УДК 681.3

А.И. ПРОВОТАР, А.В. ЛАПКО, А.А. ПРОВОТАР

НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Ключевые слова: *лингвистическая переменная, нечеткий логический вывод, нечеткое событие, вероятность нечеткого события.*

ВВЕДЕНИЕ

Разработкой математических методов решения медицинских задач диагностики ученые занимаются много лет. Эффективность подобных математических методов подтверждает использование медицинских диагностических систем, которые были разработаны в последнее время [1]. Общей характеристикой подобных систем является зависимость от конкретных методов обработки групповых данных и особенностей медицинской информации.

НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Удобным инструментом для представления информационных моделей в диагностических системах являются нечеткие системы логического вывода (системы спецификаций) [2–5], под которыми понимают упорядоченное множество нечетких инструкций, дающих при выполнении приближенное (нечеткое) решение проблемы.

Пусть x — входная и y — выходная лингвистические переменные [2, 3]; A и B — некоторые нечеткие множества, задающие значения элементов терм-множеств переменных x и y соответственно. Простейшей нечеткой системой логического вывода может быть конструкция

вход (x);
если x есть A, **то** y есть B;
выход (y).

Инструкция **если** x есть A, **то** y есть B интерпретируется как нечеткая импликация $A \to B$ и, следовательно, задается нечетким отношением на декартовом произведении областей определения (четких множествах) входной $\mathbf{X}$ и выходной $\mathbf{Y}$ переменными. Значение системы на выходе определяется с помощью композиционного правила. А именно, если на вход подается нечеткое множество A', то на выходе получаем нечеткое множество B', которое определяется по формуле $B'(y) = \max\limits_{x \in X} \min(A'(x), \min\{A(x), B(y)\})$, $y \in \mathbf{Y}$.

Более сложную нечеткую систему образует конструкция вида

вход (x);
если x есть A_1, **то** y есть B_1;
если x есть A_2, **то** y есть B_2;
. . . .
если x есть A_m, **то** y есть B_m;
выход (y),

где A_i и B_i — нечеткие множества.

Существует два основных способа определения выхода B', в которых используется так называемое понятие агрегации правил, т.е. учет суммарной эффективности работы всех правил. Оператор агрегации Agg действует как s-норма [2], но разрешается использование произвольной t-нормы.

Первый способ определения выхода состоит в предварительной агрегации нечетких отношений $R = \mathrm{Agg}(R_1, R_2, \ldots, R_m)$. Результат B' при заданном входе

A' определяется с помощью композиционного правила: $B' = A' \circ R$. Если оператор агрегации является операцией нахождения максимума, то $B' = A' \circ \bigcup_{i=1}^{m} R_i$.

Второй способ состоит в определении выходов для каждого правила с помощью использования композиции $B_i' = A' \circ R_i$, $i = 1, \ldots, m$. Далее осуществляется агрегация полученных выходов по правилу $B' = \mathrm{Agg}(B_1', B_2', \ldots, B_m')$, т.е.

$$B' = \bigcup_{i=1}^{m} (A' \circ R_i) .$$

Утверждение 1. При использовании композиций max–min совместно с операцией максимума в качестве оператора агрегации результаты, полученные обоими механизмами логического вывода, будут эквивалентными, т.е. справедливо соотношение

$$A' \circ \bigcup_{i=1}^{m} R_i = \bigcup_{i=1}^{m} (A' \circ R_i) .$$

Больший интерес представляет ситуация, когда система имеет не один, а несколько входов:

вход $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
если x_1 есть $A_{11} \wedge x_2$ есть $A_{12} \wedge \ldots \wedge x_n$ есть A_{1n} , **то** y есть B_1;
если x_1 есть $A_{21} \wedge x_2$ есть $A_{22} \wedge \ldots \wedge x_n$ есть A_{2n} , **то** y есть B_2;
. . . .
если x_1 есть $A_{m1} \wedge x_2$ есть $A_{m2} \wedge \ldots \wedge x_n$ есть A_{mn} , **то** y есть B_m;
выход (y),

где x_j, $j = 1, \ldots, n$, — входные лингвистические переменные, y — выходная лингвистическая переменная, A_{ij} и B_i — нечеткие множества. Логическая связка $\wedge$ интерпретируется как t-норма нечетких множеств. В отличие от случая с одной входной переменной представление импликации в виде отношения в алгоритмах со многими входными параметрами невозможно. В связи с этим применяется другая процедура нахождения выхода, которая использует так называемые уровни истинности правил вида

если x_1 есть $A_{i1} \wedge x_2$ есть $A_{i2} \wedge \ldots \wedge x_n$ есть A_{in}, **то** y есть B_i.

