

БЕССЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АТОМАРНЫХ РАДИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: *бессеточный метод, атомарные функции многих переменных, краевые задачи, нестационарные задачи теплопроводности.*

В настоящей статье кратко изложена концепция бессеточного метода решения нестационарных задач теплопроводности, реализуемого с использованием атомарных функций многих переменных. Обзоры по бессеточным методам представлены в статьях [1–5]. Вопросы построения атомарных функций многих переменных и их применение в бессеточных схемах решения дифференциальных уравнений в частных производных исследовались в работах [6–8].

В моделях сплошной среды для описания баланса тепла рассматривается уравнение теплопроводности

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u + q, \quad (1)$$

где $u = u(t, \vec{r})$ — поле температур, время t и пространство $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — независимые переменные, c — теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности, q — плотность источников и стоков тепла.

Рассмотрим решение на отрезке времени $[t_0, t_1]$, считая, что область изменения независимых переменных имеет вид $G(t, \vec{r}) = \Omega(\vec{r}) \times [t_0, t_1]$. Пусть геометрическая граница области решения $\partial\Omega = \sum_{i=1}^3 \partial\Omega_i$, $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Гра-

ничные условия для этой задачи описываются соответствующими комбинациями потоков тепла и значений решения на границе:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) &= \bar{u}, \quad \vec{x} \in \partial\Omega_1, \\ q(\vec{x}) &= -\bar{q}, \quad \vec{x} \in \partial\Omega_2, \\ q(\vec{x}) &= -h(u - u_\infty), \quad \vec{x} \in \partial\Omega_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $q = k\partial u / \partial n$ — поток тепла, n — внешний вектор нормали; h — коэффициент теплопроводности; u_∞ — температура окружающей среды. Начальные условия представлены в виде

$$u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}). \quad (3)$$

Таким образом, для уравнения теплопроводности в ограниченной 3D области $\Omega(x_1, x_2, x_3)$ с границей $\partial\Omega(x_1, x_2, x_3)$ формулируется нестационарная краевая задача с начальными и граничными условиями.

Решение соответствующей краевой задачи будем реализовывать, следуя итерационной схеме решения нестационарных краевых задач теплопроводности с использованием бессеточного подхода на основе применения атомарных радиальных базисных функций.

Исходное уравнение нестационарной теплопроводности (1) может быть сведено к последовательности модифицированных неоднородных уравнений Гельм-

гольца с помощью процедуры дискретизации по времени [9]:

$$\nabla^2 v^n - \lambda^2 v^n = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k}, \quad (4)$$

где $v^n = u^n - \frac{1-\theta}{\theta} u^{n-1}$, θ — весовой коэффициент, $u^n = u(\bar{x}, n\Delta t)$, Δt — шаг по времени, $\lambda = 1/\theta\alpha\Delta t$, $\alpha = k/\rho c_p$.

Решение краевой задачи теплопроводности согласно приведенной итерационной схеме реализуется на основе комбинации метода двойного замещения и метода фундаментальных решений с использованием атомарных радиальных базисных функций. Чтобы избежать интегрирования по области, используется метод частных решений, заключающийся в разделении решения неоднородного уравнения на частное и однородное. Метод фундаментальных решений используется для решения однородного уравнения, а метод двойного обмена с использованием атомарных радиальных базисных функций — для получения частного решения. В результате такого подхода реализуется полностью бессеточный метод.

В бессеточных схемах искомое решение представляется в виде суммы базисных функций, размещенных в узлах структурированной или неструктурированной сетки. Для того чтобы получить узлы, в которых будут расставлены базисные функции, необходимо сгенерировать соответствующую сетку (не связанную с областью решения задачи). Кроме того, для удовлетворения граничным условиям необходимо расположить базисные функции также и в узлах, расположенных на граничных поверхностях модели.

Решение v^n согласно методу частных решений разделяется на однородное v_h^n и частное v_p^n : $v^n = v_h^n + v_p^n$. Управляющее уравнение для частного решения представляется в виде

$$\nabla^2 v_p^n - \lambda^2 v_p^n = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k}. \quad (5)$$

Частное решение v_p^n не должно удовлетворять никакому набору граничных условий.

