УДК 519.217; 519.718; 519.837

**В.К. ЯСИНСКИЙ, И.В. МАЛЫК**

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

**Ключевые слова:** *стохастическая динамическая система, система с последействием, пуассоновское возмущение.*

В работе [1] доказана непрерывность по малому параметру $\varepsilon > 0$ сильного решения стохастического дифференциально-функционального уравнения с пуассоновскими возмущениями (СДФУПВ). Это дает возможность заменить решения СДФУПВ некоторым марковским процессом [2–4]. Как следствие непрерывной зависимости решения СДФУПВ от параметра $\varepsilon > 0$, в настоящей статье установлено утверждение о близости этих процессов на асимптотически большом интервале времени $[0, T/\varepsilon]$, которое будет базироваться на методе усреднения [5, 6]. Кроме того, изложен метод приведения квазилинейного СДФУПВ второго порядка к стандартной форме и доказана теорема об усреднении для этой системы. Описан метод расщепления, в котором производящий оператор детерминированной части стохастического уравнения на выбранное пространство $C([-\tau, 0])$ непрерывных функций представляется в виде контурного интеграла комплексной плоскости [7, 8].

На вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ [9] задан случайный процесс $R_+ \times \Omega \to R^1$, как сильное решение [10–12] квазилинейного СДФУПВ

$$dx(t) = m(x_t)dt + \sigma(t)dw(t) + \int_U \lambda(t, u)\tilde{\nu}(dt, du) + f(t)dt \tag{1}$$

с начальным условием

$$x_0 = \varphi(\theta)\,; \ -\tau \le \theta \le 0\,. \tag{2}$$

Здесь $x_t := \{x(t+\theta), -\tau \le \theta \le 0\}$; $m: S([-\tau, 0]) \to R^1$; $S$ — пространство Скорохода [13, 14]; случайные процессы $f: R_+ \times \Omega \to R^1$; $\sigma: R_+ \times \Omega \to R^1$ и случайная функция $\lambda: R_+ \times \Omega \times U \to R^1$ такие, что $\forall t', t'' \in [0, T]$, $T > 0$,

$$\int_{t'}^{t''} \mathbb{E}|f(t)|^2\, dt + \int_{t'}^{t''} \mathbb{E}|\sigma(t)|^2\, dt < K < \infty\,, \tag{3}$$

$$\int_{t'}^{t''}\int_U \mathbb{E}|\lambda(t, u)|^2\, \Pi(du)dt + \int_U \Pi(du) < K < \infty\,. \tag{4}$$

Кроме того, $w(t)$ — скалярный винеровский процесс; $\tilde{\nu}(t, A) := \nu(t, A) - \mathbb{E}\nu(t, A)$ — центрированная пуассоновская мера [9, 10]; $\mathbb{E}\nu(t, A) = t\,\Pi(A)$; $w(t)$ и $\tilde{\nu}(t, A)$ — независимые случайные процессы.

Обозначим $H(t)$ решение детерминированного уравнения [7, 15]

$$dH(t) = m(H_t)dt \tag{5}$$

по начальному условию

$$H(t) = \begin{cases} 1, t = 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

Это решение, следуя [7], будем называть фундаментальным решением (5).

Для упрощения изложения доказательства будем считать, что начальная функция (2) непрерывна и детерминирована. Для первого утверждения необходимо начальное условие

$$x_0 = 0. \tag{6}$$

**Лемма 1.** Пусть:

1) случайные процессы $\sigma(t), f(t)$ и $\lambda(t, u)$ с вероятностью единица непрерывны по $t \in [0, T]$;

2) выполняются условия (3), (4).

Тогда решение СДФУПВ (1), (6) имеет вид

$$x(t) = \int_0^t H(t-s) f(s) ds + \int_0^t H(t-s)\sigma(s) dw(s) + \int_0^t \int_U H(t-\tau)\lambda(s, u)\widetilde{\nu}(ds, du). \tag{7}$$

Доказательство нетрудно провести, подставляя случайный процесс (7) в СДФУПВ (1), используя при этом обобщенную формулу Ито [12].