В случае двух входов: x_1 и x_2, процедура выполнения алгоритма будет состоять из следующих шагов.

Шаг 1. Для каждого правила R , $i = 1, \ldots, m$, вычисляем уровень истинности правила

$$\alpha_i = \min \left[\max_{X_1} (A_1'(x_1) \wedge A_{i1}(x_1)),\ \max_{X_2} (A_2'(x_2) \wedge A_{i2}(x_2)) \right].$$

Шаг 2. Для каждого правила вычисляем индивидуальные выходы $B_i'(y) = \min(\alpha_i, B_i(y))$.

Шаг 3. Вычисляем агрегатный выход $B'(y) = \max(B_1', B_2', \ldots, B_m')$.

Эта процедура называется max–min или процедурой логического вывода Мамдани (импликация интерпретируется как операция минимум, агрегация выходов правил — как операция максимум).

Утверждение 2. При использовании композиций max–min и логического вывода Мамдани результаты будут эквивалентными, т.е. справедливо соотношение

$$B'(y) = \max_{x \in X} (A'(x) \wedge (R(x, y)) = \max_{i=1}^{m} (\alpha_i \wedge B_i(y)) .$$

ВЕРОЯТНОСТЬ И ВОЗМОЖНОСТЬ В НЕЧЕТКИХ СИСТЕМАХ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Для определения вероятности событий в пространстве S элементарных событий вводится понятие распределения вероятностей — числовая функция **P**, которая присваивает число $\mathbf{P}(A)$ элементарному событию A. Область определения функции $\mathbf{P}$ расширяется на множество 2^S.

Нечетким событием A [7] в некотором (непустом) универсальном пространстве $\mathbf{X}$ (обозначается $A \subseteq \mathbf{X}$) называется множество пар $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \mathbf{X}\}$, где $\mu_A : \mathbf{X} \to [0,1]$ — функция принадлежности нечеткого множества A.

Для определения возможности события [8, 9] в пространстве элементарных событий вводится понятие распределения возможностей $\mathbf{\Pi}$. Одно из известных аксиоматических определений функции распределения возможностей может быть таким:

$$\mathbf{\Pi}(\varnothing) = 0,$$
$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{X}) = 1,$$
$$\mathbf{\Pi}(A \cup B) = \max(\mathbf{\Pi}(A),\ \mathbf{\Pi}(B)).$$

При этом если события A_1, A_2, …, A_n взаимоисключающие, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей, а пересечение — их произведению. Возможность объединения произвольных событий равна максимуму возможностей, а пересечение — минимуму возможностей этих событий.

Если A — нечеткое множество в пространстве $\mathbf{X}$, описывающее четкое событие в этом пространстве, т.е. $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \mathbf{X}\}$, то вероятность этого события можно вычислить по формуле $\mathbf{P}(A) = \sum\limits_{i \in A} \mu_A(x) \cdot \mathbf{P}(x)$, а возможность — по формуле $\mathbf{\Pi}(A) = \max\limits_{x \in A}\{\mu_A(x) \cdot \mathbf{\Pi}(x)\}$.

Рассмотрим следующее нечеткое событие (множество) в пространстве $\mathbf{X}$: $A = \{(x, \mu_A(x)),\ x \in \mathbf{X}\}$, α-сечение события (множества) A определяется как обычное множество $A_\alpha = \{x, \mu_A(x) \geq \alpha\}$. Соответственно вероятность такого события $\mathbf{P}(A_\alpha) = \sum\limits_{x \in A_\alpha} \mathbf{P}(x)$. Здесь A_α является объединением взаимоисключающих элементарных событий. Вероятность A_α — это сума вероятностей элементарных событий из A_α.

Считают, что возможность того, что вероятность события A_α есть $\mathbf{P}(A_\alpha)$, равна α. Используя такую интерпретацию, определим нечеткую вероятность $\mathbf{P}(A)$ нечеткого события A, соответствующую α : $\mathbf{P}(A) = \{(\mathbf{P}(A_\alpha), \alpha), \alpha \in [0,1]\}$.

