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$, D — область допустимых решений. Она имеет следующую систему ограничений:

— размещение набора объектов R в R_0 (условие наличия каждой работы в составе проекта)

$$R_i \subset R_0; \quad (4)$$

— условие взаимного попарного непересечения объектов (обеспечивающее невозможность использования одного ресурса двумя работами одновременно)

$$\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset; \quad (5)$$

— условие частичной упорядоченности работ

$$R_j \succ R_i, j \in I_i^j; \quad (6)$$

— ограничения на величину ресурсов работ

$$a_i \in A_i, b_i \in B_i; \quad (7)$$

— условие сохранения объема работ проекта

$$b_i = S_i / a_i, i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j. \quad (8)$$

В силу замечания 1 рассматриваемая задача относится к классу задач размещения геометрических объектов с изменяемыми метрическими характеристиками при условии, что последние связаны функциональными зависимостями.

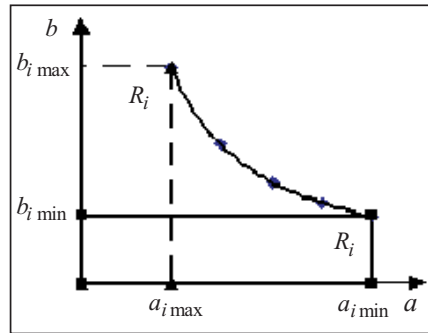


Рис. 2. Графическое представление работы R_i при различных значениях метрических характеристик

Задача по сути (и по общепринятой методике решения [13]) является двухкритериальной и ее можно представить в виде последовательности двух однокритериальных задач:

$$T_R \rightarrow \min_{u \in D_1 \subset E^{2N+1}}, \quad (9)$$

$$W_R \rightarrow \min_{u \in D_2 \subset E^{2K+1}}. \quad (10)$$

Подобласть D_1 области допустимых решений D задачи (9) задается без ограничения на величину W_R (либо W_R считается достаточно большой).

В результате решения задачи (9) определяется длительность T_R^* критического пути [13] проекта R , множество критических операций $R_k, k = 1, 2, \dots, K_1$, суммарная длительность которых составляет длительность T_R^* критического пути, а также полные резервы времени для некритических операций $\bar{R}_k, k = 1, 2, \dots, K, K + K_1 = N$.

Область D_2 допустимых решений задачи (10) выделяется ограничениями вида (4)–(8) при условии, что $T_R = T_R^*$ и параметры размещения объектов, моделирующих критические операции $R_k, k = 1, 2, \dots, K_1$, постоянны.

При решении задач (9), (10) параметры $a_i, i = 1, 2, \dots, N$, объектов размещения фиксированы (для задачи (10) это условие, вообще говоря, обязательно только для критических операций). При этом критерий (10) можно представить в виде

$$\Delta W \rightarrow \min_{u \in D_2 \subset E^{2K+1}}, \quad (11)$$

где

$$\Delta W = \max_{t \in \{1, 2, \dots, T_R\}} W_t - W_{t-1}, \quad (12)$$

что в терминах основной задачи является эквивалентным представлением.

Итак, конечная цель решения задачи (3)–(8) — построение оптимального календарного графика $G(T_R, \Delta W)$ проекта R .

Если параметры проекта, полученные в результате решения задач (9), (11), (12), таковы, что при условии обеспечения скорейшего его выполнения возможно выделение дополнительных ресурсов, возникает третья задача выведения проекта на интенсивный режим [13] вида

$$T_R \rightarrow \min_{u \in D_3 \subset E^Z}, \quad (13)$$

где $Z = 3K_1 + 2K + 1$. При этом метрические характеристики объектов, моделирующих критические операции $R_k, k = 1, 2, \dots, K_1$, являются переменными.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ (4)–(6)

Условие размещения (4) набора объектов R_i в области R_0 с учетом замечаний 1, 2 и выражения (7) задается системой линейных неравенств вида

$$\begin{cases} t_i \geq 0, \\ T_R - t_i - a_i \geq 0, \\ w_i \geq 0, \\ W - w_i - \frac{S_i}{a_i} \geq 0, \\ -a_i + a_{i \max} \geq 0, \\ a_i - a_{i \min} \geq 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Условие взаимного непересечения (5) задается набором линейных неравенств

$$\begin{cases} t_j - t_i - a_i \geq 0, \\ w_j - w_i - S_i / a_i \geq 0, \\ t_i - t_j - a_j \geq 0, \\ w_i - w_j - S_j / a_j \geq 0, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (15)$$

