

УДК 681.3.06:681.323 (519.6)

Я.Е. РОММ, Г.А. ДЖАНУНЦ

**КОМПЬЮТЕРНЫЙ МЕТОД ВАРЬИРУЕМОЙ
КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Ключевые слова: *кусочно-полиномиальная аппроксимация функций, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, минимизация погрешности, жесткие системы.*

ВВЕДЕНИЕ

Ставится задача компьютерного вычисления действительной функции одной действительной переменной с априори заданной границей погрешности при одновременной минимизации временной сложности. Решение строится на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации, на подынтервале выбирается интерполяционный полином Ньютона, который преобразуется в форму полинома с числовыми коэффициентами. В результате композиция стандартных функций вычисляется за время $O(1)$ с точностью до 10^{-18} . При данной компьютерной аппроксимации подынтегральных функций повышается точность вычисления интеграла. Метод переносится на решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

© Я.Е. Ромм, Г.А. Джанунц, 2013

Известные методы решения задачи Коши для ОДУ позволяют достичь высокой точности в случае нежестких задач, при этом, как правило, требуется высокий порядок гладкости правой части уравнений [1]. Однако непосредственное применение этих методов не сохраняет точности решения жестких задач. Ниже показана возможность снижения погрешности компьютерного решения задачи Коши для систем ОДУ на основе кусочной интерполяции разностных приближений при ограничениях сравнительно общего вида. Решение нежестких задач приближается с точностью 10^{-19} , жесткие задачи решаются с понижением погрешности по сравнению со специализированными методами.

КОМПЬЮТЕРНАЯ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Аппроксимация действительной функции $u = u(x)$ от одной действительной переменной на произвольном отрезке $[\alpha, \beta]$ выполняется следующим образом [2, 3]. Выбирается система подынтервалов равной длины, объединение которых покрывает отрезок $[\alpha, \beta]$:

$$[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{P-1} [x_i, x_{i+1}], \quad (1)$$

для определенности полагается $P = 2^k$, $k \in \{0, 1, \dots\}$. Пусть априори задана граница ε абсолютной погрешности аппроксимации данной функции. При каждом i из (1) на i -м подынтервале строится интерполяционный полином Ньютона $\Psi_{in}(t)$ с равноотстоящими узлами, где $t = (x - x_i) / h$, $h = (x_{i+1} - x_i) / n$ — расстояние между узлами. Степень полинома n выбирается одинаковой для всех подынтервалов и минимальной при условии

$$|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq \varepsilon, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, P-1}. \quad (2)$$

Интерполяционный полином Ньютона преобразуется к виду

$$\Psi_{in}(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + \dots + a_{in}t^n, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad t = (x - x_i) / h, \quad i = \overline{0, P-1}. \quad (3)$$

Для этого в его исходной записи

$$\Psi_{in}(t) = u(x_{i0}) + \sum_{j=1}^n \Delta^j u_{i0} / j! \prod_{k=0}^{j-1} (t - k), \quad t = (x - x_{i0}) / h, \quad (4)$$

где $x_{ij} = x_i + jh$, $j = \overline{0, n}$, — узлы интерполяции, $\Delta^j u_{i0}$ — конечная разность j -го порядка в точке x_{i0} , вычисляются конечные разности $\Delta u_{i0} = u(x_{i1}) - u(x_{i0})$, $\Delta^k u_{i0} = \Delta^{k-1} u_{i1} - \Delta^{k-1} u_{i0}$, $k = \overline{2, n}$, и обозначаются $b_{ij} = \Delta^j u_{i0}$, $j = \overline{1, n}$. В данных обозначениях

$$\Psi_{in}(t) = u(x_{i0}) + \sum_{j=1}^n b_{ij} / j! \prod_{k=0}^{j-1} (t - k). \quad (5)$$

Произведение $P_j(t) = \prod_{k=0}^{j-1} (t - k)$ является полиномом, заданным разложением на множители, где $k = \overline{0, j-1}$ — его нули, по которым можно восстановить коэффициенты:

$$P_j(t) = d_{j0} + d_{j1}t + d_{j2}t^2 + \dots + d_{jj}t^j. \quad (6)$$

В обозначении $z_\ell = \ell$, $\ell = \overline{0, j-1}$, применяется отличное от формул Виета выражение коэффициентов полинома через его нули [4]:

$$\begin{pmatrix} d_{jj} \\ d_{j(j-1)} \\ \dots \\ d_{j0} \end{pmatrix} = \prod_{\ell=1}^j \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -z_{j-\ell} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z_{j-\ell} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -z_{j-\ell} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -z_{j-\ell} \end{pmatrix}}_{j-\ell+1}. \quad (7)$$

Инвариантный относительно номера искомого коэффициента алгоритм получается последовательным умножением матриц (7) справа налево, доказательство и программная реализация даны в [4]. Полученные в (7) коэффициенты $d_{j\ell}$, $\ell = 0, j$, можно хранить в памяти компьютера для любой конечной степени j , что предполагается ниже. Предполагается также, что априори вычислены факториалы из (5) и значения $d_{j\ell} / j!$, $\ell = 0, j$, которые также хранятся в памяти. После данных преобразований полином (5) переводится в форму (3) по дистрибутивности с приведением подобных. В результате

$$\Psi_{in}(t) = a_{i0} + \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} t^\ell, \quad (8)$$

где

$$a_{i0} = u(x_{i0}), \quad a_{i\ell} = \sum_{j=\ell}^n b_{ij} d_{j\ell} / j!. \quad (9)$$

Для (8) проверка точности приближения (2) на каждом подынтервале проводится дискретно в проверочных точках x_ℓ , расстояние между которыми составляет величину h/γ , где γ — параметр, в программной реализации $\gamma \geq 3$. Минимальность степени n полинома (8) обеспечивается следующим образом. Построение и проверка точности начинается с $n=1$ и $k=0$ в (2), где $P=2^k$. При нарушении неравенства (2) хотя бы в одной проверочной точке значение k увеличивается на единицу. Этот процесс продолжается до нарушения априори заданной границы k , $k \leq k_0$. Если в результате заданная точность приближения не достигается, то снова полагается $k=0$, при этом степень полинома увеличивается на единицу и так до момента нарушения априори заданной границы значения n , $n \leq n_0$. В качестве минимального фиксируется наименьшее n , при котором неравенство (2) выполняется одновременно во всех проверочных точках всех 2^k подынтервалов, в соответствии с этим фиксируется текущее k .

При аппроксимации полиномом (8) функции $u(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$, выполняется дешифрация номера подынтервала $i = \text{int}((x - \alpha) / \rho)$, int — целая часть числа, $\rho = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, P-1$, $x \in [x_i, x_{i+1})$. Значение i служит адресом выборки соответственных подынтервалу коэффициентов (8).

Всюду ниже $n \leq n_0$, $n_0 = \text{const}$, степень n по изложенной схеме можно сделать «сколь угодно» малой; отсюда при условии запоминания коэффициентов (8) время вычисления функции путем данного приближения составляет $T = O(1)$. В частности, таким образом минимизируется время вычисления часто используемых или стандартных функций. Например, вычисление $y = \sqrt{\arctg(e^{\sin \sqrt[3]{(1/x)}})}$, $x \in [0.5, 1]$, выполняется за время двух умножений со сложением с точностью приближения до 10^{-18} [3].

При фиксированном n выполнение неравенства (2) обеспечивается за счет варьируемого увеличения количества подынтервалов $P = 2^k$ и соответственного сокращения их длины. Согласно эксперименту [3] в сравнительно общих условиях точность

приближения композиций стандартных функций имеет порядок 10^{-18} . Варианты программной реализации с выбором различных аппроксимирующих полиномов, включая полиномы Лагранжа, Чебышева и Тейлора, представлены в [2, 3, 5].