НЕЧЕТКИЕ СПЕЦИФИКАЦИИ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА В СИСТЕМЕ ГОМЕОПАТ

Рассмотрим пример построения нечетких спецификаций для диагностирования пациента в системе Гомеопат [4]. Пусть $\mathbf{X}_1 = \{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$, $\mathbf{X}_2 = \{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$, $\mathbf{X}_3 = \{35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 39,\ 40\}$ — пространства для определения значений элементов терм-множеств: Кашель = {слабый, умеренный, сильный}, Насморк = {слабый, умеренный, сильный} и Температура = {нормальная, повышенная, высокая, очень высокая} соответственно. Определим элементы этих терм-множеств следующим образом:

• Кашель	слабый	= 1/5 + 0.5/10,
	умеренный	= 0.5/5 + 0.7/10 + 1/15,
	сильный	= 0.5/10 + 0.7/15 + 1/20;
• Насморк	слабый	= 1/5 + 0.5/10,
	умеренный	= 0.5/10 + 1/15,
	сильный	= 0.7/15 + 1/20;
• Температура	нормальная	= 0.5/35 + 0.8/36 + 0.9/37 + 0.5/38,
	повышенная	= 0.5/37 + 1/38,
	высокая	= 0.5/38 + 1/39,
	очень высокая	= 0.8/39 + 1/40.

Пусть $\mathbf{Y} = \{6,\ 12,\ 24,\ 30,\ 48,\ 96\}$ — пространство для определения значений элементов терм-множества Антигриппин = {низкое, среднее, высокое}. При этом

Антигриппин	низкое	$= 1/6 + 0.5/12$,
	среднее	$= 1/24 + 1/30$,
	высокое	$= 0.8/48 + 1/96$.

Тогда зависимость разведения (дозы) препарата от симптомов пациента можно описать следующей системой спецификаций:

вход (x_1, x_2, x_3);
если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть слабый $\wedge x_3$ есть повышенная, **то** y есть низкое;
если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть умеренный $\wedge x_3$ есть высокая, **то** y есть среднее;
если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть умеренный $\wedge x_3$ есть очень высокая, **то** y есть высокое;
выход (y).

Здесь x_1, x_2, x_3 — входные лингвистические переменные, принимающие значения из терм-множеств Кашель, Насморк и Температура соответственно, y — выходная лингвистическая переменная. Если на вход x_1 этой системы подать величину $A_1' = 1/5 + 0.7/10$, на вход x_2 — величину $A_2' = 1/5 + 0.5/10$ и на вход x_3 — величину $A_3' = 1/36 + 0.9/37$, то в соответствии с процедурой выполнения системы спецификаций получим:

- первое правило

$$\alpha_1 = \min[\max(1\wedge 1,\ 0.7\wedge 0.5),\ \max(1\wedge 1,\ 0.5\wedge 0.5),\ \max(1\wedge 0,\ 0.9\wedge 0.5)] = \\ = \min[\max(1, 0.5),\ \max(1, 0.5),\ \max(0, 0.5)] = \min(1, 1, 0.5) = 0.5\,;$$

- второе правило

$$\alpha_2 = \min[\max(1\wedge 1, 0.7\wedge 0.5),\ \max(0.5\wedge 0.5),\ \max(1\wedge 0, 0.9\wedge 0)] = \\ = \min[\max(1, 0.5),\ \max(0.5, 0.5),\ \max(0, 0)] = \min(1, 0.5, 0) = 0\,;$$

- третье правило

$$\alpha_3 = \min[\max(1\wedge 1, 0.7\wedge 0.5),\ \max(0.5\wedge 0.5),\ \max(1\wedge 0, 0.9\wedge 0)] = \\ = \min[\max(1, 0.5),\ \max(0.5, 0.5),\ \max(0, 0)] = \min(1, 0.5, 0) = 0\,.$$

Вычислим индивидуальные выходы B_i' каждого правила:

$B_1' = \min\ (0.5,\ 1)/6 + \min\ (0.5,\ 0.5)/12 = 0.5/6 + 0.5/12$;
$B_2' = 0$;
$B_3' = 0$.

Агрегация индивидуальных выходов приводит к следующему выходу алгоритма: $B' = 0.5/6 + 0.5/12$.

При дефазификации полученного нечеткого множества B' имеем $y^* = (0.5\cdot 6 + 0.5\cdot 12)/(0.5 + 0.5) = 9$. Этот результат можно интерпретировать как Антигриппин девятого разведения. В примере для определения разведения (дозы) препарата применяется известная [3] система нечетких спецификаций. Для постановки диагноза, а также решения некоторых вероятностных задач используется другая система нечетких спецификаций, не допускающая дефазификации выходного нечеткого множества.