Управляющая система для однородного решения v_h^n представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} \nabla^2 v_h^n(\bar{x}) - \lambda^2 v_h^n(\bar{x}) = 0, & \bar{x} \in \Omega, \\ v_h^n(\bar{x}) = \bar{u}(\bar{x}) - v_p^n(\bar{x}), & \bar{x} \in \partial\Omega_1, \\ q_h^n(\bar{x}) = \bar{q}(\bar{x}) - q_p^n(\bar{x}), & \bar{x} \in \partial\Omega_2, \\ (kq_h^n + hv_h^n)(\bar{x}) = -kq_p^n(\bar{x}) - hv_p^n(\bar{x}) + hu_\infty(\bar{x}), & \bar{x} \in \partial\Omega_3. \end{cases} \quad (6)$$

В качестве базисных функций для интерполяции частного решения в уравнении (5) используем атомарные радиальные базисные функции, порождаемые дифференциально-функциональным уравнением специального вида [10], формируемым при использовании дифференциального оператора Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \Delta u(x_1, x_2, x_3) - \lambda^2 u(x_1, x_2, x_3) = \\ = \nu \iint_{\partial S} u[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2), 3(x_3 - \xi_3)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2, 3x_3), \end{aligned} \quad (7)$$

где ∂S — сфера; $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{4}{9}$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа;

величины параметров ν, μ определяются из условия, гарантирующего существование финитного решения уравнения (7); λ — параметр оператора Гельмгольца. Искомые радиальные базисные функции, обозначенные $\text{Норр}(x_1, x_2, x_3)$, являются решением уравнения (7) только при выборе следующих значений параметров:

$$\nu = \frac{3^5 \lambda^3 i}{8\pi \left[\sin \frac{2}{3} i\lambda - 2\lambda i \right]}, \quad \mu = \frac{8\pi}{3^5 \lambda i} \nu \sin \frac{2}{3} i\lambda.$$

Функция $\text{Норр}(x_1, x_2, x_3)$ является бесконечно дифференцируемой с компактным носителем в форме шара и удовлетворяет условию нормировки, т.е. $\iiint \text{Норр}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$. Она легко определяется, поскольку для вычисления можно использовать ее представление в кубе $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ рядом Фурье

$$\text{Норр}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2) \cos(r\pi x_3)$$

со следующими коэффициентами:

$$a_{000} = \frac{1}{8};$$

$$a_{p00} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \text{Норр}(\xi_1, 0, 0) e^{-ip\pi\xi_1} d\xi_1 = \frac{1}{4} \widetilde{\text{Норр}}(p\pi, 0, 0);$$

$$a_{pq0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Норр}(\xi_1, \xi_2, 0) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-iq\pi\xi_2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2} \widetilde{\text{Норр}}(p\pi, q\pi, 0);$$

$$a_{0q0} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \text{Норр}(0, \xi_2, 0) e^{-iq\pi\xi_2} d\xi_2 = \frac{1}{4} \widetilde{\text{Норр}}(0, q\pi, 0);$$

$$a_{0qr} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Норр}(0, \xi_2, \xi_3) e^{-iq\pi\xi_2} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_2 d\xi_3 = \frac{1}{2} \widetilde{\text{Норр}}(0, q\pi, r\pi);$$

$$a_{p0r} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Норр}(\xi_1, 0, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_1 d\xi_3 = \frac{1}{2} \widetilde{\text{Норр}}(p\pi, 0, r\pi);$$

$$a_{00r} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \text{Норр}(0, 0, \xi_3) e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_3 = \frac{1}{4} \widetilde{\text{Норр}}(0, 0, r\pi);$$

$$a_{pqr} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Норр}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-iq\pi\xi_2} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \widetilde{\text{Норр}}(p\pi, q\pi, r\pi),$$

$p, q, r = 1, 2, \dots$

Представим визуализацию функции $\text{Норр}(x_1, x_2, x_3)$ (рис. 1, а) и функции $(\Delta - \lambda^2)\text{Норр}(x_1, x_2, x_3)$ при фиксированных значениях переменной x_3 (рис. 1, б), полученную от действия на функцию $\text{Норр}(x_1, x_2, x_3)$ дифференциального оператора Гельмгольца.

В рассматриваемой бессеточной схеме решения нестационарной краевой задачи базисные функции являются радиальными, имеющими конечный носитель. Свойство радиальности базисных функций позволяет представить значение функции в произвольной точке, зависящим только от величины расстояния от этой точки до центра носителя функции. Таким образом, для получения полной информации о базисной функции достаточно сохранять ее значения в точках выбранного произвольного радиуса.