Условие частичного упорядочения (6) представляется в виде системы линейных неравенств

$$t_j - t_i - a_i \geq 0, \quad j \in I_i^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (16)$$

При этом возможны (исходя из практики календарного планирования) два подхода. Если условие, что работа R_j следует непосредственно после работы R_i , обязательно, то в (16) соответствующее ограничение — это строгое равенство. В противном случае условие (16) означает, что работа R_j должна быть выполнена не ранее окончания работы R_i . Далее показано, что наличие или отсутствие условия (16) и его более жесткого аналога в виде равенства значительно влияет на оценку вычислительной сложности алгоритма решения задачи.

Пусть построение календарного графика $G(T_R, \Delta W)$ проекта R необходимо подразумевает решение задачи (13). Учитывая данное условие, приведем основные свойства оптимизационной задачи (3)–(8).

Свойство D_1. Область D — невыпуклое, несвязное ограниченное точечное множество, имеющее кусочно-гладкую границу $\Psi = \text{Fr } D$. Каждая компонента связности области допустимых решений D является многосвязной.

Свойство D_2. Число ограничений на область D допустимых решений задачи (3)–(8) квадратично зависит от числа размещаемых объектов.

Свойство D_3. Область D представима в виде объединения конечного числа подобластей D_g вида

$$D = \bigcup_{g=1}^G D_g, \quad G = O(4^{N(N-1)/2}). \quad (17)$$

При этом подобласть D_g описывается системой $F_g(u) \geq 0$, включающей N систем нелинейных неравенств вида (14), $N(N-1)/2$ неравенств — по одному из каждого набора неравенств (15) для каждой пары объектов, а также условия частичного упорядочения (16).

Свойство D_4. Функции вида $f(t_i, t_j, a_j) = t_i - t_j - \frac{S_j}{a_j}$ и $f(t_i, t_j, a_j) = t_j - t_i - \frac{S_i}{a_i}$ являются выпуклыми и принадлежат классу сепарабельных [18].

Свойство D_5. Функции цели рассматриваемых частных задач (9), (10), (13) являются линейными. Следовательно, оптимальное решение этих задач достигается на границе соответствующих множеств D_1, D_2, D_3 .

Свойство D_6. В общем случае оптимальное решение u^* каждой частной задачи определяется системой $F^*(u) = 0$ линейных (и нелинейных для задачи (13)) уравнений из $F_g(u) \geq 0$. Ранг I системы $F^*(u) = 0$ равен размерности пространства, в котором рассматривается задача. Ограничения системы $F^*(u) = 0$ называют рабочим списком [18].

Для задачи (13) данное свойство не очевидно, но оно имеет место, так как выпуклые функции нелинейных ограничений по постановке являются однозначными.

Свойство D_7 . Для любой точки u^* имеет место соотношение $u^* \in \bigcap_{q>1} D_{gq}$.

Ограничения задачи, которые преобразуются в текущей точке u в равенства, называют активным набором [18]. Из свойства D_7 следует, что для рассматриваемых задач характерно то, что размерность J активного набора больше величины I .

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (3)–(8)

В силу свойств D_1 , D_3 области допустимых решений рассматриваемая оптимизационная задача, как и ее частные подзадачи (9), (10), (13), является многомерной многоэкстремальной задачей комбинаторной оптимизации с несвязной областью допустимых решений, принадлежащей классу NP-сложных задач [20].

Инструментальные средства решения частных задач (9), (10) (при условии, что метрические характеристики объектов размещения постоянны) как задач прямоугольного размещения с линейной функцией цели и линейными ограничениями достаточно полно представлены в научной литературе, например в [21, 22]. Поэтому в настоящей статье рассмотрены модификации точных и приближенных методов локальной и глобальной оптимизации для решения задачи (13).

Точные методы решения задачи (13). Согласно [18] теоретически существует возможность определения глобального минимума функции цели задачи (13).

На основании характеристик функций ограничений задачи и свойства D_3 области допустимых решений задача (13) принадлежит классу задач нелинейной комбинаторной оптимизации. Общая идеология решения таких задач состоит в построении дерева решений (назовем его A), по которому упорядочивается полный перебор подмножеств области допустимых решений задачи, имеющих более простую структуру, и на каждом таком подмножестве определяется локально-оптимальное решение.