**Замечание 1.** Если вместо нулевых начальных условий (6) задать ненулевые условия (2), то для решения СДФУПВ (1) используется формула Коши

$$x(t) = y(t) + \int_0^t H(t-s)\sigma(s) dw(s) + \int_0^t \int_U H(t-s)\lambda(s, u)\widetilde{\nu}(ds, du) + \int_0^t H(t-s) f(s) ds, \tag{8}$$

где $y(t)$ удовлетворяют уравнению (5) и начальным условиям (2).

На вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ рассмотрим случайный процесс $x: R_+ \times \Omega \to R^1$, который задан СДФУПВ второго порядка

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \sum_{k=0}^{N} \left[ a_k \frac{dx(t-\tau_k)}{dt} + b_k x(t-\tau_k) \right] =$$

$$= \varepsilon m^{\varepsilon}(t, x_t, \dot{x}_t) + \sigma^{\varepsilon}(t, x_t, \dot{x}_t) \frac{dw(\varepsilon t)}{dt} + \int_U \lambda^{\varepsilon}(t, x_t, \dot{x}_t, u) \frac{\widetilde{\nu}(\varepsilon dt, du)}{dt} \tag{9}$$

с начальными условиями

$$x_0 = \varphi_1, \ \dot{x}_0 = \varphi_2, \tag{10}$$

здесь $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = \tau < \infty$; функционалы $m^{\varepsilon}, \sigma^{\varepsilon} : R_+ \times S([-\tau, 0]) \times$ $\times S([-\tau, 0]) \to R^1$, $\lambda^{\varepsilon}: R_+ \times S([-\tau, 0]) \times S([-\tau, 0]) \times U \to R^1$ ограниченные:

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)} | m^{\varepsilon}(t, \psi_1, \psi_2) | + | \sigma^{\varepsilon}(t, \psi_1, \psi_2) | + \int_U | \lambda^{\varepsilon}(t, \psi_1, \psi_2, u) | \Pi(du) \le K,$$

если $\| \psi_i \| \le K_1$, где $\| \cdot \|$ — норма в пространстве Скорохода, $\varepsilon_0$ — некоторая константа.

Пусть существует ограниченная мера $\mu$ такая, что $\forall t \ge 0$, $\forall \varphi_i, \psi_i \in S([-\tau, 0])$, $i = 1, 2$, при ограниченной норме выполняются условия равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

1°) $$| m^{\varepsilon}(t, \varphi_1, \psi_1) - m^{\varepsilon}(t, \varphi_2, \psi_2) | + | \sigma^{\varepsilon}(t, \varphi_1, \psi_1) - \sigma^{\varepsilon}(t, \varphi_2, \psi_2) | +$$

$$+ \int_U | \lambda^{\varepsilon}(t, \varphi_1, \psi_1, u) - \lambda^{\varepsilon}(t, \varphi_2, \psi_2, u) | \Pi(du) \le \int_{-\tau}^{0} [| \varphi_1(\theta) - \psi_1(\theta) | +$$

$$+ | \varphi_2(\theta) - \psi_2(\theta) | ] d\mu(\theta);$$

$$2^\circ)\ |m^\varepsilon(t,\varphi_1,\psi_1)|^2+|\sigma^\varepsilon(t,\varphi_1,\psi_1)|^2+\int_U|\lambda^\varepsilon(t,\varphi_1,\psi_1,u)|^2\Pi(du)\le$$

$$\le\int_{-t}^{0}[1+|\varphi_1(\theta)|^2+|\varphi_2(\theta)|^2]d\mu(\theta);$$

$3^\circ)$ для $t>0$, $\delta>0$ выполняется неравенство

$$\int_t^{t+\delta}|m^\varepsilon(s,\varphi_1,\psi_1)-m^0(s,\varphi_1,\psi_1)|\,ds+$$

$$\int_t^{t+\delta}\int_U|\lambda^\varepsilon(s,\varphi_1,\psi_1,u)-\lambda^0(s,\varphi_1,\psi_1,u)|^2\Pi(du,ds)+$$

$$+\int_t^{t+\delta}|\sigma^\varepsilon(s,\varphi_1,\psi_1)-\sigma^\varepsilon(s,\varphi_2,\psi_2)|^2\,ds\le\psi(\varepsilon)\int_{-\tau}^{0}[1+|\varphi_1(\theta)|+|\psi_1(\theta)|]d\mu(\theta),$$

где $\psi(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$.