Следующие оценки показывают равномерную сходимость метода в зависимости от числа подынтервалов. Пусть на время рассуждения произвольно зафиксировано $n = \text{const}$, а функция $u = u(x)$ определена, непрерывна и имеет $n+1$ непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$ из (1). На границах отрезка все рассматриваемые производные считаются односторонними. Полагая $P = 1$, $i = 0$, $[x_0, x_1] = [\alpha, \beta]$, погрешность приближения рассматриваемой функции на $[\alpha, \beta]$ интерполяционным полиномом Ньютона $\Psi_{0n}(t)$ можно оценить из неравенства [6]

$$|u(x) - \Psi_{0n}(t)| \leq \max_{\xi \in [x_0, x_1]} |u^{(n+1)}(\xi)| h^{n+1} / (n+1)! \left| \prod_{\ell=0}^n (t - \ell) \right|, \quad x \in [x_0, x_1], \quad (10)$$

где $x_{0j} = x_0 + jh$, $j = \overline{0, n}$, поэтому $t = (x - x_{00}) / h$, $h = (x_{0n} - x_{00}) / n$. С учетом $P = 2^k$ это соответствует $k = 0$ в (1) и интерпретируется как нулевой этап разбиения $[\alpha, \beta]$. Оценку (10) можно преобразовать следующим образом. Пусть j — номер узла интерполяции такой, что $x \in [x_{0j}, x_{0j+1}]$. Поскольку $t - \ell = (x - x_{0\ell}) / h$, $\ell = 0, n$, то из (10) следует неравенство

$$|u(x) - \Psi_{0n}(t)| \leq c(n) h^{n+1} / (n+1)! \left| \prod_{\ell=0}^j ((x - x_{0\ell}) / h) \prod_{\ell=j+1}^n ((x - x_{0\ell}) / h) \right|,$$

где $c(n) = \max_{\xi \in [x_0, x_1]} |u^{(n+1)}(\xi)|$. При данном выборе j выполняется условие

$x_{0j} \leq x \leq x_{0j+1}$, поэтому

$$|u(x) - \Psi_{0n}(t)| \leq c(n) h^{n+1} / (n+1)! \prod_{\ell=0}^j (|x_{0j+1} - x_{0\ell}| / h) \prod_{\ell=j+1}^n (|x_{0j} - x_{0\ell}| / h).$$

С учетом того, что на k -м подынтервале $x_{0j+\ell} = x_{00} + (j+\ell)h$ и $x_{0j+\ell} = x_{0k} + (j+\ell-k)h$, $k = 0, j+\ell, \ell = 0, n-j$, последнее неравенство примет вид $|u(x) - \Psi_{0n}(t)| \leq c(n) h^{n+1} / (n+1)! (j+1)! (n-j)!$. Очевидно, $(j+1)! (n-j)! \leq (n+1)!$; следовательно,

$$|u(x) - \Psi_{0n}(t)| \leq c(n) h^{n+1}, \quad P = 1, \quad [\alpha, \beta] = [x_0, x_1] \quad (11)$$

при любом $j = \overline{0, n-1}$. Пусть теперь $P = 2$ и на каждом подынтервале $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ разбиения (1) выполняется интерполяция (8) с тем же $n = \text{const}$. Тогда на каждом из них в силу равенства числа узлов будет выполняться аналог неравенства (11) с вдвое меньшим h (узлы отстоят на $h/2$): $|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq c(n) (h/2)^{n+1}$, $i = 0, 1$, или

$$|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq c(n) 2^{-(n+1)} h^{n+1}, \quad P = 2, \quad [\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^1 [x_i, x_{i+1}], \quad (12)$$

где $c(n)$ — постоянная с таким же значением, как и в (11), $t = (x - x_i) (h/2)^{-1}$ при каждом $i = 0, 1$. При этом в (12) и непосредственно ниже шаг h относится к узлам интерполяционного полинома на начальном отрезке $[\alpha, \beta]$ и не меняется при его разбиении на $P = 2^k$ подынтервалов, $k = 1, 2, \dots$. В силу индукции [7] удвоение числа подынтервалов разбиения (1) уменьшает дробь в правой части рассматриваемых оценок в 2^{n+1} , и при $k = \log_2 P$ справедливо неравенство

$$|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq c(n) 2^{-k(n+1)} h^{n+1}, \quad P = 2^k, \quad [\alpha, \beta] = \bigcup_{i=0}^{2^k-1} [x_i, x_{i+1}]. \quad (13)$$

Из изложенного вытекает лемма.

Лемма 1. Пусть для произвольного $n = \text{const}$ функция $u = u(x)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[\alpha, \beta]$, на концах которого подразумеваются соответственные односторонние производные. Тогда каким бы ни было значение $n \geq 1$, последовательность полиномов $\Psi_{in}(t)$ из (8) равномерно сходится к функции $u(x)$ на данном отрезке при $k \rightarrow \infty$, где $k = \log_2 P$, P — число подынтервалов из (1). Скорость сходимости оценивается из (13), где $c(n) = \text{const}$, h — шаг интерполирования полинома $\Psi_{0n}(t)$ на $[\alpha, \beta]$ при $k = 0$.

С учетом $n \leq n_0$, $n_0 = \text{const}$, имеет место следствие.

Следствие 1. В условиях леммы 1, а также в предположении $h < 1$ для любого i из (1) выполняется неравенство

$$|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq c 2^{-2k} h^2, \quad (14)$$

где $c = \max_{n \leq n_0} (c(n))$, при этом $c = \text{const}$ не зависит от выбора степени n полинома.

Доказательство следует из (13) заменой $c(n)$ на $\max_{n \leq n_0} c(n)$ и n в $h^{n+1} \cdot 2^{-k(n+1)}$

на минимальное значение с учетом $h < 1$.

Замечание 1. В условиях следствия 1 произвольно заданная граница абсолютной погрешности приближения функции достигается путем сужения подынтервалов независимо от порядка гладкости и выбора степени полинома — $\forall \varepsilon > 0 \wedge \forall n: 1 \leq n \leq n_0$, для всех i из (1) согласно (14) выполняется неравенство $|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq \varepsilon$, как только $0.5 \log_2 (c\varepsilon^{-1}) \leq k$.

Равномерная сходимость полиномов $\Psi_{in}(t)$ в виде (8) на $[\alpha, \beta]$ независимо от порядка гладкости функции $u(x)$, начиная с двукратной непрерывной дифференцируемости, находится в соответствии с численными экспериментами [3].

ПАРАЛЛЕЛИЗМ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

При вычислении функций общего вида минимизация временной сложности может быть достигнута за счет преобразования набора алгоритмов к параллельной форме. Преобразование выполняется с использованием модели неветвящихся параллельных программ без учета обмена; временная сложность (время) $T(R)$ выполнения алгоритма измеряется числом последовательных шагов, где R — количество процессоров. Рассмотрим $u = u(x)$ на системе подынтервалов (1) в условиях (2). Полином вида (4) можно построить по максимально параллельной схеме с логарифмической оценкой временной сложности [3]. Именно коэффициенты полинома (6) можно считать априори вычисленными согласно (7) для произвольно фиксированного n , аналогично можно считать вычисленными $q_{j\ell} = d_{j\ell} / j!$ для всех j из (9) при всех соответственных $\ell = 1, n$. В выражении разности j -го порядка

$$\Delta^j u_{i0} = u(x_{ij}) - ju(x_{i(j-1)}) + j(j-1)/2u(x_{i(j-2)}) + \dots + (-1)^j u(x_{i0}) \quad (15)$$

биномиальные коэффициенты C_ℓ^j также можно считать известными и хранимыми в памяти для всех требуемых j и n . Отсюда вычисление (15) сводится к синхронному умножению C_ℓ^j на значения функции $u(x_{i\ell})$, $\ell = 0, j$, сложению произведений по схеме сдваивания одновременно для всех $\Delta^j u_{i0}$, $j = \overline{1, n}$, что требует $R \sim n^2 / 2$ процессоров. В результате время вычисления всех b_{ij} из (9)

составит $T_0(n^2/2) = t_y + \lceil \log_2(j+1) \rceil t_c$, где t_y, t_c — время бинарного умножения и сложения соответственно. Вычисление $a_{i\ell}$ сводится к синхронному умножению n пар b_{ij} на $q_{j\ell}$ и сложению по схеме сдваивания за время $\lceil \log_2(n-\ell) \rceil t_c$. Такие вычисления выполняются синхронно для всех ℓ из (8) с оценкой $T_1(R) = t_y + \lceil \log_2 n \rceil t_c$. В результате $T(R) \sim 2(t_y + \lceil \log_2 n \rceil t_c)$ или

$$T(n^2/2) \sim 2(t_y + \log_2 n t_c) = O(\log_2 n). \quad (16)$$

Данное построение воспроизводится параллельно по всем подынтервалам из (1), что приводит к пропорциональному росту числа процессоров [7]: $R = 2^{k-1} n^2$.