Возможны две реализации дерева решений A : первая — дерево A^1 , построенное на основе организации полного перебора выпуклых подмножеств D_g области допустимых решений задачи (свойство D_3), вторая — дерево A^2 , построенное на основе формирования множества систем уравнений, содержащих систему $F^*(\mu) = 0$ (свойство D_6).

Рассмотрим особенности модификаций обоих подходов к формированию структуры дерева решений задачи (13) с учетом возможности переменных метрических характеристик объектов и наличия условия частичной упорядоченности на множестве объектов.

Реализация 1. Корень дерева решений A_0^1 соответствует системе неравенств (14), на каждом следующем уровне к вершине $A_{p(i,j)}^1$ можно добавить одно из четырех ограничений из набора (15). Здесь $p(i, j)$ — номер пары (i, j) , $i < j$. На последнем, $(N(N-1)/2)$ -м, уровне дерева A^1 будут построены все выпуклые подмножества D_g (свойство D_3). Таким образом, задача поиска глобального экстремума сводится к усеченному перебору и решению конечного множества задач выпуклого программирования с линейной функцией цели.

Верхняя оценка числа вершин на последнем уровне дерева решений A^1 равна G из (17), причем переменность метрических характеристик прямоугольников

R_i , моделирующих критические операции, не влияет на количество вершин дерева. Однако оценка (17) очень завышена, так как учет ограничения (16), особенно в виде равенства, сокращает число рассматриваемых вершин дерева решений для каждой конкретной реализации задачи.

Предположим, условие частичной упорядоченности имеет вид равенства

$$t_j - t_i - a_i = 0, \quad j \in I_i^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i < j. \quad (18)$$

Обозначим $\aleph = \sum_{i=1}^{N-1} I_i^j$. Тогда с учетом (18) дерево A^1 будет иметь

$(N(N-1)/2 - \aleph)$ уровней. Более того, выбор первой или третьей вершины на каждом $p(h, j)$ -м уровне дерева решений однозначно определяется подобным выбором на $p(h, i)$ -м уровне, $h < (i, j)$.

Оптимальное решение задачи на системе неравенств $F_g(\mu) \geq 0$ является локальным минимумом задачи (13).

Реализация 2. В случае, если метрические характеристики размещаемых прямоугольников (работ проекта) постоянны (задача вида (10)), дерево решений A^2 основывается на возможности построения на системе уравнений $F^*(v) = 0$ биекции Ψ (свойство D_6) вида

$$\Psi: t_i \leftrightarrow F_k^*(v) = 0, \quad F_k^*(v) \in \{t_i - t_l - a_l, t_i\}; \quad (19)$$

$$\Psi: w_i \leftrightarrow F_k^*(v) = 0, \quad F_k^* \in \{w_i - w_l - b_l, w_i\};$$

$$\Psi: T_R \leftrightarrow F_k^*(v) = 0, \quad F_k^*(v) = T_R - t_l - a_l,$$

$$k \in \{1, 2, \dots, 2N+1\}; \quad i, l = 1, 2, \dots, N; \quad i \neq l.$$

По дереву решений A^2 реализуются все возможные системы уравнений, имеющие свойство (19), в том числе система $F^*(v) = 0$. Существует всего $2N$ уровней дерева A^2 , каждый из которых соответствует некоторому переменному параметру размещения t_i или w_i , $i = 1, 2, \dots, N$. На каждом следующем уровне к вершине $A_{r(i)}^2$, $r(i) = \{i*2, i*2+1\}$, можно добавить одно из двух соответствующих ограничений набора (15), которое становится активным, всего таких ограничений $(N-1)$. Верхняя оценка числа вершин на последнем, $2N$ -м, уровне дерева A^2 при постоянных метрических характеристиках объектов равна $(2N)^N$.

В случае, если метрические характеристики (a_i, b_i) (1), (2) объекта R_i являются переменными, построение биекции вида (19) становится невозможным. Другими словами, это означает увеличение не только количества уровней дерева A^2 до $(Z+1)$ -го, так как теперь необходимо принимать во внимание переменные a_i и T_R , но и числа вершин дерева, которые можно добавить на текущем уровне. Оценка сверху числа вершин дерева равна Z^Z . Учет ограничения вида (16) позволяет сократить число рассматриваемых вершин дерева решений для каждой конкретной реализации задачи, но в целом сложность задачи остается неполиномиальной.