Обозначим характеристический квазиполином однородного детерминированного уравнения

$$y^{(2)}(t)+\sum_{k=0}^{N}(a_k y^{(1)}(t-\tau_k)+b_k y(t-\tau_k))=0, \tag{11}$$

как функцию комплексной переменной

$$L(z):=z^2+\sum_{k=0}^{N}(a_k z+b_k)e^{-z\tau_k}.$$

Пусть характеристическое уравнение

$$L(z)=0 \tag{12}$$

имеет $n$ пар простых чисто мнимых корней

$$\pm i\alpha_1,\ \pm i\alpha_2,\ \pm\ldots,\ \pm i\alpha_n, \tag{13}$$

остальные корни расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} z\le-\rho<0$.

От СДФУПВ (9) перейдем к системе уравнений

$$dx(t)=x^1(t)dt,$$

$$dx^1(t)=-\sum_{k=0}^{N}[a_k x^1(t-\Delta_k)+b_k x(t-\Delta_k)]dt+\varepsilon m^\varepsilon(t,x_t,x_t^1)dt+$$

$$+\sigma^\varepsilon(t,x_t,x_t^1)dw(\varepsilon t)+\int_U\lambda^\varepsilon(t,x_t,x_t^1,u)\tilde{\nu}(\varepsilon dt,du).$$

Эту систему с учетом формулы Коши (8) можно записать в интегральной форме

$$\vec{x}(t)=\vec{y}(t)+\varepsilon\int_0^t H(t-s)\overrightarrow{m^\varepsilon}(s,x_s,x_s^1)ds+\int_0^t H(t-s)\overrightarrow{\sigma^\varepsilon}(s,x_s,x_s^1)dw(\varepsilon s)+$$

$$+\int_0^t\int_U H(t-s)\,\overrightarrow{\lambda^\varepsilon}\,(s,x_s,x_s^1,u)\,\tilde{\nu}\,(\varepsilon ds,du), \tag{14}$$

где

$\vec{x}(t):=(x(t),x^1(t))^T$; $\vec{y}(t):=(y(t),\ y^1(t))^T$; $\overrightarrow{m^\varepsilon}(s,x_s,x_s^1):=(0;m^\varepsilon(s,x_s,x_s^1))^T$;

$\overrightarrow{\sigma}^\varepsilon(s,x_s,x_s^1):=(0;\sigma^\varepsilon(s,x_s,x_s^1))^T$; $\overrightarrow{\lambda}^\varepsilon(s,x_s,x_s^1,u):=(0;\lambda^\varepsilon(s,x_s,x_s^1,u))^T$.

Здесь $\vec{y}(t)$ — решение (11), записанное в виде системы дифференциальных уравнений с начальными данными (10).

**Лемма 2.** Пусть характеристическое уравнение (12) имеет $n$ пар простых чисто мнимых корней (13), остальные корни расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} z \le -\rho < 0$.

Тогда функция $H(t)$ расщепляется в виде суммы

$$H(t) = G_1(t) + G_2(t) + \ldots + G_{2n}(t) + G(t), \qquad (15)$$

где

$$G(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = -\rho} \Lambda^{-1}(z) e^{zt} dz, \quad i := \sqrt{-1},$$

функции $G_k(t)$, $k = \overline{1, 2n}$, равны вычету от функции $L^{-1}(z)e^{zt}$ в соответствующем корне (13).

Доказательство леммы 2 вытекает из формулы Коши [8]. ■

**Следствие 1.** Согласно [1] координаты решения $\vec{y}(t)$ соответствующего матричного однородного уравнения (11) можно представить в виде

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{j=1}^{n} B_j e^{i\alpha_j t} + \sum_{j=1}^{n} \overline{B}_j e^{-i\alpha_j t} + \widetilde{y}(t), \\ y^1(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j e^{i\alpha_j t} + \sum_{j=1}^{n} \overline{D}_j e^{-i\alpha_j t} + \widetilde{y}^1(t), \end{cases} \qquad (16)$$

где $\widetilde{y}(t) = o(e^{-\rho t})$, $\widetilde{y}^1(t) = o(e^{-\rho t})$ при $t \to +\infty$, а постоянные $B_j$, $\overline{B}_j$, $D_j$, $\overline{D}_j$, $j = \overline{1, n}$, определяются согласно начальным условиям (10).