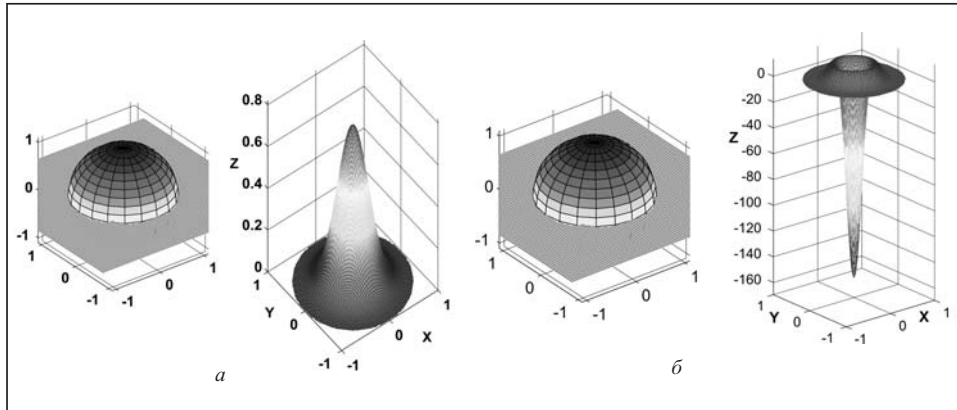


Рис. 1. Визуализация результатов работы модулей построения функции $\text{Ногр}(x_1, x_2, x_3)$ (а) и функции $(\Delta - \lambda^2)\text{Ногр}(x_1, x_2, x_3)$ (б)

Пусть $F^n(\vec{x}) = -\frac{1}{\theta^2 \alpha \Delta t} u^{n-1} + \frac{1-\theta}{\theta k} g^{n-1} + \frac{g^n}{k}$. Приближенное частное решение

конструируется с помощью атомарной радиальной базисной функции $\text{Ногр}(\vec{x})$. Соответствующая итерация $F^n(\vec{x})$ представляется в виде линейной комбинации базисных функций:

$$F^n(\vec{x}) \approx \hat{F}^n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^n \Psi_i(\vec{x}), \quad (8)$$

где N — количество точек коллокации, функции $\Psi_i(\vec{x})$ — результат воздействия оператора Гельмгольца на соответствующие функции $\text{Ногр}_i(\vec{x}) = \text{Ногр}(\vec{x} - \vec{x}_i)$:

$$\Psi_i(\vec{x}) = \Delta \text{Ногр}_i(\vec{x}) - \lambda^2 \text{Ногр}_i(\vec{x}).$$

Решая систему линейных уравнений (8) относительно неизвестных α_i^n , получаем значение $\hat{F}^n(\vec{x})$. Отметим, что матрица системы линейных уравнений будет плотной либо разреженной в зависимости от радиуса локального носителя функции $\text{Ногр}_i(\vec{x})$ и физических размеров области решения.

При определении значения коэффициентов α_i^n частное решение v_p^n представится в виде

$$v_p^n(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^n \text{Ногр}_j(\vec{x}). \quad (9)$$

Координаты узлов \vec{x}_i , к которым «привязаны» базисные функции $\text{Ногр}_i(\vec{x})$, строятся структурированной сеткой, например, с равномерной дискретизацией по всем направлениям. Для реализации процедуры удовлетворения граничным условиям необходимо распределить соответствующие узлы на граничных по-

верхностях модели. Для упрощения изложения выбираем область $\Omega(x_1, x_2, x_3)$ решения исходной краевой задачи в виде куба (рис. 2), имеющего единичный размер ребра: $[1; 1] \times [1; 1] \times [1; 1]$.

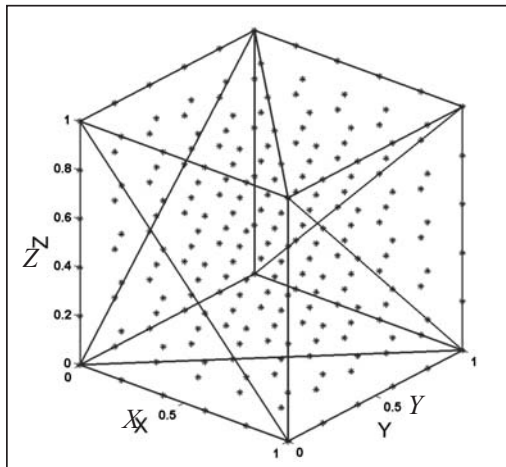


Рис. 2. Формирование множества внутренних узлов в области $\Omega(x_1, x_2, x_3)$ решения краевой задачи