Приближенные методы решения задачи. Одним из наиболее интересных является подход, основанный на оптимизации по группам переменных, который включает два этапа.

Этап 1. Определение локально-оптимального решения задачи на базе модифицированного метода оптимизации по группам переменных.

Этап 2. Перебор локальных экстремумов, основанный на переопределении последовательности размещения объектов.

В настоящей статье порядок размещения объектов считается заданным, тем более, что для задач (10), (13) последовательность размещения объектов определена решением задачи (9).

Представим общую схему этапа 1 — метода оптимизации по группам переменных [16]:

— объекты размещаются по одному согласно заданной последовательности номеров, ранее размещенные объекты считаются неподвижными, объекты, подлежащие размещению на более поздних итерациях метода, не принимаются во внимание;

— текущий объект R_i размещается с учетом требования минимизации текущей функции цели Ξ .

Таким образом, в общем случае для набора рассматриваемых задач на каждой i -й итерации метода оптимизации по группам переменных решается задача вида $\Xi \rightarrow \min_{(t_i, w_i, a_i) \in \Theta_i}$, где область Θ_i — трехмерное сечение подобласти $\bar{\Theta} \subset E^{3i}$ допустимых решений D основной задачи, причем $t_l, w_l, a_l = \text{const}$, $l = 1, \dots, i-1$, t_i, w_i, a_i — var, область $\bar{\Theta}$ сформирована ограничениями (4)–(6) для набора объектов $\{R_l\}$, $l = \bar{1}, i$.

АПРИОРНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ ЗАДАЧИ

В работе [18] предложена методика глобальной линейаризации нелинейных ограничений задачи, позволяющая провести ее линейную аппроксимацию с любой заранее заданной точностью без увеличения размерности пространства параметров, которому принадлежит область допустимых решений задачи в предположении, что переменные метрические характеристики работ являются непрерывными.

Рассматриваемое преобразование $D \xrightarrow{\mathfrak{Z}} D^L$ состоит в замене нелинейных функций ограничений из (14) и (15) соответствующими линейными функциями (одной или несколькими).

Количество звеньев аппроксимации зависит от ее точности $\varepsilon = \max(d^n - d_k^n)$, задаваемой априори, где n — количество узлов аппроксимации, d^n, d_k^n — соответственно коэффициенты уравнений секущей, соединяющей смежные узлы аппроксимации, и касательной к текущему сегменту нелинейной функции.

Выпуклость нелинейных функций ограничений (свойство D_4) означает: если точность ε аппроксимации такова, что необходима более чем одна линейная аппроксимирующая функция, то линейризованное описание соответствующего участка границы $\Psi = \text{Fr} D$ задается системой построенных линейных ограничений.

Таким образом, отображение \mathfrak{Z} при $n=1$ имеет вид:

$$\mathfrak{Z}(a_i(w_j - w_i) + S_i) = \alpha_i \times a_i + \beta_i \times (w_j - w_i) - d_i,$$

где $\alpha_i = A_i / \delta_i$, $\beta_i = B_i / \delta_i$, $\delta_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}$, $A_i = b_{i \max} - b_{i \min}$, $B_i = a_{i \max} - a_{i \min}$, $d_{ij}^n = b_{i \min} B - a_{i \max} A$.

Аппроксимация $\mathfrak{Z}(W - w_i + S_i / a_i)$ нелинейной функции ограничений из (14) проводится аналогично.

Рассмотрим основные свойства отображения \mathfrak{Z} .

Свойство \aleph_1 . Вследствие проведения преобразования \aleph многогранное аппроксимационное множество D^L принадлежит пространству той же размерности, что и исходная область D . В свою очередь, вследствие преобразования $D_g \xrightarrow{\aleph} D_g^L$ выпуклая линейная подобласть D_g^L принадлежит тому же пространству, что и исходная подобласть D_g .