**Теорема 1.** Решение системы (14) $\vec{x}(t) = (x(t), x^1(t))^T$ представим в виде

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + \sum_{i=1}^{n} u^i(t), \\ x^1(t) = v(t) + \sum_{i=1}^{n} v^i(t), \end{cases}$$

где процессы $u(t)$, $v(t)$, $u^i(t)$, $v^i(t)$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют системе СДФУПВ

$$du^i(t) = v^i(t)dt + 2p_i \varepsilon m^{\varepsilon}\left(t, \sum_{j=1}^{n} u_t^j + u_t, \sum_{j=1}^{n} v_t^j + v_t\right)dt +$$

$$+2p_i \sigma^{\varepsilon}\left(t, \sum_{j=1}^{n} u_t^j + u_t, \sum_{j=1}^{n} v_t^j + v_t\right)dw(\varepsilon t) +$$

$$+2p_i \int_U \lambda^{\varepsilon}(t, \sum_{j=1}^{n} u_t^j + u_t, \sum_{j=1}^{n} v_t^j + v_t, z)\widetilde{\nu}(\varepsilon dt, dz);$$

$$dv^i(t) = -\alpha_i^2 u^i(t)dt - 2\alpha_i q_i \varepsilon m^{\varepsilon}\left(t, \sum_{j=1}^{n} u_t^j + u_t, \sum_{j=1}^{n} v_t^j + v_t\right)dt -$$

$$-2\alpha_i q_i \sigma^{\varepsilon}\left(t, \sum_{j=1}^{n} u_t^j + u_t, \sum_{j=1}^{n} v_t^j + v_t\right)dw(\varepsilon t) -$$

$$-2\alpha_i q_i \int_U \lambda^\varepsilon \left( t, \sum_{j=1}^n u_t^j + u_t, \sum_{j=1}^n v_t^j + v_t, z) \right) \widetilde{\nu}(\varepsilon dt, dz);$$

$$u(t) = \widetilde{y}(t) + \varepsilon \int_0^t g(t-s) m^\varepsilon \left( s, \sum_{j=1}^n u_s^j + u_s, \sum_{j=1}^n v_s^j + v_s \right) +$$

$$+ \int_0 g(t-s) \sigma^\varepsilon \left( s, \sum_{j=1}^n u_s^j + u_s, \sum_{j=1}^n v_s^j + v_s \right) dw(\varepsilon s) +$$

$$+ \int_0^t \int_U g(t-s) \lambda \left( s, \sum_{j=1}^n u_s^j + u_s, \sum_{j=1}^n v_s^j + v_s, u \right) \widetilde{\nu}(\varepsilon ds, du);$$

$$v(t) = \widetilde{y}^1(t) + \varepsilon \int_0^t g_1(t-s) m^\varepsilon \left( s, \sum_{j=1}^n u_t^j + u_s, \sum_{j=1}^n v_t^j + v_s \right) ds +$$

$$+ \int_0^t g_1(t-s) \sigma \left( s, \sum_{j=1}^n u_s^j + u_s, \sum_{j=1}^n v_t^j + v_s \right) dw(\varepsilon s) +$$

$$+ \int_0^t \int_U g_1(t-s) \lambda^\varepsilon \left( s, \sum_{j=1}^n u_t^j + u_s, \sum_{j=1}^n v_t^j + v_s, u \right) \widetilde{\nu}(\varepsilon ds, du), \ i = \overline{1, n},$$

где $p_j := \operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{\det L'(i\alpha_j)} \right\}$, $q_i := \operatorname{Im}\left\{ \frac{1}{\det L'(i\alpha_j)} \right\}$, $j = \overline{1, n}$, $g(t) :=$ $:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = -\rho} \frac{e^{zt}}{L(z)} dz$, $g_1(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = -\rho} \frac{z e^{zt}}{L(z)} dz$.