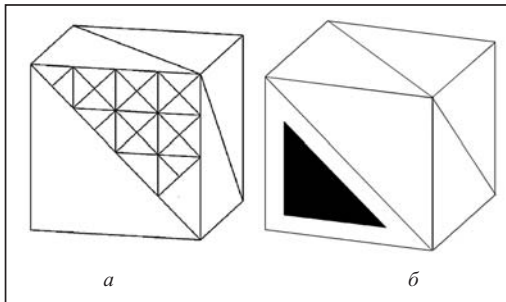


Рис. 3. Визуализация процедур построения граничных узлов, основанная на алгоритме измельчения сетки (а) и реализации схем использования подобных треугольников (б)

Однородное решение v_h^n дифференциального уравнения (6) можно получить с помощью различных граничных методов, например метода граничных элементов, метода Треффтца, метода фундаментальных решений [11]. В рассматриваемом случае используется метод фундаментальных решений ввиду его свойств спектральной сходимости, а также ввиду того, что в сочетании с методом двойного замещения реализуется полностью бессеточный метод. На n -м временном шаге однородное решение v_h^n представляется в виде линейной комбинации фундаментальных функций:

$$v_h^n(\vec{x}) = \sum_{i=1}^M \beta_i G(\vec{x}, \vec{z}_i), \quad (10)$$

где $G(\vec{x}, \vec{z}_i) = e^{-r\lambda} / 4\pi r$ — фундаментальное решение для модифицированного оператора Гельмгольца $\Delta - \lambda^2$, $r = \|\vec{x} - \vec{z}_i\|$ — евклидово расстояние между точками \vec{x} и \vec{z}_i . Здесь $\{\vec{z}_i\}_i^M$ — исходные точки на поверхности Γ' фиктивной области, содержащей область Ω .

Важно определить оптимальное размещение границы для фиктивной области. Существуют два подхода к созданию такой границы: статический и динамический. При статическом подходе, применяемом в данном исследовании, точки $\{\vec{z}_i\}_i^M$ выбираются заранее по определенной схеме. В работах [12, 13] исследованы величины погрешности для статического подхода. В частности, для задачи Дирихле показано, что точность аппроксимации метода фундаментальных реше-

Для построения соответствующих узлов на границе $\partial\Omega(x_1, x_2, x_3)$ области $\Omega(x_1, x_2, x_3)$ используется один из трех методов: метод, основанный на построении результата пересечения генерируемой равномерной сетки с поверхностью модели; метод, основанный на алгоритме измельчения сетки на основе выполнения триангуляции Делоне (рис. 3, а), и метод, основанный на построении на границе области подобных треугольников, имеющих общий центр вписанных окружностей (рис. 3, б).

Однородное решение v_h^n дифференциального уравнения (6) можно получить с помощью различных граничных методов, например метода граничных элементов, метода Треффтца, метода фундаментальных решений [11]. В рассматриваемом случае используется метод фундаментальных решений ввиду его свойств спектральной сходимости, а также ввиду того, что в сочетании с методом двойного замещения реализуется полностью бессеточный метод. На n -м временном шаге од-

ний улучшается с отдалением фиктивной границы от физической. В обеих работах фиктивная граница выбиралась в форме окружности в двумерном случае и сферой с центром, совпадающим с геометрическим центром области Ω решения (рис. 4), для трехмерной модели. Теоретически оптимальной фиктивной границей была бы сфера с бесконечным радиусом. На практике радиус должен быть выбран настолько большим, насколько позволяют пределы точности компьютера, на что указано в работе [12].