Свойство \aleph_2 . Однократное применение данного преобразования ($n=1$) не увеличивает количества ограничений задачи. При этом линейная аппроксимация набора (15) нелинейных ограничений принимает вид

$$\begin{cases} t_j - t_i - a_i \geq 0, \\ \alpha_i a_i + \beta_i \times (w_j - w_i) - d_{ij} \geq 0, \\ t_i - t_j - a_j \geq 0, \\ \alpha_j a_j + \beta_j (w_i - w_j) - d_{ij} \geq 0, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (20)$$

Свойство \aleph_3 . При многократном применении аппроксимирующих процедур количество ограничений вида (20) увеличится, но количество подмножеств D_g останется неизменным. Следовательно, такие характеристики дерева решений A^1 , применяемого для упорядочения подмножеств D_g с целью получения глобально-оптимального решения, как количество уровней дерева решений и количество вершин дерева, добавляемых на каждом промежуточном уровне, также остаются неизменными.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Линеаризованная задача на подмножестве D_g^L имеет вид

$$\Xi \rightarrow \min_{D_g^L \subset E^Z}, \quad (21)$$

где область D_g^L задана системой $F_g^L(u) \geq \delta^n$ линейных ограничений, компонентами вектора δ^n являются нули и величины $d_{ij}^\eta, d_{ji}^\eta, \eta = 1, \dots, n$.

Решение задачи (21) проводится на основе метода активного набора [18]. Рассмотрим реализацию схемы активного набора, $(m+1)$ -я итерация которого имеет вид $u^{m+1} = u^m + \Delta u^m \cdot p^m$, где u^m — значения переменных на предыдущей итерации, Δu^m — шаг, p^m — направление спуска.

В точке u^m определяются знаки компонент вектора множителей Лагранжа λ как решения невырожденной системы линейных уравнений $H^T \lambda = c$, где H — матрица коэффициентов ограничений рабочего списка в рассматриваемой точке, c — вектор коэффициентов функции цели, в данном случае это вектор вида $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

В силу особенностей вектора c вектор множителей Лагранжа λ есть Z -й столбец матрицы H^T .

Если все компоненты $\lambda_s \geq 0, s=1, \dots, Z$, то u^m есть решение задачи (21). Если некоторый $\lambda_s < 0$, то направление p^m определяется как решение линейной системы уравнений вида $H p^m = e_s$, где e_s обозначен s -й столбец единичной матрицы, т.е. p является s -м столбцом матрицы H^{-1} (s -й строкой матрицы $(H^T)^{-1}$).

Для множества V всех ограничений задачи (21) вне рабочего списка на m -й итерации метода вычисляется верхняя оценка $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \min_v \frac{d_v^n - h_v^T u^m}{h_v^T p^m}, & \text{если } h_v^T p^m < 0, v \in V, \\ +\infty, & \text{если } h_v^T p^m \geq 0 \text{ для всех } v \in V, \end{cases}$$

шага Δu^m , реализующего равенство $h_v^T (u^m + \bar{\alpha} p^m) = d_v^n$, где v — индекс неактивного ограничения.

Наличие свойства D_7 означает, что вектор u^m может одновременно удовлетворять двум неравенствам набора (20), например, первому и второму. В таком случае в качестве неактивного ограничения выступает то, для которого оценка шага Δu^m больше. Таким образом, осуществляется переход из одной выпуклой подобласти D_g^L линеаризованной области допустимых решений D^L в другую: D_{g+1}^L .

Иными словами, осуществляется выбор ограничения, которое войдет в рабочий список на следующей итерации алгоритма решения с одновременным переходом в другую выпуклую подобласть, т.е. движение происходит, вообще говоря, по невыпуклой области.

Программная реализация осуществлена в среде визуального проектирования Borland Delphi 7.0, язык программирования Object Pascal 6.0. Программный продукт содержит блок ввода данных с возможностью задания и корректировки характеристик и порядка выполнения работ, аналитический блок, включающий процедуры построения аппроксимационных функций с заданной точностью и реализацию точных и приближенных методов решения, а также блок визуализации и сохранения полученных результатов.

Предложенные инструментальные средства моделирования и решения задачи распределения ограниченных ресурсов были применены к решению следующей практической задачи. Рассматриваемый объект — пристроенные складские помещения с автоматической системой сбора и паллетизации коробов готовой продукции ЗАО «Филипп Моррис Украина», г. Харьков. Осуществляемый проект — установка автоматической системы пожарной сигнализации.

Укрупненно монтаж и наладка системы проводятся в такой последовательности:

- подготовительные работы (возведение лесов, подготовка кабелей, оборудования и рабочих мест);
- прокладка виниловых труб и кабелей;
- проверка на герметичность соединений (надежность крепления труб на опорных конструкциях);
- установка оборудования и приборов.