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНОЙ И ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Из полинома вида (8) вытекает табличный вид производной и первообразной. Их можно использовать для аппроксимации производной $u'(x) \approx h^{-1} \sum_{\ell=1}^n \ell a_{i\ell} t^{\ell-1}$, $t = (x - x_i) / h$, и определенного интеграла от функции по соотношению

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{P-1} \int_0^n \Psi_{in}(t) dt \quad [3]$$

или

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{P-1} \sum_{\ell=0}^n a_{i\ell} n^{\ell+1} / (\ell+1), \quad (17)$$

где $a_{i\ell}$ вычисляется согласно (9). На практике граница погрешности такого приближения производной имеет порядок 10^{-15} , а определенного интеграла — 10^{-19} [3, 5]. Для приближения интеграла (17) этот результат согласуется с (13). Действительно, пусть в условиях леммы 1 выбрано произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку

ку $\int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx = \sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx$, то

$$\left| \sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx - \sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Psi_{in}(t) dx \right| \leq \sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u(x) - \Psi_{in}(t)| dx.$$

Для любого $\varepsilon_1 > 0$, начиная с некоторого k_0 , при всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство $|u(x) - \Psi_{in}(t)| \leq \varepsilon_1$; следовательно, $\sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u(x) - \Psi_{in}(t)| dx \leq \sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon_1 dx$.

С учетом $\sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon_1 dx = (\beta - \alpha) \varepsilon_1$ при выборе $\varepsilon_1 = \varepsilon / (\beta - \alpha)$ получим неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx - \sum_{i=0}^{P-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Psi_{in}((x - x_i) / h) dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \quad P = 2^k.$$

Например [5], функция $u = (1 + e^{2x})^{-1}$ на отрезке $[0, 1]$ изложенным методом вычисляется с точностью до $2.71 \cdot 10^{-20}$, граница погрешности ее производной составляет $1.89 \cdot 10^{-15}$, определенный интеграл от нее на $[0, 1]$ вычисляется с точ-

ностью до $2.17 \cdot 10^{-19}$. По формуле Симпсона этот интеграл вычисляется с абсолютной погрешностью $1.74 \cdot 10^{-14}$. Сравнительная точность предложенной схемы реализуется в результате априорной минимизации погрешности подынтегральной функции посредством компьютерной вариации числа подынтервалов и степени полинома. Такая вариация непосредственно к методу Симпсона не относится, отличительным [2, 3] является также аналитическое выражение (17).

Ниже кусочно-полиномиальная схема видоизменяется для аппроксимации функций в правых частях ОДУ и для приближения решения с помощью первообразной от аппроксимирующего полинома. Аналогом (2) является условие минимальности отклонения полинома (8) от функции правой части. При фиксированном n уточнение решения будет достигаться увеличением числа подынтервалов (сужением их длины) на текущем интервале постоянной длины. За счет вариации n при варьируемом сужении подынтервалов достигается более высокая точность приближения решения в узлах интерполяции (и между ними) по сравнению с исходными значениями, которые априори задаются разностным методом.

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ

Первоначально отрезок $[a, b]$ приближенного решения задачи Коши для системы ОДУ делится на интервалы равной длины. Начальное значение решения на текущем интервале полагается равным значению на конце предшествующего интервала. Аналогично (1) текущий интервал разбивается на 2^k подынтервалов равной длины, выбираются $n+1$ равноотстоящих узлов, строится интерполяционный полином Ньютона для аппроксимации функции правой части. В качестве значений зависимой переменной при вычислении значений функции в узлах интерполяции используются разностные приближения решения. Выполняются преобразования (4)–(7), в результате которых интерполяционный полином на подынтервале принимает вид (8). На этом же подынтервале определяется первообразная

$$\int \psi_{jn}(t) dt = C + h \sum_{\ell=0}^n a_{j\ell} / (\ell+1) t^{\ell+1}, \quad (18)$$

для которой сохраняется переменным верхний предел и фиксируется нижний. За нижний предел принимается рассматриваемое приближение решения на правой границе предыдущего подынтервала (на начальном подынтервале используются начальные данные задачи Коши). Первообразная (18) с определенной таким образом константой принимается за приближение искомого решения на рассматриваемом подынтервале. Ниже эта схема излагается с модификацией, заключающейся в программной вариации степени полинома и числа подынтервалов, которая обеспечивает наименьшую погрешность приближенного решения.

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДУ С ВЫЧИСЛЕНИЕМ УЗЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПО МЕТОДУ ЭЙЛЕРА

Пусть в евклидовом пространстве R_2 на произвольно фиксированном отрезке $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ требуется приближенно решить задачу Коши для ОДУ первого порядка

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (19)$$

Строится расширение $[a, b]$ этого отрезка: $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} \leq b$, где разность $b - a$ кратна величине ∇ , равной длине текущего интервала. Для нежестких задач

целесообразно выбрать $\nabla \approx 1$ [3]. Предполагается, что на $[a, b]$ выполнены все условия существования и единственности, а также все условия сходимости рассматриваемого разностного метода (в данном случае метода Эйлера). Выполняется разбиение:

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^{R-1} [a_i, b_i], \quad b_i - a_i = \nabla, \quad i = \overline{0, R-1}. \quad (20)$$

Приближение решения на $[a, b]$ сводится к последовательному приближению на интервалах $[a_i, b_i]$, при каждом $i \geq 1$ полагается $y(a_i) = y(b_{i-1})$ и $y(a_0) = y_0$.

Для каждого i из (20) аналогично (1) задается система подынтервалов:

$$[a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{P-1} [x_j, x_{j+1}], \quad P = 2^k, \quad k = \{0, 1, \dots\}. \quad (21)$$

Аналогично (2)–(9) на каждом подынтервале из (21) строится кусочно-полиномиальное приближение функции правой части (19). Количество подынтервалов $P = 2^k$ и степень интерполяционного полинома n выбираются так, чтобы было минимальным значение

$$\delta_{ij}(x) = |\psi_{jn}(x) - f(x, z_j(x))|, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = \overline{0, P-1}, \quad (22)$$

где $\psi_{jn}(x) \approx f(x, y)$ из (19), $z_j(x) = y_j + \int_{x_j}^x \psi_{jn}(x) dx$ — полином с числовыми

коэффициентами вида (18), приближающий искомое решение $z_j(x) \approx y(x)$. При этом узлы интерполяции на каждом подынтервале априори вычисляются по методу Эйлера с излагаемыми ниже особенностями.

Практически метод реализуется со следующим уточнением. Фиксируется начальное n , и при $k = 0$ на подынтервале $[x_0, x_1]$ из (21) в равноотстоящих точках с шагом, меньшим шага интерполяции, вычисляется $\delta_{i0}(x)$ из (22). Максимальное из этих значений, обозначаемое $\tilde{\delta}_i^{(k,n)}$, сохраняется в памяти компьютера с соответственными индексами i, k, n . Затем k увеличивается на единицу и построение воспроизводится при том же значении n на каждом подынтервале. При этом в памяти вместе с индексами i, k, n сохраняется максимальное значение $\tilde{\delta}_i^{(k,n)} = \max_j (\delta_{ij}(x))$ по всем $j = \overline{0, P-1}$ среди соответствующих j -му подын-

тервалу значений $\delta_{ij}(x)$. Процесс продолжается до момента нарушения допустимых (априори заданных) границ k . При их нарушении выполняется переход к минимальному k , но уже при увеличении n на единицу, процесс продолжается до нарушения априори заданных границ n . Среди всех сохраняемых значений выбирается $\min_{i=\text{const}} \tilde{\delta}_i^{(k,n)}$, соответствующие k и n фиксируются для i -го интервала

из (20) как целевые. Именно при этих значениях решение задачи (19) приближается на отрезке $[a_i, b_i]$ по данной кусочно-полиномиальной схеме. Согласно эксперименту [8] для k и n целесообразны границы $k \leq 10, n \leq 15$, при этом достигается точность приближения решения 10^{-16} – 10^{-19} и выше (ниже даны примеры).