**Доказательство.** Учитывая расщепление матрицы $H(t)$ (15) и соотношение для $y(t)$, $y^1(t)$ (16), систему (14) можно расписать покоординатно для $x(t)$ и $x^1(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{j=1}^n B_j e^{i\alpha_j t} + \sum_{j=1}^n \overline{B}_j e^{-i\alpha_j t} + \widetilde{y}(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^n \left[ \frac{e^{i\alpha_j (t-s)}}{L'(i\alpha_j)} + \frac{e^{-i\alpha_j (t-s)}}{L'(-i\alpha_j)} + g(t-s) \right] \times \\ \times \left[ \varepsilon m^\varepsilon (s, x_s, x_s^1) ds + \sigma^\varepsilon (s, x_s, x_s^1) dw(\varepsilon s) + \int_U \lambda(s, x_s, x_s^1, z) \widetilde{\nu}(\varepsilon ds, dz) \right], \\ x^1(t) = \sum_{j=1}^n D_j e^{i\alpha_j t} + \sum_{j=1}^n \overline{D}_j e^{-i\alpha_j t} + \widetilde{y}^1(t) - \\ - \int_0^t \sum_{j=1}^n \left[ \frac{i\alpha_j e^{i\alpha_j (t-s)}}{L'(i\alpha_j)} + \frac{i\alpha_j e^{-i\alpha_j (t-s)}}{L'(i\alpha_j)} + g_1(t-s) \right] \times \\ \times \left[ \varepsilon m^\varepsilon (s, x_s, x_s^1) ds + \sigma^\varepsilon (s, x_s, x_s^1) dw(\varepsilon s) + \int_U \lambda(s, x_s, x_s^1, z) \widetilde{\nu}(\varepsilon ds, dz) \right]. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда для переменных $u(t)$, $v(t)$, $u^i(t)$, $v^i(t)$, $i=\overline{1,n}$, получим $2n+2$ уравнения:

$$\begin{cases} u^j(t)=B_j e^{i\alpha_j t}+\overline{B}_j e^{-i\alpha_j t}+\int\limits_0^t\left[\dfrac{e^{i\alpha_j(t-s)}}{L'(i\alpha_j)}-\dfrac{e^{-i\alpha_j(t-s)}}{L'(-i\alpha_j)}\right]\times \\ \times\left[\varepsilon m^\varepsilon(s,x_s,x_s^1)ds+\sigma^\varepsilon(s,x_s,x_s^1)dw(\varepsilon s)+\int\limits_U\lambda^\varepsilon(s,x_s,x_s^1,z)\widetilde{\nu}(\varepsilon ds,dz)\right], \\ v^j(t)=D_j e^{i\alpha_j t}+\overline{D}_j e^{-i\alpha_j t}+\int\limits_0^t\left[\dfrac{i\alpha_j e^{i\alpha_j(t-s)}}{L'(i\alpha_j)}-\dfrac{i\alpha_j e^{-i\alpha_j(t-s)}}{L'(-i\alpha_j)}\right]\times \\ \times\left[\varepsilon m^\varepsilon(s,x_s,x_s^1)ds+\sigma^\varepsilon(s,x_s,x_s^1)dw(\varepsilon s)+\int\limits_U\lambda^\varepsilon(s,x_s,x_s^1,z)\widetilde{\nu}(\varepsilon ds,dz)\right],\ j=\overline{1,n}; \end{cases}$$

$$u(t)=\widetilde{y}(t)+\varepsilon\int\limits_0^t g(t-s)m^\varepsilon(s,x_s,x_s^1)ds+\int\limits_0^t g(t-s)\sigma^\varepsilon(s,x_s,x_s^1)dw(\varepsilon s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_U g(t-s)\lambda^\varepsilon(s,x_s,x_s^1,z)\,\widetilde{\nu}(\varepsilon ds,dz);$$

$$v(t)=\widetilde{y}^1(t)+\varepsilon\int\limits_0^t g_1(t-s)m^\varepsilon(s,x_s,x_s^1)ds+\int\limits_0^t g_1(t-s)\sigma^\varepsilon(s,x_s,x_s^1)dw(\varepsilon s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_U g_1(t-s)\lambda^\varepsilon(s,x_s,x_s^1,z)\,\widetilde{\nu}(\varepsilon ds,dz).$$