Пусть $\mathbf{X}_1 = \{5, 10, 15, 20\}$, $\mathbf{X}_2 = \{5, 10, 15, 20\}$ и $\mathbf{X}_3 = \{35, 36, 37, 38, 39, 40\}$ — пространства для определения значений элементов терм-множеств Кашель = {слабый, умеренный, сильный}, Насморк = {слабый, умеренный, сильный} и Температура = {нормальная, повышенная, высокая, очень высокая} соответственно. Элементы терм-множеств определяются, как и раньше.

Пусть $\mathbf{Y}$ = {грипп, ОРЗ, ангина, воспаление легких} — пространство для определения значений лингвистической переменной y. Тогда зависимость постановки диагноза болезни пациента от симптомов можно описать следующей системой спецификаций:

вход (x_1, x_2, x_3);

если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть слабый $\wedge x_3$ есть повышенная, **то** y есть 0.5/грипп + 0.5/ОРЗ + 0.4/ангина + 0.8/воспаление легких;

если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть умеренный $\wedge x_3$ есть высокая, **то** y есть 0.8/грипп + 0.7/ОРЗ + 0.8/ангина + 0.3/воспаление легких;

если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть умеренный $\wedge x_3$ есть очень высокая, **то** y есть 0.9/грипп + 0.7/ОРЗ + 0.8/ангина + 0.2/воспаление легких;

выход (y).

Если на вход x_1 этой системы подать величину $A_1' = 1/5 + 0.7/10$, на вход x_2 — величину $A_2' = 1/5 + 0.5/10$ и на вход x_3 — величину $A_3' = 1/36 + 0.9/37$, то в соответствии с процедурой выполнения системы спецификаций получим:

- первое правило $\alpha_1 = 0.5$;
- второе правило $\alpha_2 = 0$;
- третье правило $\alpha_3 = 0$.

Вычислим индивидуальные выходы B_i' каждого правила:

- B_1'(грипп) = min (α_1, B_1(грипп)) = min (0.5, 0.5) = 0.5,
  B_2'(грипп) = min (α_2, B_2(грипп)) = 0,
  B_3'(грипп) = min (α_3, B_3(грипп)) = 0;
- B_1'(ОРЗ) = min (α_1, B_1(ОРЗ)) = min (0.5, 0.5) = 0.5 ,
  B_2'(ОРЗ) = min (α_2, B_2(ОРЗ)) = 0,
  B_3'(ОРЗ) = min (α_3, B_3(ОРЗ)) = 0;
- B_1'(ангина) = min (α_1, B_1(ангина)) = min (0.5, 0.4) = 0.4,
  B_2'(ангина) = min (α_2, B_2(ангина)) = 0,
  B_3'(ангина) = min (α_3, B_3(ангина)) = 0;
- B_1' (воспаление легких) = min (α_1, B_1(воспаление легких)) = min (0.5, 0.8) = 0.5 ,
  B_2'(воспаление легких) = min (α_2, B_2(воспаление легких)) = 0,
  B_3'(воспаление легких) = min (α_3, B_3(воспаление легких)) = 0.

Агрегация индивидуальных выходов приводит к следующему выходу алгоритма:

B = 0.5/грипп + 0.5/ОРЗ + 0.4/ангина + 0.5/воспаление легких.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ (ВОЗМОЖНОСТНЫЕ) ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Задача 1. Если распределение вероятностей и возможностей в пространстве **Y** = {грипп, ОРЗ, ангина, воспаление легких}, например такое

P(грипп) = **П**(грипп) = 0.4, **P**(ОРЗ) = **П**(ОРЗ) = 0.4,

P(ангина) = **П**(ангина) = 0.1,

P(воспаление легких) = **П**(воспаление легких) = 0.1,

то вероятность и возможность того, что у пациента грипп, ОРЗ, ангина или воспаление легких вычисляются следующим образом:

P(грипп) = **П**(грипп) = $0.5 \cdot 0.4 = 0.2$, **P**(ОРЗ) = **П**(ОРЗ) = $0.5 \cdot 0.4 = 0.2$,

P(ангина) = **П**(ангина) = $0.4 \cdot 0.1 = 0.04$,

P(воспаление легких) = **П**(воспаление легких) = $0.5 \cdot 0.1 = 0.05$.