Сдача системы пожарной сигнализации в эксплуатацию оформляется в соответствии с действующими нормативными документами.

Общая стоимость работ согласно смете составляет 584.925 тыс. грн. Сметная трудоемкость — 9.036 тыс. чел. · ч. Сметная заработная плата — 147.613 тыс. грн. Средний разряд работ — 3.3.

Проект состоит из 31 работы, характеристики которых приведены в табл. 1.

На рис. 3 представлена сетевая (графовая) модель упорядочения работ проекта, где стрелками обозначены работы, кружками — моменты начала и окончания работ, штриховыми стрелками — фиктивные операции, необходимые для отображения логики связей между работами.

Таблица 1

Номер работы	Наименование работ и материалов, единица измерения	Количество работ и материалов	Количество рабочих		Затраты труда рабочих, чел.ч	
			min	max	на единицу работы	всего
1	Подготовительные работы	4	2	4	20	80
2	Установка базового концентратора, шт.	3	3	6	73	219
3	Установка контрольного прибора на 1 шлейф, шт.	19	4	6	11,52	218,88
4	Установка конечного управляющего блока, шт.	5	4	6	50	250
5	Установка пультов, шт.	1	1	2	34,56	34,56
6	Установка устройств переключения питания, шт.	1	1	2	23,04	23,04
7	Установка пульта или табло до 10 сигналов, шт.	2	1	2	13,44	26,88
8	Установка контрольного прибора на 4 шлейфа, шт.	20	4	10	21,12	422,4
9	Установка контрольного прибора на 8 шлейфов, шт.	8	2	8	21,12	168,96
10	Установка внутренних трубчатых лесов, шт.	1	2	5	70	70
11	Пробивка круглых отверстий Ø25 мм, шт.	100	2	5	0,191	191
12	Прокладка провода в трубах, м	98	6	10	9,60	940,8
13	Установка перемычки заземления, шт.	5	1	1	0,6	3
14	Прокладка провода в лотках, м	57,7	3	8	6,05	349
15	Прокладка виниловых труб, м	98	6	20	27,84	2728
16	Ввод труб Ø27 мм (проход через стену), шт.	10	1	2	1,07	10,7
17	Установка коробок ответвительных, шт.	10	1	2	0,96	9,6
18	Включение кабеля однопарного, шт.	5	2	4	9,60	48
19	Вывод кабеля однопарного, шт.	2	1	2	9,60	19,2
20	Установка извещателей автоматических, шт.	564	10	20	4,22	2380
21	Установка извещателей взрывозащищенных, шт.	17	3	6	4,22	71,74
22	Установка извещателей пожарных ручных, шт.	41	3	6	1,92	78,72
23	Монтаж блоков световой индикации, шт.	2	1	1	1,92	3,84
24	Установка кнопок на пультах и панелях, шт.	20	1	2	1,92	38,4
25	Установка шкафа настенного, шт.	19	2	4	3,84	72,96
26	Установка sireны мощностью 1 кВт, шт.	53	2	5	2,88	152,64
27	Установка световых настенных указателей, шт.	100	3	5	0,83	83
28	Ввод кабелей в кабельные ящики, шт.	172	1	2	0,10	17,2
29	Разборка внутренних трубчатых лесов, шт.	1	2	5	70	70
30	Проверка схем сигнализации, шт.	1	2	4	151,68	151,68
31	Сдача системы в эксплуатацию	1	1	1	24	24

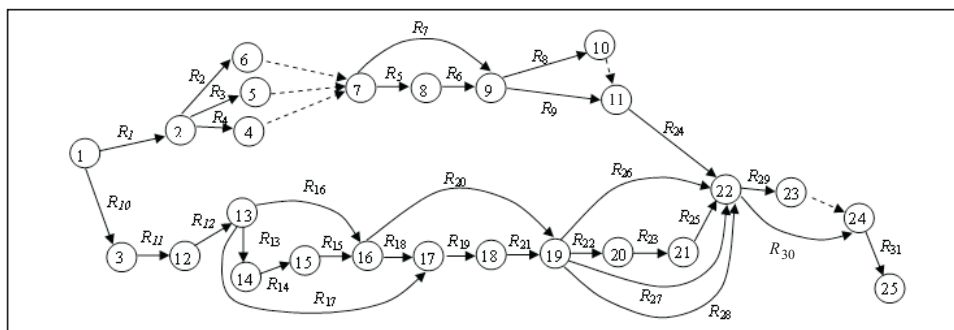


Рис. 3. Сетевая модель программы выполнения работ по монтажу и наладке системы пожарной сигнализации