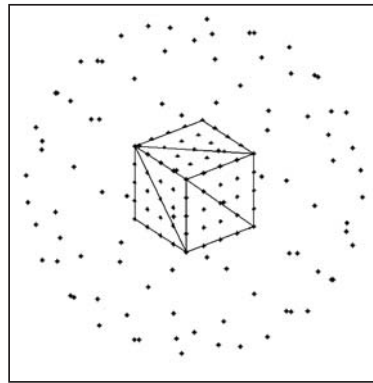


Рис. 4. Схема расположения узлов на фиктивной поверхности, построенной для области Ω

Линейная комбинация фундаментальных решений $G(\bar{x}, \bar{z}_i)$ по определению удовлетворяет модифицированному уравнению Гельмгольца. Коэффициенты β_i отбирают таким образом, чтобы в выбранных точках коллокации удовлетворялись граничные условия. Реализовав коллокацию (10) в выбранных точках на границе, получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M \beta_i G(\bar{x}_j, \bar{z}_i) = \bar{u}(\bar{x}_j) - v_p^n(\bar{x}_j), & 1 \leq j \leq M_1; \\ \sum_{i=1}^M \beta_i \frac{\partial G(\bar{x}_j, \bar{z}_i)}{\partial n} = \bar{q}(\bar{x}_j) - q_p^n(\bar{x}_j), & M_1 + 1 \leq j \leq M_2; \\ \sum_{i=1}^M \beta_i (k \frac{\partial}{\partial n} + h) G(\bar{x}_j, \bar{z}_i) = -kq_p^n(\bar{x}_j) - hv_p^n(\bar{x}_j) + hu_\infty(\bar{x}_j), & M_2 + 1 \leq j \leq M, \end{cases} \quad (11)$$

где $\bar{x}_j = \{x_j\}_1^{M_1} \in \partial\Omega_1$, $\bar{x}_j = \{x_j\}_{M_1+1}^{M_2} \in \partial\Omega_2$, $\{x_j\}_{M_2+1}^M \in \partial\Omega_3$. Число обусловленности системы уравнений (11) ухудшается с увеличением радиуса расположения границы фиктивной области. Несмотря на проблемную обусловленность, решение устойчиво до момента достижения машинной точности.

Решение 3D нестационарной краевой задачи является функцией четырех независимых аргументов (t, x_1, x_2, x_3) . Это предусматривает разработку специальных подходов для его визуализации. В данном подходе предусмотрено два варианта визуализации решения. Первый вариант основан на динамической (зависимой от времени) визуализации по срезу области решения плоскостью, перпендикулярной оси x_1, x_2 или x_3 (одна из независимых пространственных переменных фиксируется). На рис. 5 представлен случай, когда выполняется построение проекции искомого четырехмерного решения при фиксированном значении переменных, $x_3 = \text{const}$, т.е. $u = u(t, x_1, x_2, x_3 = \text{const})$.

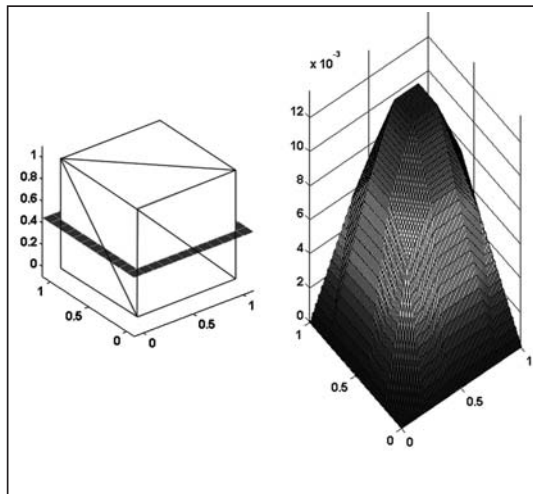


Рис. 5. Визуализация проекции искомого решения при фиксированном значении переменной z

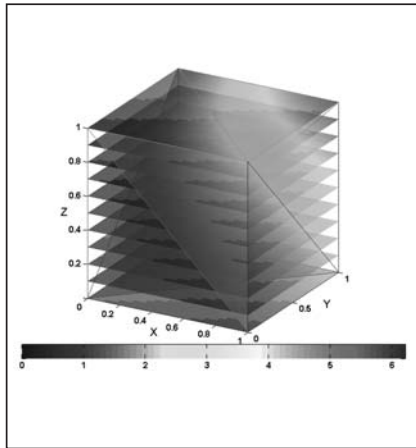


Рис. 6. Визуализация искомого решения на основе построения температурного поля по нескольким срезам