Рассмотрим нечеткое событие

B = 0.5/грипп + 0.5/ОРЗ + 0.4/ангина + 0.5/воспаление легких

и α-разрезы этого события $A_{0.5}$ = {грипп, ОРЗ, воспаление легких}, $A_{0.4}$ = {грипп, ОРЗ, ангина, воспаление легких}. Тогда при распределении вероятностей и возможностей

P(грипп) = **П**(грипп) = 0.4, **P**(ОРЗ) = **П**(ОРЗ) = 0.4, **P**(ангина) = **П**(ангина) = 0.1,

P(воспаление легких) = **П**(воспаление легких) = 0.1

вероятности и возможности событий $A_{0.5}$ и $A_{0.4}$ соответственно равны $\mathbf{P}(A_{0.5}) = 0.9$, $\mathbf{P}(A_{0.4}) = 1$, $\mathbf{\Pi}(A_{0.5}) = 0.4$, $\mathbf{\Pi}(A_{0.4}) = 0.4$. В этом случае нечеткая вероятность нечеткого события B есть нечеткое множество $\mathbf{P}(B) = 0.5/0.9 + 0.5/0.9 + 0.4/1 + 0.5/0.9$, а нечеткая возможность нечеткого события B есть нечеткое множество $\mathbf{\Pi}(B) = 0.5/0.4 + 0.5/0.4 + 0.4/0.4 + 0.5/0.4$.

Задача 2. Предположим, что выход системы нечетких спецификаций при входах A'_1, A'_2, A'_3 (определены выше) соответственно есть нечеткое множество

$$B = 0.5/\text{грипп} + 0.5/\text{ОРЗ} + 0.4/\text{ангина} + 0.5/\text{воспаление легких}.$$

Нужно найти значение симптома Кашель и вычислить вероятность и возможность его проявления. Для решения этой задачи симптом Кашель определим нечетким множеством Неизвестный $= x_1/5 + x_2/10 + x_3/15 + x_4/20$ в пространстве $\mathbf{X}_1$ и применим процедуру нахождения выхода заданной системы спецификаций. В соответствии с процедурой выполнения системы спецификаций получим:

- первое правило

$$\alpha_1 = \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), \max(1 \wedge 1, 0.5 \wedge 0.5), \max(1 \wedge 0, 0.9 \wedge 0.5)] =$$
$$= \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 1, 0.5] = \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5];$$

- второе правило

$$\alpha_2 = \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), \max(0.5 \wedge 0.5), \max(1 \wedge 0, 0.9 \wedge 0)] =$$
$$= \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5, 0] = 0;$$

- третье правило

$$\alpha_3 = \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), \max(0.5 \wedge 0.5), \max(1 \wedge 0, 0.9 \wedge 0)] =$$
$$= \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5, 0] = 0.$$

Вычислим индивидуальные выходы каждого правила:

- $B'_1(\text{грипп}) = \min(\alpha_1, B_1(\text{грипп})) = \min(\min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5], 0.5) =$
  $= \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5]$,
  $B'_2(\text{грипп}) = \min(\alpha_2, B_2(\text{грипп})) = 0$,
  $B'_3(\text{грипп}) = \min(\alpha_3, B_3(\text{грипп})) = 0$;
- $B'_1(\text{ОРЗ}) = \min(\alpha_1, B_1(\text{ОРЗ})) = \min(\min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5], 0.5) =$
  $= \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5]$,
  $B'_2(\text{ОРЗ}) = \min(\alpha_2, B_2(\text{ОРЗ})) = 0$,
  $B'_3(\text{ОРЗ}) = \min(\alpha_3, B_3(\text{ОРЗ})) = 0$;
- $B'_1(\text{ангина}) = \min(\alpha_1, B_1(\text{ангина})) = \min(\min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5], 0.4) =$
  $= \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.4]$,
  $B'_2(\text{ангина}) = \min(\alpha_2, B_2(\text{ангина})) = 0$,
  $B'_3(\text{ангина}) = \min(\alpha_3, B_3(\text{ангина})) = 0$;
- $B'_1(\text{воспаление легких}) = \min(\alpha_1, B_1(\text{воспаление легких})) =$
  $= \min(\min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5], 0.5) = \min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5]$,
  $B'_2(\text{воспаление легких}) = \min(\alpha_2, B_2(\text{воспаление легких})) = 0$,
  $B'_3(\text{воспаление легких}) = \min(\alpha_3, B_3(\text{воспаление легких})) = 0$.