Коэффициенты кусочно-полиномиальной аппроксимации вычисляются следующим образом. При каждом j подынтервал $[x_j, x_{j+1}]$ из (21) разбивается на n равноотстоящих узлов с шагом h :

$$x_{jp} = x_j + ph, \quad p = \overline{0, n}, \quad h = (x_{j+1} - x_j) / n. \quad (23)$$

В каждом узле (23) вычисляются значения $f(x_{jp}, \bar{y}_{jp})$, где \bar{y}_{jp} определяется по методу Эйлера:

$$\bar{y}_{jp} = \bar{y}_{j(p-1)} + h \cdot f(x_{j(p-1)}, \bar{y}_{j(p-1)}), \quad p = \overline{1, n}, \quad (24)$$

при этом в качестве начального значения \bar{y}_{j0} берется значение на правой границе из окончательного приближения на предыдущем подынтервале: $\bar{y}_{j0} = \bar{y}_{(j-1)n}$, для начального подынтервала из (19) $\bar{y}_{00} = y_0$. Значения $f(x_{jp}, \bar{y}_{jp})$ принимаются в качестве значений в узлах интерполяции:

$$\varphi_{jp} = f(x_{jp}, \bar{y}_{jp}), \quad p = \overline{0, n}. \quad (25)$$

Аналогично всюду ниже \bar{y} будет обозначать вычисляемое приближение точного решения y . Согласно условиям интерполяции (25) строится интерполяционный полином Ньютона степени n , который по схеме (4)–(9) приводится к виду

$$\psi_{jn}(x) = a_{j0} + \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} ((x - x_{j0}) / h)^\ell, \quad (26)$$

где $a_{j0} = \varphi_{j0}$, $a_{j\ell} = \sum_{k=\ell}^n b_{jk} d_{k\ell} / k!$, $b_{jk} = \Delta^k \varphi_{j0}$.

Полином (26) приближает производную решения задачи (19). Приближение самого решения строится как первообразная от (26) с постоянной, принимающей значение \bar{y}_{j0} . Семейство первообразных от полинома $\psi_{jn}(x)$ на j -м подынтервале имеет вид (18). Фиксирование в правой части (18) значения нижнего предела

и замена константы C на \bar{y}_{j0} определяет функцию $z_j(x) = \bar{y}_{j0} + \int_{x_{j0}}^x \psi_{jn}(x) dx$ или

$$z_j(x) = \bar{y}_{j0} + h \sum_{\ell=0}^n a_{j\ell} / (\ell+1) ((x - x_{j0}) / h)^{\ell+1}. \quad (27)$$

Полином (27) принимается в качестве приближения решения $y(x)$ на j -м подынтервале:

$$y(x) \approx z_j(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \quad (28)$$

Вычисление значений полинома (27) проводится по схеме Горнера при $t = (x - x_{j0}) / h$:

$$z_j(t) = \bar{y}_{j0} + h (\dots ((a_{jn} / (n+1)t + a_{j(n-1)} / n)t + a_{j(n-2)} / (n-1)) + \dots + a_{j0})t. \quad (29)$$

Аналогичное приближение строится на следующем подынтервале и т. д. до исчерпания интервала $[a_i, b_i]$.

Замечание 2. В силу интерполяции приближение (27) является аналитическим внутри каждого подынтервала. Поскольку согласно построению $z_j(x_{j0}) = z_{j-1}(x_{(j-1)n})$, оно непрерывно на границах каждого подынтервала. Поэтому при каждом i в (20) данное приближение непрерывно на $[a_i, b_i]$. С учетом того, что $\bar{y}(a_i) = \bar{y}(b_{i-1})$, оно непрерывно на всем отрезке $[a, b]$. Приближение производной решения также непрерывно на всем $[a, b]$. Действительно, поскольку $x_{j0} = x_{(j-1)n}$, для решения выполнено равенство $\bar{y}_{j0} = \bar{y}_{(j-1)n}$; следовательно, $f(x_{j0}, \bar{y}_{j0}) = f(x_{(j-1)n}, \bar{y}_{(j-1)n})$. Из (25), (26) имеем $\psi_{jn}(x_{j0}) = \psi_{(j-1)n}(x_{(j-1)n})$; таким образом, рассматриваемое приближение непрерывно при каждом i из (20) на $[a_i, b_i]$. Равенство $\bar{y}(a_i) = \bar{y}(b_{i-1})$ обуславливает $f(a_i, \bar{y}(a_i)) = f(b_{i-1}, \bar{y}(b_{i-1}))$; следовательно, приближение правой части (19) непрерывно на всем отрезке $[a, b]$.

Значения $\bar{y}_{jp} = z_j(x_{jp})$, $p = \overline{1, n}$, из (27) в процессе компьютерной реализации оказываются более точными приближениями решения, чем получаемые не-

посредственно разностным методом. Эти значения целесообразно принять как новые уточненные значения в интерполяционных узлах для последующего интерполирования. Уточнение строится посредством следующего рекуррентного процесса. Как результаты первой итерации на j -м подынтервале принимаются $\bar{y}_{jp} = z_j(x_{jp})$ из (29): $\bar{y}_{jp}^{(1)} = \bar{y}_{jp}$, $p = \overline{1, n}$. В этом обозначении они используются в качестве подстановки второго аргумента функции $f(x_{jp}, \bar{y}_{jp}^{(1)})$, $p = \overline{1, n}$. Далее описанный процесс интерполирования повторяется один раз. В свою очередь, значения, полученные таким образом в результате второй итерации, обозначаются $\bar{y}_{jp}^{(2)}$, $p = \overline{1, n}$. Они повторно используются для новых уточнений на текущем подынтервале с узловыми значениями $f(x_{jp}, \bar{y}_{jp}^{(2)})$, $p = \overline{1, n}$, и описанный выше процесс повторяется. В результате ℓ повторений приближение производной $f(x_{jp}, \bar{y}_{jp}^{(\ell)})$, $p = \overline{1, n}$, оказывается существенно более точным, чем начальное, соответственно уточняется приближение решения. Для перехода от ℓ -й к $(\ell+1)$ -й итерации индексируются значения $\psi_{jn}^{(\ell)}(x_{jp}) = f(x_{jp}, \bar{y}_{jp}^{(\ell)})$ из (26) для всех $p = \overline{1, n}$ из (23) и значения $\bar{y}_{jp}^{(\ell+1)} = z_j^{(\ell)}(x_{jp})$, вычисляемые из вновь построенного полинома с коэффициентами вида (27), которые используются в качестве \bar{y}_{jp} для (25) при выполнении $(\ell+1)$ -й итерации. После завершения ℓ итераций на j -м подынтервале выполняется переход к $(j+1)$ -му подынтервалу, где в качестве начального значения приближения решения берется значение окончательного приближения на конце предыдущего подынтервала: $\bar{y}_{(j+1)0} = \bar{y}_{jn}^{(\ell)}$. На $(j+1)$ -м подынтервале снова выполняются ℓ итераций, процесс воспроизводится от $j=0$ до $j=P-1$ из (21). Число итераций ограничивается: $\ell \leq \tilde{L}$, $\tilde{L} = \text{const}$, на практике $\tilde{L} \leq 9$.

После окончательного выбора и фиксирования k и n , при том же значении \tilde{L} , выполняется аналогичное итерационное уточнение приближения правой части и решения с помощью рассматриваемых полиномов (26), (27) при выбранных значениях k и n .

Все описанные итерации выполняются на каждом интервале $[a_i, b_i]$.

При вычислении узловых значений по методу Эйлера в экспериментах [7, 8] с нежесткими задачами погрешность порядка 10^{-19} не превышает на всем отрезке (20).

Оценка скорости сходимости. Первоначально оценка выполняется без учета итерационного уточнения, при этом для некоторого $d = \text{const}$ в области $\tilde{R} = \{a \leq x \leq b, |y - y_0| \leq d\}$ предполагаются выполненными все условия существования и единственности решения задачи (19); в частности, функция $f(x, y)$ существует и непрерывна во всей \tilde{R} ; кроме того, выполнено условие Липшица

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L |y - \tilde{y}|, \quad L = \text{const} \quad \forall x, y, \tilde{y}: (x, y) \in \tilde{R} \wedge (x, \tilde{y}) \in \tilde{R}. \quad (30)$$

Первоначально предполагается, что $f(x, y(x))$ имеет $n+1$ непрерывную производную на всем отрезке $[a, b]$ из (20), на границах отрезка производные понимаются как соответственно односторонние. Пусть для произвольного i зафиксирован интервал $[a_i, b_i]$. На этом и на всех других интервалах из (20) зафиксирована степень n интерполирующих правую часть (19) полиномов $\psi_{jn}(x)$ из (26), $n = \text{const}$, $1 \leq n$; $j = 0, P-1$. Согласно (23)–(26) для вычисления значений в узлах интерполяции применяется метод Эйлера в предположении, что разностные значения, а также кусочно-полиномиальные приближения решения не выводят из области \tilde{R} , для них сохраняется условие (30), предполагается существование

и непрерывность $n+1$ производной функции $f(x, \bar{y}(x))$, где $\bar{y}(x)$ — рассматриваемое приближение решения $y(x)$.