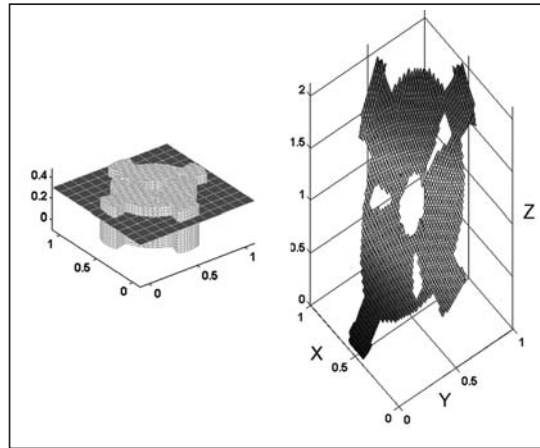


Рис. 7. Визуализация проекции решения тестовой краевой задачи (при фиксированном значении переменной x_3)

Вторая схема визуализации решения (рис. 6) реализует построение температурного поля в исследуемой области по совокупности нескольких срезов, что позволяет отображать динамику вариации поля в различные моменты времени.

На основе рассмотренного подхода решения краевых задач по бессеточной схеме разработана система компьютерного моделирования тепловых процессов, позволяющая исследовать краевые задачи в геометрически сложных 3D областях.

Для рассматриваемой многосвязной области математическое описание выполняется с использованием методов теории R -функций [14]. Такое описание необходимо для обеспечения работы модуля генерации точек дискретной геометрической модели. В многосвязной области отыскивалось решение нестационарной задачи теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = (6 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) t, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0;$$

$$u(t, x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) t, \quad x \in \partial\Omega, \quad \partial\Omega = \bigcup_{i=0}^N \Gamma_i, \quad t > 0.$$

Вывод результатов расчета осуществлялся в виде визуализации решения тестовой задачи в фиксированный момент времени при фиксированном значении переменной x_3 в виде, приведенном на рис. 7.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрена бессеточная схема решения 3D краевой задачи теплопроводности, на основании которой реализуется построение системы компьютерного моделирования физических процессов с использованием атомарных радиальных базисных функций. Применение при построении приближенных решений семейств атомарных радиальных базисных функций, порождаемых дифференциально-функциональными уравнениями с использованием оператора Гельмгольца [15], позволяет рассмотреть возможность учета неоднородности среды расчетной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. Element-free Galerkin methods // Intern. J. for Numerical Meth. in Engineering. — 1994. — **37**. — P. 229–256.
2. Meshless methods: an overview and recently developments / T. Belytschko, Y. Rongauz, D. Organ // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1996. — **139**. — P. 3–47.
3. On the completeness of the meshfree particle methods / T. Belytschko, Y.K. Rongauz, J. Doblau // Int. J. for Numerical Meth. in Engineering. — 1998. — **43**(5). — P. 785–819.
4. Колодяжний В.М., Лисина О.Ю. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов // Проблемы машиностроения. — 2010. — **13**, № 3. — С. 67–74.
5. Колодяжний В.М., Лисина О.Ю. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ // Там же. — 2010. — **13**, № 4. — С. 49–57.
6. Колодяжний В.М., Рвачев В.А. Атомарные функции трех переменных, инвариантные относительно группы вращения // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 6. — С. 118–130.
7. Колодяжний В.М., Рвачев В.О. Фінітні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними // Доп. НАН України. — 2004. — № 5. — С. 17–22.
8. Колодяжний В.М., Рвачев В.А. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 155–177.
9. Ingber M.S., Chen C.S., Tanski J.A. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations // Intern. J. for Numerical Meth. in Engineering. — 2004. — **60**, N 13. — P. 2183–2201.
10. Лисина О.Ю. Побудова 3D атомарних радіальних базисних функцій, що породжуються оператором Гельмгольца // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. — 2009. — № 11. — С. 123–129.
11. Ingber M. S. A triple reciprocity boundary element method for transient heat conduction analysis / C.A. Brebbia, A.J. Kassab (eds). Boundary Element Technology. — Amsterdam: Elsevier Applied Sci. — 1994. — vol. IX. — P. 41–49.
12. Bogomolny A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems // SIAM J. on Numerical Analysis. — 1985. — **22**. — P. 644–669.
13. Cheng R.S.C. Delta-trigonometric and spline methods using the single-layer potential representation / Ph.D. Dissertation, University of Maryland. — 1987. — 72 p.
14. Рвачев В.Л. Теория функций и некоторые ее приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 552 с.
15. Колодяжний В.М., Лисина О.Ю. Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій // Доп. НАН України. — 2011. — № 8. — С. 16–22.

Поступила 16.11.2012