Агрегация индивидуальных выходов приводит к следующей системе нечетких реляционных уравнений [6]:

$$\min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.4] = 0.4,$$
$$\min[\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5), 0.5] = 0.5.$$

Решение системы ищем как решение неравенства $\max(x_1 \wedge 1, x_2 \wedge 0.5) \ge 0.5$. Для этого находим

$$\delta_1 = T^+(1, 0.5) = \max\{z, \min(z, 1) \le 0.5\} = 0.5\,,$$

$$\delta_2 = T^+(0.5, 0.5) = \max\{z, \min(z, 0.5) \le 0.5\} = 1\,.$$

При этом $(\delta_1, \delta_2) = (0.5, 1)$ — решение системы нечетких реляционных уравнений [6]. Поэтому значение симптома Кашель описывается нечетким множеством Неизвестный = 0.5/5 + 1/10.

Если распределение вероятностей и возможностей в пространстве $\mathbf{X}_1$ = {5, 10, 15, 20}, например такое

$$\mathbf{P}(5) = \mathbf{\Pi}(5) = 0.4,\ \mathbf{P}(10) = \mathbf{\Pi}(10) = 0.4,\ \mathbf{P}(15) = \mathbf{\Pi}(15) = 0.1,\ \mathbf{P}(20) = \mathbf{\Pi}(20) = 0.1,$$

то вероятность и возможность того, что у пациента есть кашель, вычисляются так:

$$\mathbf{P}(\text{Неизвестный}) = 0.5 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4 = 0.6,$$

$$\mathbf{\Pi}(\text{Неизвестный}) = \max(0.5 \cdot 0.4,\ 1 \cdot 0.4) = 0.4.$$

Задача 3. Пусть $\mathbf{X}_1$= {5, 10, 15}, $\mathbf{X}_2$= {5, 10, 15}, $\mathbf{X}_3$ = {36, 37, 38, 39, 40} — пространства для определения значений элементов терм-множеств Кашель = {слабый, умеренный, сильный}, Насморк = {слабый, умеренный, сильный} и Температура = {нормальная, повышенная, высокая, очень высокая} соответственно. Элементы терм-множеств определим следующим образом:

• Кашель	слабый	= 1/5 + 0.5/10 + 0.1/15,
	умеренный	= 0.5/5 + 0.7/10 + 0.8/15,
	сильный	= 0.1/5 + 0.5/10 + 1/15;
• Насморк	слабый	= 1/5 + 0.5/10 + 0.1/15,
	умеренный	= 0.5/5 + 0.7/10 + 0.8/15,
	сильный	= 0.1/5 + 0.5/10 + 1/15;
• Температура	нормальная	= 1/36 + 0.7/37 + 0.8/38,
	повышенная	= 0.5/36 + 0.8/37 + 0.9/38,
	высокая	= 0.1/36 + 0.2/37 + 0.5/38 + 0.7/39,
	очень высокая	= 0.2/37 + 0.5/38 + 0.7/39 + 1/40.

Предположим, что выход системы нечетких спецификаций

вход (x_1, x_2, x_3);

если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть слабый $\wedge x_3$ есть повышенная , **то** y есть 0.5/грипп + 0.5/ОРЗ + 0.4/ангина + 0.8/воспаление легких;

если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть умеренный $\wedge x_3$ есть высокая, **то** y есть 0.8/грипп + 0.7/ОРЗ + 0.8/ангина + 0.3/воспаление легких;

если x_1 есть слабый $\wedge x_2$ есть умеренный $\wedge x_3$ есть очень высокая, **то** y есть 0.9/грипп + 0.7/ОРЗ + 0.8/ангина + 0.2/ воспаление легких;

выход (y)

при входах A_1' = 1/5 + 0.7/10 + 0.8/15, A_2' = 1/5 + 0.5/10 + 0.1/15, A_3' = 1/36 + + 0.5/37 + 0.2/38 соответственно есть нечеткое множество

$$B = 0.5/\text{грипп} + 0.3/\text{ОРЗ} + 0.6/\text{ангина} + 0.2/\text{воспаление легких}.$$

Нужно определить вероятности и возможности правил логического вывода (гипотез) при известном событии B.