Начальный этап разбиения выбранного интервала на подынтервалы считается нулевым, последующие этапы нумеруются соответственно показателю степени k из (21).

На нулевом этапе полагается $[x_0, x_1] = [a_i, b_i]$. Аналогично (10), (11) погрешность интерполирования правой части (19) на данном подынтервале полиномом $\psi_{0n}(x)$ с узловыми значениями $f(x_{0p}, \bar{y}_{0p})$ из (25) при $j=0$ можно оценить из неравенства

$$|f(x, \bar{y}) - \psi_{0n}(x)| \leq \tilde{c} h^{n+1}, \quad \tilde{c} = \tilde{c}(f, n, \tilde{R}), \quad P=1, \quad [a_i, b_i] = [x_0, x_1], \quad (31)$$

где $\tilde{c}(f, n, \tilde{R}) = \max_R |f^{(n+1)}(x, \bar{y}(x))|$, $\tilde{c} = \text{const}$, $\tilde{c} < \infty$ в силу замкнутости \tilde{R} .

Аналогично (12), (13) применительно к функции $f(x, \bar{y}(x))$ на k -м этапе, $1 \leq k$, интервал $[a_i, b_i]$ разбивается на $P = 2^k$ подынтервалов равной длины, на каждом из них интерполируется правая часть (19) полиномом Ньютона $\psi_{jn}(x)$, $j=0, P-1$. При этом входные значения в узлах интерполяции $f(x_{jp}, \bar{y}_{jp})$ на каждом подынтервале с номером $j = \overline{0, P-1}$ данного этапа разбиения вычисляются согласно (24), (25). Начальным значением \bar{y}_{j0} при данном и всех последующих k берется значение на правой границе из окончательного приближения на предыдущем подынтервале: $\bar{y}_{j0} = \bar{y}_{(j-1)n}$. При $j=0$ значение \bar{y}_{00} полагается равным значению приближения на правой границе предыдущего интервала с номером $i-1$, для начального интервала ($i=0$) — значение $\bar{y}_{00} = y_0$ из (19). Шаг метода Эйлера при вычислении узловых значений на каждом подынтервале полагается равным расстоянию между узлами интерполяции, которое составляет $h/2^k$. В результате по аналогии с (11)–(13) из (31) вытекает оценка

$$|f(x, \bar{y}) - \psi_{kj_n}(x)| \leq \tilde{c} 2^{-k(n+1)} h^{n+1}, \quad P = 2^k, \quad [a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{2^k-1} [x_j, x_{j+1}], \quad (32)$$

где $\psi_{kj_n}(x) = \psi_{jn}(x)$ — интерполяционный полином Ньютона степени n из (26) для j_k -го подынтервала; шаг h аналогично (12), (13) относится к интерполяционному полиному на начальном интервале $[a_i, b_i]$ и не изменяется при его разбиении на $P = 2^k$ частей.

Далее, пусть $\psi_{kj_n} = \psi_{kj_n}(x)$. Очевидно,

$$|\psi_{kj_n} - \psi_{(k-1)j_{k-1}n}| \leq |f(x, \bar{y}) - \psi_{kj_n}| + |f(x, \bar{y}) - \psi_{(k-1)j_{k-1}n}|, \quad (33)$$

где $x \in [x_{j_k}, x_{j_{k+1}}]$. На $(k-1)$ -м этапе при четном j_k имеем $x \in [x_{j_{k-1}}, (x_{j_{k-1}+1} - x_{j_{k-1}})/2]$, при нечетном j_k имеем $x \in [(x_{j_{k-1}+1} - x_{j_{k-1}})/2, x_{j_{k-1}+1}]$. Из (32), (33) следует $|\psi_{kj_n} - \psi_{(k-1)j_{k-1}n}| \leq \tilde{c} h^{n+1} (2^{-k(n+1)} + 2^{-(k-1)(n+1)})$ или

$$|\psi_{kj_n} - \psi_{(k-1)j_{k-1}n}| \leq \tilde{C} h^{n+1} 2^{-k(n+1)}, \quad \tilde{C} = \tilde{c}(1 + 2^{n+1}). \quad (34)$$

Неравенство $|\psi_{(k+m)j_{k+m}n} - \psi_{kj_n}| \leq \sigma_{j_{k+1}(k+1)} + \sigma_{j_{k+2}(k+2)} + \dots + \sigma_{j_{k+m}(k+m)}$, где $\sigma_{j_{k+\ell}(k+\ell)} = |\psi_{(k+\ell)j_{k+\ell}n} - \psi_{(k+\ell-1)j_{k+\ell-1}n}|$, $\ell = \overline{1, m}$, справедливо для произвольного $m \in \mathbb{Z}$. Отсюда и из (34) следует $|\psi_{(k+m)j_{k+m}n} - \psi_{kj_n}| \leq \tilde{C} h^{n+1} \sum_{r=1}^m 2^{-(k+r)(n+1)}$ или

$$|\psi_{(k+m)j_{k+m}n} - \psi_{kj_n}| \leq \tilde{C} h^{n+1} 2^{-(k+1)(n+1)} \sum_{r=0}^{m-1} 2^{-r(n+1)}. \quad (35)$$

При замене конечного ряда слагаемых в (35) на $\sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r(n+1)}$ получаем

$$|\psi_{(k+m)j_{k+m}n} - \psi_{kj_{kn}}| < \tilde{C}h^{n+1}2^{-(k+1)(n+1)}(1-q)^{-1}, \quad (36)$$

где $q = 2^{-(n+1)}$. Из (36) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|\psi_{(k+m)j_{k+m}n} - \psi_{kj_{kn}}| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a_i, b_i],$$

если $k \geq N$, где $N = \text{int}((n+1)\log_2(\tilde{C}h^{n+1}\varepsilon^{-1}(1-q)^{-1})) - 1$. Оценка (36) не зависит от выбора m , поэтому на основании леммы Больцано–Коши справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Последовательность $\psi_{kj_{kn}} = \psi_{kj_{kn}}(x)$ равномерно сходится к некоторой функции $\tilde{f}(x, \bar{y})$ на $[a_i, b_i]$:

$$\psi_{kj_{kn}} \rightrightarrows \tilde{f}(x, \bar{y}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Переход к пределу в неравенстве (36) при $m \rightarrow \infty$ обуславливает следствие.

Следствие 2. Скорость сходимости (37) оценивается из неравенства

$$|\tilde{f}(x, \bar{y}) - \psi_{kj_{kn}}| \leq \tilde{C}h^{n+1}2^{-(k+1)(n+1)}(1-q)^{-1}. \quad (38)$$

Функция $\tilde{f}(x, \bar{y})$ из (37), (38) совпадает с $f(x, y)$ из (19) вследствие того, что последовательность $\psi_{kj_{kn}}$ включает сходящуюся к $f(x, y)$ подпоследовательность. Последняя определяется последовательностью разностных приближений решения по методу Эйлера, при этом учитывается, что вариации начальных значений на подынтервале вносят в этот метод погрешность на шаге высшего порядка малости.