Далее преобразуем полученную систему так, чтобы первые $2n$ уравнения имели вид

$$\begin{cases} du^j(t)=v^j(t)dt+\beta_{2j-1}[\varepsilon m^\varepsilon(t,x_t,x_s^1)dt+\sigma^\varepsilon(t,x_t,x_s^1)dw(\varepsilon t)+ \\ +\int\limits_U\lambda^\varepsilon(t,x_t,x_s^1,z)\widetilde{\nu}(\varepsilon dt,dz)], \\ dv^j(t)=-\alpha_j^2u^j(t)dt+\beta_{2j}[\varepsilon m^\varepsilon(t,x_t,x_s^1)dt+\sigma^\varepsilon(t,x_t,x_s^1)dw(\varepsilon t)+ \\ +\int\limits_U\lambda^\varepsilon(t,x_t,x_s^1,z)\widetilde{\nu}(\varepsilon dt,du)], \end{cases} \tag{18}$$

где $j=\overline{1,n}$, а коэффициенты $\beta_k$, $k=\overline{1,2n}$, определяются соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_{2j-1}}{2}\left(e^{i\alpha_j(t-s)}+e^{-i\alpha_j(t-s)}\right)+\dfrac{\beta_{2j}}{2}\left(e^{i\alpha_j(t-s)}+e^{-i\alpha_i(t-s)}\right)=\dfrac{e^{i\alpha_j(t-s)}}{L'(i\alpha_j)}+\dfrac{e^{-i\alpha_j(t-s)}}{L'(-i\alpha_j)}, \\ \dfrac{\beta_{2j-1}}{2}\left(\alpha_j e^{i\alpha_j(t-s)}+\alpha_j e^{-i\alpha_j(t-s)}\right)+\dfrac{\beta_{2j}}{2}\left(e^{i\alpha_j(t-s)}+e^{-i\alpha_i(t-s)}\right)= \\ =\dfrac{i\alpha_j e^{i\alpha_j(t-s)}}{L'(i\alpha_j)}+\dfrac{i\alpha_j e^{-i\alpha_j(t-s)}}{L'(-i\alpha_j)},\quad j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

В результате решения этой системы получим

$$\beta_{2j-1} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{L'(i\alpha_j)}\right\},\ \beta_{2j} = -2\alpha_j\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{L'(i\alpha_j)}\right\}. \tag{19}$$

Подставив (19) в матричную систему (18), получим утверждение теоремы 1.

Теорема 1 доказана. ■

**Замечание 2.** В дальнейших выкладках будем считать, что $n=1$.

**Теорема 2.** Пусть задача (9), (10) имеет ограниченное в среднем решение. Тогда существует $C>0$ такое, что для $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0$— достаточно малое, и $\forall t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$ выполняется соотношение

$$\| u-\widetilde{y}\|_{T/\varepsilon}+\| v-\widetilde{y}^{1}\|_{T/\varepsilon}\le \varepsilon C, \tag{20}$$

при этом

$$\|\varphi\|_T := \left(\sup_{t\in[-h,T]} E\varphi^2(t)\right)^{1/2}.$$

**Доказательство.** Определим случайные процессы:

$$u^{(0)}(t):=y(t);\ v^{(0)}(t):=y^1(t);$$

$$u^{(n)}(t)=\widetilde{y}(t)+\varepsilon\int_0^t g(t-s)m^{\varepsilon}(s,u_s^1+u_s^{(n-1)},v_s^1+v_s^{(n-1)})ds+$$

$$+\int_0^t g(t-s)\sigma^{\varepsilon}(s,u_s^1+u_s^{(n-1)},v_s^1+v_s^{(n-1)})dw(\varepsilon s)+$$

$$+\int_0^t\int_U g(t-s)\lambda^{\varepsilon}(s,u_s^1+u_s^{(n-1)},v_s^1+v_s^{(n-1)})\,\widetilde{\nu}(\varepsilon ds,du);$$

$$v^{(n)}(t)=\widetilde{y}^{1}(t)+\varepsilon\int_0^t g_1(t-s)m^{\varepsilon}(s,u_s^1+u_s^{(n-1)},v_s^1+v_s^{(n-1)})ds+$$

$$+\int_0^t g_1(t-s)\sigma^{\varepsilon}(s,u_s^1+u_s^{(n-1)},v_s^1+v_s^{(n-1)})dw(\varepsilon s)+$$

$$+\int_0^t\int_U g_1(t-s)\lambda^{\varepsilon}(s,u_s^1+u_s^{(n-1)},v_s^1+v_s^{(n-1)},z)\,\widetilde{\nu}(\varepsilon ds,dz).$$