Для решения этой задачи (нахождения вероятности) используем аналог формулы Байеса для нечетких событий. Пусть H_1, H_2, H_3 — гипотезы (правила логического вывода) приведенной выше системы спецификаций. Вычислим выходы каждого правила этой системы:

• первое правило

$$\alpha_1 = \min[\max(1 \wedge 1, 0.7 \wedge 0.5, 0.8 \wedge 0.1),\ \max(1 \wedge 1, 0.5 \wedge 0.5, 0.1 \wedge 0.1),$$
$$\max(1 \wedge 0.5, 0.5 \wedge 0.8, 0.2 \wedge 0.9)] = \min[\max(1, 0.5, 0.1),$$
$$\max(1, 0.5, 0.1), \max(0.5, 0.5, 0.2)] = \min[1, 1, 0.5] = 0.5\,;$$

• второе правило

$$\alpha_2 = \min[\max(1\wedge 1, 0.7\wedge 0.5, 0.8\wedge 0.1), \max(1\wedge 0.5,\ 0.5\wedge 0.7, 0.1\wedge 0.8),$$
$$\max(1\wedge 0.1, 0.5\wedge 0.2, 0.2\wedge 0.5)] =$$
$$= \min[\max(1, 0.5, 0.1), \max(0.5, 0.5, 0.1), \max(0.1, 0.2, 0.2)] = \min(1, 0.5,\ 0.2) = 0.2\ ;$$

• третье правило

$$\alpha_3 = \min[\max(1\wedge 1, 0.7\wedge 0.5, 0.8\wedge 0.1), \max(1\wedge 0.5, 0.5\wedge 0.7, 0.1\wedge 0.8)\ ,$$
$$\max(0.5\wedge 0.2, 0.2\wedge 0.5)] = \min[\max(1, 0.5, 0.1), \max(0.5, 0.5, 0.1), \max(0.2, 0.2)] =$$
$$= \min(1, 0.5, 0.2) = 0.2\ .$$

Вычислим выходы каждого правила:

• B_1'(грипп) = min (α_1, B_1(грипп)) = min (0.5, 0.5) = 0.5,
B_1'(ОРЗ) = min (α_1, B_1(ОРЗ)) = min (0.5, 0.5) = 0.5,
B_1'(ангина) = min (α_1, B_1(ангина)) = min (0.5, 0.4) = 0.4,
B_1'(воспаление легких) = min (α_1, B_1(воспаление легких)) = min (0.5, 0.8) = 0.5
(выход первого правила — это нечеткое множество B_1' = 0.5/грипп + 0.5/ОРЗ + + 0.4/ангина + 0.5/воспаление легких);

• B_2'(грипп) = min (α_2, B_2(грипп)) = min (0.2, 0.8) = 0.2,
B_2'(ОРЗ) = min (α_2, B_2(ОРЗ)) = min (0.2, 0.7) = 0.2,
B_2'(ангина) = min (α_2, B_2(ангина)) = min (0.2, 0.8) = 0.2,
B_2'(воспаление легких) = min (α_2, B_2 (воспаление легких)) = min (0.2, 0.3) = 0.2
(выход второго правила — это нечеткое множество B_2' = 0.2/грипп + 0.2/ОРЗ + + 0.2/ангина + 0.2/воспаление легких);

• B_3'(грипп) = min (α_3, B_3 (грипп)) = min (0.2, 0.9) = 0.2,
B_3'(ОРЗ) = min (α_3, B_3(ОРЗ)) = min (0.2, 0.7) = 0.2,
B_3'(ангина) = min (α_3, B_3(ангина)) = min (0.2, 0.8) = 0.2,
B_3'(воспаление легких) = min (α_3, B_3 (воспаление легких)) = min (0.2, 0.2) = 0.2
(выход третьего правила — это нечеткое множество B_3' = 0.2/грипп + 0.2/ОРЗ + + 0.2/ангина + 0.2/воспаление легких).

События H_1B, H_2B, H_3B находим следующим образом:

• H_1B = min (B(грипп), B_1'(грипп))/грипп + min (B(ОРЗ), B_1'(ОРЗ))/ОРЗ + + min (B(ангина), B_1'(ангина))/ангина + min (B(воспаление легких), B_1'(воспаление легких))/воспаление легких) = 0.5/грипп + 0.3/ОРЗ + + 0.4/ангина + 0.2/воспаление легких;

• H_2B = min (B(грипп), B_2'(грипп))/грипп + min (B(ОРЗ), B_2'(ОРЗ))/ОРЗ + + min (B(ангина), B_2'(ангина))/ангина + min (B(воспаление легких), B_2'(воспаление легких))/воспаление легких) = 0.2/грипп + 0.2/ОРЗ + + 0.2/ангина + 0.2/воспаление легких;

• H_3B = min (B(грипп), B_3'(грипп))/грипп + min (B(ОРЗ), B_3'(ОРЗ))/ОРЗ + + min (B(ангина), B_3'(ангина))/ангина + min (B(воспаление легких), B_3'(воспаление легких))/воспаление легких) = 0.2/грипп + 0.2/ОРЗ + + 0.2/ангина + 0.2/воспаление легких.