Действительно, для интерполяционного полинома $\psi_{kj_{kn}}$ при каждом k в качестве узловых значений принимаются разностные значения, вычисленные по методу Эйлера с шагом $h/2^k$. Для нулевого подынтервала на интервале с номером $i = 0$ начальное данное для метода Эйлера заимствуется из (19). На всех последующих подынтервалах начальное значение для этого метода выбирается из интерполяционного приближения на предшествующем подынтервале с порядком погрешности, меньшим порядка погрешности для метода на шаге Эйлера. На j_k -м подынтервале погрешность метода Эйлера на шаге можно оценить [9] из формулы Тейлора: $y_{p+1} = y_p + f(x_p, y_p)h2^{-k} + f'(\xi_p, y(\xi_p))(h2^{-k})^2$, $x_p < \xi_p < x_{p+1}$, откуда следует неравенство $|\bar{y}_{p+1} - y_{p+1}| \leq c_0(h2^{-k})^2$, где $c_0 = \max_{\bar{R}} |f'(x, y)|$,

\bar{y}_{p+1} — приближение по методу Эйлера. Погрешность интерполирования функции $f(x, \bar{y})$ оценивается из (32): $|f(x, \bar{y}) - \psi_{kj_{kn}}(x)| \leq \tilde{c}2^{-k(n+1)}h^{n+1}$. Пусть $\varepsilon_k(x) = f(x, \bar{y}) - \psi_{kj_{kn}}(x)$, тогда $\bar{y}_{p+1} = \bar{y}_p + (\varepsilon_k(x_p) + \psi_{kj_{kn}}(x_p))h2^{-k}$, погрешность метода Эйлера на одном шаге от собственно интерполирования на предыдущем подынтервале составит $\varepsilon_k(x_p)h2^{-k} = \tilde{c}h^{n+2}2^{-k(n+2)}$, а это при всех $n \geq 1$ на порядок ниже погрешности на шаге непосредственно метода Эйлера. Отсюда метод Эйлера с использованием кусочного интерполирования сходится к той же функции, что и этот же метод с шагом $h/2^k$. Более точно: $\bar{y}_{j_{kp}} \rightarrow y(x)$ на $[a_i, x]$ в силу $h2^{-k} \rightarrow 0$ при каждом $x \in [a_i, b_i]$, а подпоследовательность узловых значе-

ний $f(x_{j_k p}, \bar{y}_{j_k p})$, где p — номер узла интерполяции, сходится при тех же x к правой части (19) при $k \rightarrow \infty$. Отсюда $f(x, y) = \tilde{f}(x, \bar{y}) \forall x \in [a_i, b_i]$. Таким образом, имеет место следствие.

Следствие 3. В условиях леммы 2 $\psi_{k j_k n} \rightrightarrows f(x, y) \forall x \in [a_i, b_i]$ и на k -м этапе

$$|f(x, y) - \psi_{k j_k n}| \leq \tilde{C} h^{n+1} 2^{-(k+1)(n+1)} (1-q)^{-1}. \quad (39)$$

Остается оценить погрешность приближения непосредственно самого решения. На k -м этапе разбиения согласно (27), (28) для подынтервала с номером $j = j_k$ погрешность приближения решения определяется из равенства

$$|z_{j_k k}(x) - y(x)| = \left| \bar{y}_{j_k 0} + \int_{x_{j_k 0}}^x \psi_{k j_k n} dx - y(x_{j_k 0}) - \int_{x_{j_k 0}}^x f(x, y) dx \right|, \quad x \in [x_{j_k}, x_{j_k+1}].$$

Отсюда $|z_{j_k k}(x) - y(x)| \leq \max_{x_{j_k} \leq x \leq x_{j_k+1}} |x - x_{j_k 0}| |\psi_{k j_k n} - f(x, y)| + |\bar{y}_{j_k 0} - y(x_{j_k 0})|$.

С учетом (39) и того, что $|x - x_{j_k 0}| \leq \nabla 2^{-k}$, где ∇ следует из (20), последняя оценка обуславливает неравенство

$$|z_{j_k k}(x) - y(x)| \leq \nabla 2^{-k} \tilde{C} h^{n+1} 2^{-(k+1)(n+1)} (1-q)^{-1} + |\bar{y}_{j_k 0} - y(x_{j_k 0})|, \quad (40)$$

где \tilde{C} следует из (34). Значение $\bar{y}_{j_k 0}$ из (40) равно значению полиномиального приближения на конце подынтервала с номером $j_k - 1$, поэтому $\bar{y}_{j_k 0} = z_{(j_k-1)k}(x_{(j_k-1)n})$. Отсюда

$$\begin{aligned} \max_{x_{j_k} \leq x \leq x_{j_k+1}} |z_{j_k k}(x) - y(x)| &\leq \nabla 2^{-k} \tilde{C} h^{n+1} 2^{-(k+1)(n+1)} (1-q)^{-1} + \\ &+ \max_{x_{j_k} \leq x \leq x_{j_k+1}} |z_{(j_k-1)k}(x) - y(x)|. \end{aligned} \quad (41)$$

В обозначении $\varepsilon_{j_k} = \max_{x_{j_k} \leq x \leq x_{j_k+1}} |z_{j_k k}(x) - y(x)|$, $\tau_k = \nabla 2^{-k} \tilde{C} h^{n+1} 2^{-(k+1)(n+1)} \times (1-q)^{-1}$ неравенство (41) примет вид $\varepsilon_{j_k} \leq \tau_k + \varepsilon_{j_k-1}$. По рекуррентности $\varepsilon_{j_k} \leq \tau_k + \tau_k + \dots + \tau_k + \varepsilon_0$, где количество слагаемых τ_k равно числу подынтервалов на отрезке $[a_i, b_i]$, умноженному на число интервалов $i+1$, ε_0 — ошибка ввода начального данного, предполагаемая равной нулю. Таким образом, $\varepsilon_{j_k} \leq 2^k (i+1) \tau_k$. Поскольку $i+1 = (b_i - a) / (b_i - a_i)$ и $b_i \leq b$, то $\varepsilon_{j_k} \leq 2^k (b-a) \nabla \tau_k \forall x \in [a, b_i]$. В силу произвольного выбора i оценка справедлива $\forall x \in [a, b]$. Таким образом,

$$|z_{j_k k}(x) - y(x)| \leq \tilde{C} (b-a) h^{n+1} 2^{-(k+1)(n+1)} (1-q)^{-1} \quad \forall x \in [a, b]. \quad (42)$$

Правая часть (42) не зависит от x ; следовательно, выполняется равномерная сходимость $z_{j_k k}(x) \rightrightarrows y(x) \forall x \in [a, b]$ при $k \rightarrow \infty$. Остается учесть, что $z_{j_k k}(x) = z_j(x)$ из (27) при $j = j_k$ на k -м этапе разбиения.

Из изложенного вытекает теорема.

Теорема 1. При любом выборе n , $1 \leq n \leq n_0$, $n_0 = \text{const}$, последовательность полиномов $z_{j_k k}(x)$, где k определяется из (21), равномерно на $[a, b]$ сходится к решению $y(x)$ задачи (19) при $k \rightarrow \infty$. Скорость сходимости оценивается из (42), где $\tilde{C} = \text{const}$, h — шаг интерполирования полинома $z_{j_0 0}(x)$ на $[a_i, b_i]$ из (21), выбранный в соответствии $k = 0$, его значение не изменяется с ростом k .

Следствие 4. В условиях теоремы 1 для $n=1$ выполняется равномерная сходимость $z_{j,k}(x) \rightrightarrows y(x) \forall x \in [a, b]$, если $k \rightarrow \infty$, при этом

$$|z_{j,k}(x) - y(x)| \leq \tilde{c}_0 (b-a) h^2 2^{-2(k+1)}, \quad \tilde{c}_0 = \text{const}, \quad (43)$$

где $\tilde{c}_0 = \tilde{C} / (1-q)$, \tilde{C} определяется из (34), q — из (36) при $n=1$.

Следствие 5. В рассматриваемых условиях теоремы 1 и при $h < 1$ на k -м этапе разбиения одновременно всех интервалов (20) для $\forall x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|z_{j,k}(x) - y(x)| \leq \tilde{C}_0 (b-a) 2^{-2(k+1)}, \quad \tilde{C}_0 = \text{const}, \quad (44)$$

константа \tilde{C}_0 не зависит от n .

Доказательство следует из справедливости (42) для любого $n, 1 \leq n \leq n_0$, при $q = 2^{-(n+1)}$, $\tilde{C} = \tilde{c}(f, n, \tilde{R})(1+2^{n+1})$. Замена $\tilde{c}(f, n, \tilde{R})$ на $\max_{1 \leq n \leq n_0} \tilde{c}(f, n, \tilde{R})$,

множителя $1+2^{n+1}$ на $1+2^{n_0+1}$, дроби $q = 2^{-(n+1)}$ на $q = 1/4$, значения h на единицу приводит к (44).

Замечание 3. Из следствий 4, 5 вытекает независимость оценок (43), (44) от порядка гладкости $n+1$ правой части (19). Начиная с двукратной непрерывной дифференцируемости функции $f(x, y)$, порядок гладкости не является критичным для сходимости кусочно-полиномиального приближения. Малость правых частей (43), (44) достигается сужением длины подынтервалов в геометрической прогрессии. Кроме того, рост порядка гладкости снижает величины констант в мажорирующих оценках (39), (42). Эти утверждения согласуются с численным экспериментом [7, 8], часть результатов которого приводится ниже.