В результате решения задачи (9) получены оценки необходимого числа технических специалистов — 18 человек, одновременно работающих на проекте, а также длительности критического пути проекта — 145 дней (рис. 4). Решение задачи (13) позволило за счет интенсификации выполнения критических работ без изменения характеристик не критических операций и увеличения количества работников сократить общее время выполнения проекта до 81 дня (рис. 5).

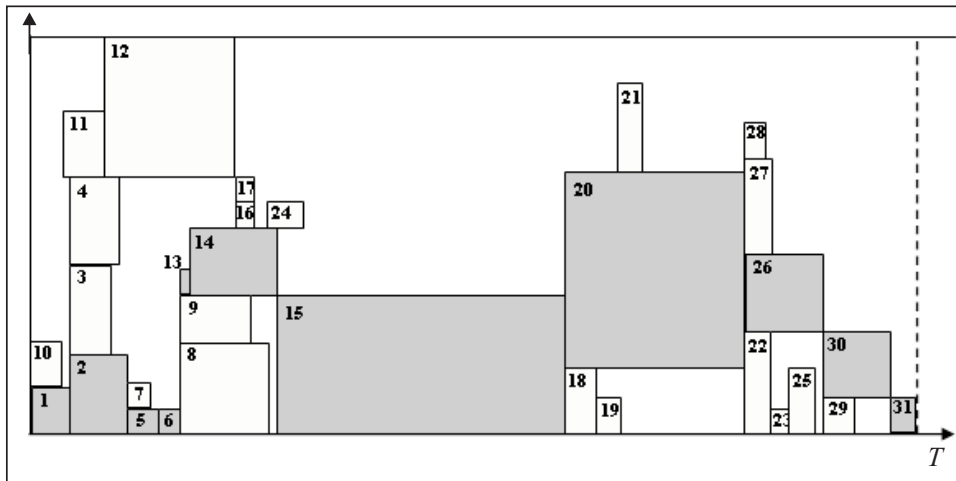


Рис. 4. График определения критического пути проекта (критические операции выделены серым цветом)