Поэтому

$$\mathbf{P}(H_1/B) = \frac{\mathbf{P}(H_1B)}{\mathbf{P}(B)} = 0.95,\ \mathbf{P}(H_2/B) = \frac{\mathbf{P}(H_2B)}{\mathbf{P}(B)} = 0.5,$$
$$\mathbf{P}(H_3/B) = \frac{\mathbf{P}(H_3B)}{\mathbf{P}(B)} = 0.5.$$

Возможности гипотез вычисляем по формуле, предложенной в [8]:

$$\mathbf{\Pi}(H_i/B) = \begin{cases} \mathbf{\Pi}(H_iB),\ \mathbf{\Pi}(H_iB) < \mathbf{\Pi}(B); \\ 1,\ \ \mathbf{\Pi}(H_iB) = \mathbf{\Pi}(B). \end{cases}$$

Будем иметь

$$\mathbf{\Pi}(H_1 B) = \max\ (0.4 \cdot 0.5,\ 0.4 \cdot 0.3,\ 0.1 \cdot 0.4, 0.1 \cdot 0.2) = 0.2,$$

$$\mathbf{\Pi}(B) = \max\ (0.4 \cdot 0.5,\ 0.4 \cdot 0.3,\ 0.1 \cdot 0.6,\ 0.1 \cdot 0.2) = 0.2.$$

Поэтому

$$\mathbf{\Pi}(H_1 / B) = 1,\ \mathbf{\Pi}(H_2 / B) = 0.08,\ \mathbf{\Pi}(H_3 / B) = 0.08.$$

Таким образом, предложен один из возможных подходов к решению задачи 3. Большие трудности [8, 10] возникают при определении условной вероятности нечетких событий. Вместе с тем данный подход позволяет исследовать вопросы обучения нечетких систем логического вывода для построения оптимальных систем спецификаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании фундаментальных результатов Фунахаши с помощью нечетких систем можно аппроксимировать с заданной точностью любую непрерывную на компакте функцию и использовать нечеткие спецификации для решения задач диагностики в различных постановках и вероятностно-возможностных подходах для получения оценок выхода нечетких систем логического вывода. С помощью этих оценок (в частности, для гипотез) можно строить оптимальные в некотором смысле гипотезы и исследовать вопросы об их оптимальном количестве.

Применение нечетких систем логического вывода для решения задач диагностики с соответствующими методами обучения может оказаться более эффективным при реализации по сравнению с нейронными сетями. Рассмотренные в статье подходы к вычислению вероятностей и возможностей нечетких событий не завершены. Они только позволяют ввести в язык индуктивной математики вероятностные и возможностные оценки, а следовательно, делают его более точным и мобильным при использовании, например, нечетких систем логического вывода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейлор К. Как построить свою экспертную систему. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 286 с.
2. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. — М.: Телеком, 2006. — 382 с.
3. Leski J. Systemy neuronowo-rozmyte. — Warszawa: Naukowo–Techniczne, 2008. — 690 s.
4. Катеринич Л., Провотар А. Диагностирование на нейронных сетях в системе Гомеопат // XIII-th Intern. Conf.: Knowledge Dialogue Solution. — Sofia, 2007. — **1**. — P. 64–68.
5. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets ana Systems. — 1978. — N 1. — P. 3–28.
6. Основы нечеткой алгебры / Под ред. С.Л. Блюмина. — Липецк: ЛЭГИ, 2002. — 112 с.
7. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
8. Dubois D. and Prade H. The logical view of conditioning and its application to possibility and evidence theories // Intern. J. Approx. Reas. — 1990. — N 4. — P. 23–46.
9. Провотар А.И., Лапко А.В. О некоторых подходах к вычислению неопределенностей // Проблеми програмування. — 2010. — № 2–3. — С. 22–28.
10. Vejnarova J. Conditional independens relations in possibility theory // Proc. ISIPTA. — 1999. — P. 343–351.

Поступила 18.01.2013