Замечание 4. Оценка (44) является мажорантной для n и относится, в частности, к выбору варьируемых n для минимизации погрешности (22) в границах $1 \leq n \leq n_0$.

Для применения метода Эйлера в рассматриваемом кусочно-полиномиальном приближении достаточно однократной дифференцируемости правой части (19) и выполнения условия Липшица (30). Отсюда с учетом замечаний 3, 4 метод в целом применим при невысоком порядке гладкости задачи (19), тогда как методы высоких порядков для своей сходимости требуют существования высших производных [1].

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОДУ С ВЫЧИСЛЕНИЕМ УЗЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В качестве исходного разностного метода можно использовать метод высокого порядка, если это допускает ограничение на правую часть (19). В настоящей статье в процессе описываемого исследования рассматривались следующие методы. Метод Эйлера–Коши на подынтервале $[x_j, x_{j+1}]$ применялся в виде [9] $\tilde{y}_{jp} = y_{j(p-1)} + h \cdot f(x_{j(p-1)}, y_{j(p-1)})$, $y_{jp} = y_{j(p-1)} + h 2^{-1} \cdot (f(x_{j(p-1)}, y_{j(p-1)}) + f(x_{jp}, \tilde{y}_{jp}))$, $p = \overline{1, n}$, где x_{jp}, h определяются из (23), y_{jp} принимаются в качестве интерполируемых значений аналогично значениям (24) для полинома (26). По аналогичной схеме применялись разностные методы Рунге–Кутты 4-го порядка [10], метод Бутчера 6-го порядка [11], метод Дормана–Принса 8-го порядка аппроксимации [11]. Коэффициенты перечисленных методов приведены в [8]. В данной статье они опускаются ввиду громоздкости выражений.

При решении задачи Коши для системы ОДУ

$$Y'(x) = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0, \quad (45)$$

где $F(x, Y) = (f_1(x, Y), f_2(x, Y), \dots, f_N(x, Y))$, $Y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x))$, $Y_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0N})$, в предположении существования и единственности ре-

шения схема приближенного решения на отрезке $[a, b]$ строится аналогично кусочно-полиномиальному приближению решения задачи (21) с таким изменением, когда все преобразования проводятся независимо для каждой компоненты вектор-функции правой части (45), включая программный подбор k и n с целью минимизации погрешности.

Скорость сходимости кусочно-полиномиального приближения решения системы (45) оценивается аналогично случаю одного уравнения с переходом к канонической норме вектора погрешности.

Замечание 5. Объем вычислений на каждом интервале $[a_i, b_i]$ из (20) конечен, одинаков для всех i и зависит от порядка разностного метода (в качестве которого можно выбрать наименьший (табл. 1)), а также линейно зависит от числа уравнений в (45), но не зависит от длины отрезка $[a, b]$.

Код программы для решения задачи (45) и численный эксперимент без преобразований правой части, исследуемых в [12], приводятся в [8], результаты эксперимента с учетом скорости сходимости представлены в [7], наиболее характерные из них даны ниже.

Реализация кусочно-полиномиального метода выполнена в консольном приложении Delphi на ПК Intel Core. При вычислении значений полинома по схеме (29) для снижения погрешности в узловых точках (23) использовалась замена p — номера узла интерполяции: $p = t$, где $t = (x_{ip} - x_{i0}) / h$; так, например, задача Коши

$$y_1' = x + 2x^{-1}y_1 - \sqrt{y_2}, \quad y_2' = 2\sqrt{y_2}, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 4 \quad (46)$$

имеет решение [13] $y_1 = x + x^2, y_2 = (x+1)^2$, погрешность его приближения разностными и предложенным методом на отрезке $x \in [1, 10]$ приводится в табл. 1. Здесь h — шаг наилучшего компьютерного приближения разностным методом. В первой строке — погрешность этого метода: 10^{-8} соответствует методу 1-го порядка, она убывает с повышением порядка, достигая 10^{-15} для метода 8-го порядка. Погрешность варьируемого кусочно-полиномиального метода — во второй строке, значения в узлах интерполяции вычислены (соответственно столбцам) по методам Эйлера, Эйлера–Коши, Рунге–Кутты 4-го порядка, Бутчера 6-го порядка и Дормана–Принса 8-го порядка. Во всех случаях она не превосходит 10^{-18} ; x — значение, где достигнут максимум погрешности. Время решения задачи (46) предложенным методом не превосходит 1.5 с. Аналогичные соотношения границ погрешности сохраняются при решении различных систем ОДУ [7, 8]. Периодическая реакция Белоусова–Жаботинского моделируется жесткой системой [14]:

$$y_1' = 77.27(y_2 + y_1(1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)), \quad y_2' = 77.27^{-1}(y_3 - y_2(1 + y_1)), \\ y_3' = 0.161(y_1 - y_3).$$

Таблица 1

x	Абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши для системы (46) различными методами				
	Euler	Euler–Cauchy	Runge–Kutta_4	Butcher_6	Dormand–Prince_8
	$h = 1.03 \cdot 10^{-9}$	$h = 1.03 \cdot 10^{-9}$	$h = 1.03 \cdot 10^{-4}$	$h = 1.03 \cdot 10^{-3}$	$h = 1.03 \cdot 10^{-2}$
9.24	$4.5 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$	$9.2 \cdot 10^{-16}$
3.06	$8.7 \cdot 10^{-19}$	$8.7 \cdot 10^{-19}$	$8.7 \cdot 10^{-19}$	$4.3 \cdot 10^{-19}$	$4.3 \cdot 10^{-19}$

Экстраполяционная программа для решения жестких задач на основе линейно неявного метода Эйлера (Stiff EULER EXtrapolation) дает приближенное решение задачи Коши для данной системы при $y_1(0) = 1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 3$ на отрезке $[0, 500]$ с погрешностью 10^{-9} [12]. Предложенный кусочно-полиномиальный метод при $n = 3, k = 9, \nabla = 0.0095$ в формате Extended с тремя варьируемыми итерациями решает задачу с точностью до 10^{-13} за 53 с. Согласно замечанию 2 приближение (27) непрерывно и непрерывно дифференцируемо на всем отрезке $[a, b]$. Отсюда достигается возможность моделирования реакции [11] во всех точках в промежутке между разностными значениями. Как следствие, уточняется характер высокоамплитудных колебаний переменных и фазовые портреты. В [15] дано сопоставление всех графических отображений реакции Белоусова–Жаботинского с аналогами из [11] и приведены коды моделирующих программ. К числу жестких можно отнести задачу [16]: $y' = -2xe^{-y}, y(-0.9) = \ln(0.19), x \in [-0.9, 0.9]$. Ее решение $y(x) = \ln(1-x^2)$ с помощью функции stiff (MathCad, метод Розенброка) приближается с точностью до 10^{-13} , погрешность не снижается при использовании модифицированного метода Эйлера с итерационным уточнением и переменным шагом [15, 16]. С помощью кусочно-полиномиального метода с девятью варьируемыми итерациями, $n = 10, h = 10^{-3}$ задача решается с точностью до $5.4 \cdot 10^{-19}$ за время менее 1 мс.