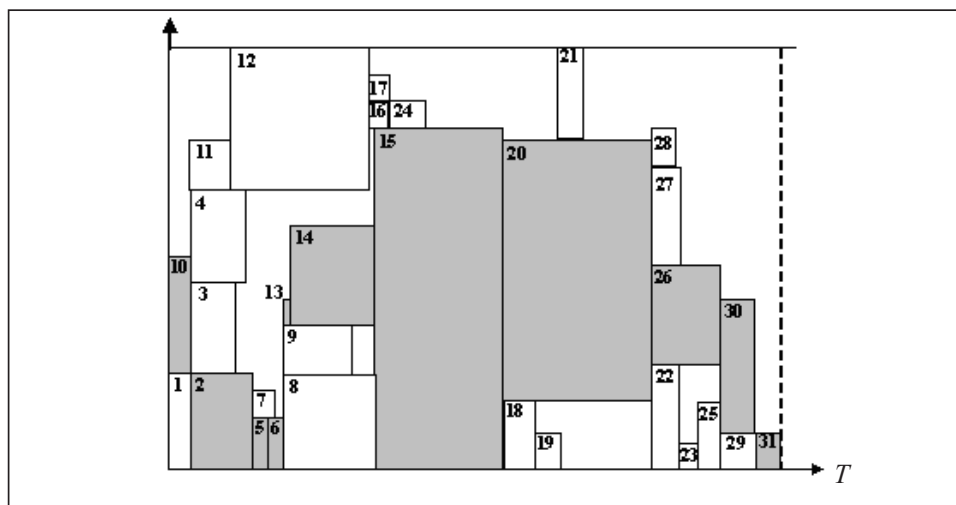


Рис. 5. График результата оптимизации характеристик критических операций проекта

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая модель многокритериальной задачи распределения ограниченных ресурсов проекта как набора сепарабельных оптимизационных задач размещения конечного набора геометрических объектов с переменными метрическими характеристиками. Выделены основные свойства задачи, рассмотрены точные и приближенные методы ее решения. Предложен подход к построению линейной аппроксимации сепарабельных функций ограничений задачи, отличающийся от известных возможностью задания точности аппроксимации как экзогенного параметра, а также обеспечением принадлежности аппроксимационного многогранного множества исходному пространству независимых переменных задачи. Проведена алгоритмическая и программная реализация предложенных методов, а также решена практическая задача определения параметров проекта системы автоматической пожарной сигнализации. Дальнейшие исследования направлены на построение вычислительных алгоритмов решения 3D задач упаковки объектов с переменными метрическими характеристиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Umble E. J., Haft R. R., Umble M. M. Enterprise resource planning: Implementation procedures and critical success factors // *Europ. J. Oper. Res.* — 2003. — N 146. — P. 241–257.
2. Управление проектами: Справочное руководство / Под ред. И.И. Мазура и В.Д. Шапиро. — М.: Высш. шк., 2000. — 875 с.
3. Крижановский В.В., Попов С.М. Система управления комплексными проектами // *Кибернетика и системный анализ.* — 2009. — № 6. — С. 131–136.
4. Воронин А.Н. Многокритериальная задача распределения ограниченных ресурсов // *Там же.* — 2011. — № 3. — С. 179–182.
5. He Zh., Liu R., Jia T. Metaheuristics for multi-mode capital-constrained project payment scheduling // *Europ. J. Oper. Res.* — 2012. — N 223. — P. 605–613.
6. Mika M., Waligya G., Weglarz J. Tabu search for multi-mode resource-constrained project scheduling with schedule-dependent setup times // *Ibid.* — 2008. — N 187 (3). — P. 1238–1250.
7. Михалевич В.С., Шкурба В.В. Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения выполнения работ // *Кибернетика.* — 1966. — № 2. — С. 34–40.
8. Эвристические методы календарного планирования / Т.П. Подчасова, В.М. Португал, В.А. Татаров, В.В. Шкурба. — К.: Техніка, 1980. — 140 с.
9. Слепцов А.И., Тищук Т.А. Метод расчета характеристик операций в задаче нечеткого планирования и управления // *Кибернетика и системный анализ.* — 2003. — № 3. — С. 58–71.
10. Новожилова М.В., Романова Т.Е. Фактор неопределенности временного параметра при управлении проектами // *Пробл. машиностр.* — 2001. — Т. 4, № 1–2. — С. 79–84.
11. Planning and design models for construction industry: A critical survey / B.R. Sarker, P.J. Egbelu, T.W. Liao, Y. Junfang. // *Automation in Construction.* — 2012. — N 22. — P. 123–134.
12. Петров Е.Г., Новожилова М.В., Гребенник І.В. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах. — К. Техніка, 2003. — 240 с.
13. Таха Х.А. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2001. — 912 с.
14. Чуб И.А., Новожилова М.В. Аналитическое описание условия принадлежности объекта с изменяемыми метрическими характеристиками области размещения // *Системы обработки информации.* — 2002. — Вып. 6(22). — С. 248–252.
15. Новожилова М.В., Попельнюх Н.О. Розв'язання задачі оптимізації ресурсів проекту при точних вихідних даних // *Вісн. ЖДТУ. Техн. науки.* — 2006. — № 4 (39). — С. 225–230.
16. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1986. — 268 с.
17. Чуб И.А. Геометричне моделювання основних обмежень на параметри розміщення об'єктів зі змінними метричними характеристиками // *Прикл. геометрія та інж. графіка: Зб. наук. праць.* — Мелітополь: ТДАТУ, 2009. — Вип. 4. — Т. 42. — С. 77–85.
18. Чуб И.А., Мурин М.Н., Новожилова М.В. Метод решения задачи размещения прямоугольников с переменными метрическими характеристиками // *Радиоэлектроника и информатика.* — 2007. — № 4. — С. 134–141.
19. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985. — 509 с.
20. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness / San-Francisco: Freeman, 1979. — 387 p.
21. Липницький А.А. Применение генетических алгоритмов к задаче о размещении прямоугольников // *Кибернетика и системный анализ.* — 2002. — № 6. — С. 180–184.
22. Чуб И.А., Новожилова М.В. Конечный метод поиска глобального минимума задачи размещения прямоугольных объектов // *Доп. НАНУ.* — 2011. — № 11. — С. 56–61.

Поступила 15.11.2012