Рассмотрим разность между двумя соседними итерациями, обозначая $\|\bullet\|=\|\bullet\|_{T/\varepsilon}$:

$$\| u^{(n)}-u^{(n-1)}\|+\| v^{(n)}-v^{(n-1)}\|\le\left\|\varepsilon\int_0^{\bullet} G(t-s)\Delta m^{\varepsilon}(s)ds\right\|+\left\|\int_0^{\bullet} G(t-s)\Delta\sigma^{\varepsilon}(s)dw(\varepsilon s)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^{\bullet}\int_U G(t-s)\Delta\lambda^{\varepsilon}(s,u)\,\widetilde{\nu}(\varepsilon ds,du)\right\|,$$

где

$$G(t)=g(t)+g_1(t),$$

$$\Delta m^{\varepsilon}(s)=m^{\varepsilon}(s, u_s^1+u_s^{(n-1)}, \upsilon_s^1+\upsilon_s^{(n-1)})-m^{\varepsilon}(s, u_s^1+u_s^{(n-2)}, \upsilon_s^1+\upsilon_s^{(n-2)});$$

$$\Delta\sigma^{\varepsilon}(s)=\sigma^{\varepsilon}(s, u_s^1+u_s^{(n-1)}, \upsilon_s^1+\upsilon_s^{(n-1)})-\sigma^{\varepsilon}(s, u_s^1+u_s^{(n-2)}, \upsilon_s^1+\upsilon_s^{(n-2)}),$$

$$\Delta\lambda^{\varepsilon}(s, z)=\lambda^{\varepsilon}(s, u_s^1+u_s^{(n-1)}, \upsilon_s^1+\upsilon_s^{(n-1)}, z)-\lambda^{\varepsilon}(s, u_s^1+u_s^{(n-2)}, \upsilon_s^1+\upsilon_s^{(n-2)}, z).$$

Далее, используя условия $1^\circ$ и условия ограниченности (3), (4), получаем оценку

$$\|u^{(n)}-u^{(n-1)}\|+\|\upsilon^{(n)}-\upsilon^{(n-1)}\|\le C_1\sqrt{\varepsilon}(\|u^{(n-1)}-u^{(n-2)}\|+\|\upsilon^{(n-1)}-\upsilon^{(n-2)}\|),$$

где $C_1=C(T,C,K)<\infty$. Выберем $\varepsilon$ таким, чтобы выполнялось условие $C_1\varepsilon<1$. Тогда можно утверждать о существовании случайных процессов $\overline{u}(t)$ и $\overline{\upsilon}(t)$, которые задаются соотношениями

$$\overline{u}(t)=\lim_{n\to\infty}u^{(n)}(t), \quad \overline{\upsilon}(t)=\lim_{n\to\infty}\upsilon^{(n)}(t),$$

причем $u(t)\equiv\overline{u}(t)$, $\upsilon(t)\equiv\overline{\upsilon}(t)$.

Далее получим цепочку неравенств

$$\|u^{(n)}-\widetilde{y}\|+\|\upsilon^{(n)}-\widetilde{y}^1\|\le\|u^{(n)}-u^{(n-1)}\|+\|u^{(n-1)}-u^{(n-2)}\|+\ldots+\|u^{(1)}-\widetilde{y}\|+$$

$$+\|\upsilon^{(n)}-\upsilon^{(n-1)}\|+\|\upsilon^{(n-1)}-\upsilon^{(n-2)}\|+\ldots+\|\upsilon^{(1)}-\widetilde{y}^1\|\le$$

$$\le[(C_1\sqrt{\varepsilon})^{n-1}+\ldots+C_1\sqrt{\varepsilon}](\|u^{(1)}-\widetilde{y}\|+\|\upsilon^{(1)}-\widetilde{y}^1\|)\le K\frac{C_1\sqrt{\varepsilon}}{1-C_1\sqrt{\varepsilon}}<K\frac{C_1\varepsilon}{1-C_1\sqrt{\varepsilon}},$$

где $K:=\|u^{(1)}-\widetilde{y}\|+\|\upsilon^{(1)}-\widetilde{y}^1\|$.