ОЦЕНКА ТРУДОЕМКОСТИ

В [11, 12] трудоемкость оценивается числом обращений к подпрограмме вычисления функции правой части (45). В настоящей статье трудоемкость T_{ri} (i — индекс интервала, r — вспомогательный индекс группы операций) оценивается числом последовательных арифметических операций на отрезке решения с учетом обращений к подпрограмме. При оценке сверху рассматривается кусочно-полиномиальное приближение на основе метода Эйлера, причем первоначально — для решения задачи (19). Для простоты k и n предполагаются априори зафиксированными. На интервале $[a_i, b_i]$ из (20) метод Эйлера вызывает правую часть (19) $2^k n$ раз для задания $n+1$ узлов значения интерполяционного полинома n -й степени на каждом из 2^k подынтервалов: $y_{j(p+1)} = y_{jp} + h \cdot f(x_{jp}, y_{jp}), p = \overline{0, n-1}$. Отсюда $T_{1i} = 2^k n(t_f + t_y + t_c)$, где t_f — время вычисления правой части (19), t_y, t_c — время бинарного умножения и сложения. Кроме того, на каждом подынтервале из (21) выполняется построение полинома Ньютона n -й степени, откуда с учетом соотношений (26) по всем выполняемым подынтервалам следует равенство $T_{2i} = 2^k (0.5(n^2 + n)t_y + n^2 t_c)$. Время вычисления полинома согласно (29) соответствует $T_{3i} = 2^k (n+1)(t_y + t_d + t_c)$, где t_d — время бинарного деления. Сложение оценок приводит к неравенству $\sum_r T_{ri} \leq 2^k Q_i$,

где $Q_i = nt_f + 0.5(n^2 + 5n + 2)t_y + (n^2 + 2n + 1)t_c + (n+1)t_d$. Остается учесть итерационное уточнение. Уточнение выполняется на каждом подынтервале путем вычисления на текущей итерации интерполяционного полинома; после задания значений в узлах интерполяции исключаются разностные шаги. Это приводит к следующей оценке: $T_{4i} \leq 2^k \tilde{L}(Q_i - n(t_y + t_c))$. Сложение с предыдущим неравенством обуславливает оценку трудоемкости T_{Si} на интервале $[a_i, b_i]$:

$$T_{Si} \leq 2^k (\tilde{L} + 1)Q_i, Q_i \sim n^2(t_c + t_y / 2) + n(t_f + t_d).$$

После перехода от i -го к $(i+1)$ -му интервалу все операции повторяются, верхняя граница их числа на интервале не увеличивается с ростом i . В условиях следствия 5 граница ε погрешности приближения на i -м интервале достигается за счет

роста числа этапов k его разбиения на $R = 2^k$ подынтервалов при ограничении $1 \leq n \leq n_0$ (рис. 1). Здесь $k_i = k_i(\varepsilon)$ — число этапов на i -м интервале, R определяется из (20). Граница трудоемкости на отрезке $[a, b]$ периодически возрастает в геометрической прогрессии на каждом отрезке $[a_i, b_i]$. При традиционном [11] измерении посредством $\log_{10} T_{Si}$ графики границы трудоемкости преобразуются к виду линейных зависимостей.

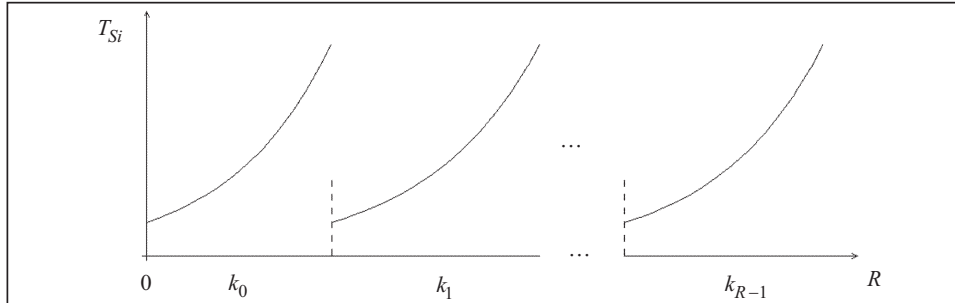


Рис. 1. Периодичность роста границы трудоемкости кусочно-полиномиального приближения

В системе (45) изложенные операции повторяются для каждого уравнения в отдельности, увеличение размерности изменяет значения на графике пропорционально числу уравнений, сохранив в целом периодический вид и характер зависимости.

При фиксировании параметров время компьютерной реализации кусочно-полиномиального приближения существенно снижается [8, 15]. Изложенный метод обладает резервом быстродействия на основе параллелизма построения полинома Ньютона на каждом подынтервале с оценкой (16). На основе [17] метод переносится на случай уравнений в частных производных [15].

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Для линейризации систему (45) требуется преобразовать к виду $\tilde{Y}' = A \cdot \tilde{Y} + b$, где матрица A и вектор b линейно зависят от x , при этом $\tilde{Y} \approx Y$, где Y — решение (45). Пусть произвольно зафиксирован интервал $[a_i, b_i]$ из (20). Искомая линейризация выполнима на подынтервалах с наперед заданной границей погрешности: $\tilde{Y}' = A_j \cdot \tilde{Y}, b_j = 0, j = \overline{0, P-1}$, где P определяется из (21). Элементы A_j являются приближениями компонент производных, которые разделяются на компоненты решения (45). Именно $\frac{dy_\ell}{dx} \approx \frac{\psi_{\ell j n}(x)}{y_\ell} y_\ell, \ell = \overline{1, N}$, $x \in [x_j, x_{j+1}], j = \overline{0, P-1}$; $\psi_{\ell j n}(x)$ определяется из (26). Согласно (28) $y_\ell \approx z_{\ell j}(x), \ell = \overline{1, N}$, и $y'_\ell(x) \approx \psi_{\ell j n}(x) z_{\ell j}^{-1}(x) y_\ell, \ell = \overline{1, N}, x \in [x_j, x_{j+1}], j = \overline{0, P-1}$. Отсюда $\tilde{Y}(x) \approx Y(x)$, при этом

$$\tilde{Y}' = \begin{pmatrix} \psi_{1jn}(x)z_{1j}^{-1}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_{2jn}(x)z_{2j}^{-1}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \psi_{Njn}(x)z_{Nj}^{-1}(x) \end{pmatrix} \cdot \tilde{Y},$$

$x \in [x_j, x_{j+1}], j = \overline{0, P-1}$.

Данная линейризация позволяет применить методы анализа устойчивости линейных систем, в том числе компьютерные, которые реализуются в процессе решения системы [18]. Высокая точность решения при применении предложенного метода повышает надежность компьютерного анализа устойчивости [18] непосредственно решений нелинейных ОДУ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложен компьютерный метод варьируемого кусочно-полиномиального приближения функций одной действительной переменной и приближенного решения задачи Коши для системы ОДУ. Метод отличается непрерывностью и непрерывной дифференцируемостью приближения, обладает малой границей погрешности, равномерно сходится со скоростью геометрической прогрессии при дважды непрерывной дифференцируемости функции и соответственно правой части системы. Как показывает эксперимент, сравнительно низкая погрешность решения жестких задач достигается при допустимой границе трудоемкости, при этом метод инвариантен по форме относительно жестких и нежестких задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1962. — Т. 2. — 640 с.
2. Ромм Я.Е. Бесконфликтные и устойчивые методы детерминированной параллельной обработки: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — Таганрог, 1998. — 42 с.
3. Аксайская Л.Н. Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Таганрог, 2008. — 18 с.
4. Ромм Я.Е. Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 2. — С. 161–174.
5. Ромм Я.Е., Голиков А.Н., Распараллеливаемые кусочно-полиномиальные схемы аппроксимации функций, производных и вычисления определенных интегралов с повышенной точностью. — Таганрог, 2010. — 139 с. Деп. в ВИНТИ 27.04.2010, № 230-B2010.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. — М.: Наука, 1966. — Т. 1. — 632 с.
7. Ромм Я.Е., Джанунц Г.А. Кусочно-полиномиальный метод численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. — Таганрог, 2011. — 59 с. — Деп. в ВИНТИ 20.07.2011, № 353-B2011.
8. Ромм Я.Е., Джанунц Г.А. Повышение точности разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений на основе кусочно-полиномиальной интерполяции. — Таганрог, 2010. — 103 с. Деп. в ВИНТИ 25.01.2010, № 20-B2010.
9. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 636 с.
11. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1989. — 512 с.
12. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
13. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1955. — 655 с.
14. Field R.J., Noyes R.M. Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction // J. Chem. Phys. — 1974. — 60, N 5. — P. 1877–1884.
15. Джанунц Г.А. Компьютерный метод кусочно-полиномиального приближения решений обыкновенных дифференциальных уравнений в применении к моделированию автоколебательных реакций: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Таганрог, 2012. — 22 с.
16. Трубников С.В. Модифицированный метод Эйлера с итерационным уточнением и переменным шагом // Вестник Брянск. гос. ун-та. — 2008. — № 4. — С. 70–85.
17. Голиков А.Н. Кусочно-полиномиальные схемы вычисления функций двух переменных, частных производных и двойных интегралов на основе интерполяционного полинома Ньютона. — Таганрог, 2010. — 150 с. Деп. ВИНТИ 20.09.2010, № 528-B2010.
18. Ромм Я.Е. Моделирование устойчивости по Ляпунову на основе преобразований разностных схем решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Математическое моделирование. — 2008. — 20, № 12. — С. 105–118.

Поступила 15.02.2012