Теорема 2 доказана. ■

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dy^1(t)=y^2(t)dt+2p_i\varepsilon m^0(t, y_t^1, y_t^2)dt+2p_i\sigma^0(t, y_t^1, y_t^2)dw(\varepsilon t)+ \\ +2p_i\int\limits_U\lambda^0(t, y_t^1, y_t^2, z)\widetilde{\nu}(\varepsilon dt, dz), \\ dy^2(t)=-\alpha_i^2y^1(t)dt-2\alpha_iq_i\varepsilon m^0(t, y_t^1, y_t^2)dt-2\alpha_iq_i\sigma^0(t, y_t^1, y_t^2)dw(\varepsilon t)- \\ -2\alpha_iq_i\int\limits_U\lambda^0(t, y_t^1, y_t^2, z)\widetilde{\nu}(\varepsilon dt, dz), \end{cases} \tag{21}$$

которую иногда называют частично усредненной системой относительно системы, рассмотренной в утверждении теоремы 1. Тогда справедлива теорема.

**Теорема 3.** При выполнении условий $1^\circ-3^\circ$ имеет место оценка

$$\|x-y^1\|_{T/\varepsilon}+\|x^1-y^2\|_{T/\varepsilon}\le C_1\varepsilon.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 2 достаточно показать, что

$$\|u_t^1-y_t^1\|+\|\upsilon_t^1-y_t^2\|\le C\varepsilon.$$

Это нетрудно выполнить, используя условия $1^\circ-3^\circ$ и неравенство Гронуолла.

Теорема 3 доказана. ■

Для системы СДФУПВ (21) сделаем замену переменных

$$r(t)=\sqrt{(y^1(t))^2+\frac{1}{\alpha_1^2}(y^2(t))^2}\ ;\ \psi(t)=-\operatorname{arctg}\frac{y^2(t)}{\alpha_1 y^1(t)}-\alpha_1 t\,.$$

Определим функции

$$f_1(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+\frac{x_2^2}{\alpha_1^2}}\,,\ f_2(t,x_1,x_2)=-\operatorname{arctg}\frac{x_1^2}{\alpha_1 x_2^2}-\alpha_1 t\,.$$

Тогда согласно формуле Ито–Скорохода [9, 10] для случайных процессов $r(t)$ и $\psi(t)$ получим СДФУПВ

$$dr(t)=$$

$$=\left\{\left[a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{b_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{b_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+b_1b_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]f_1(x_1,x_2)_{x_1=y^1(t),\ x_2=y^2(t)}+\right.$$

$$+\int_U[f_1(y^1(t)+2p_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z),\ y^2(t)+2\alpha_1q_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z))-f_1(y^1(t),\ y^2(t))-$$

$$-\left[2p_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z)\frac{\partial}{\partial x_1}+2\alpha_1q_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z)\frac{\partial}{\partial x_2}\right]\times$$

$$\left.\times f_1(x_1,x_2)_{x_1=y^1(t),x_2=y^2(t)}\Big]\Pi(dz)\right\}dt+$$

$$+\left[b_1\frac{\partial}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]f_1(x_1,x_2)_{x_1=y^1(t),x_2=y^2(t)}dw(t)+$$

$$+\int_U[f_1(y^1(t)+2p_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z),\ y^2(t)+2\alpha_1q_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z))-$$

$$-f_1(y^1(t),\ y^2(t))]\tilde{\nu}(\varepsilon dt,du)\,;$$

$$d\psi(t)=\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t}+a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{b_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{b_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+b_1b_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]f_2(x_1,x_2)_{x_1=y^1(t),x_2=y^2(t)}+$$

$$+\int_U[f_2(y^1(t)+2p_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z),\ y^2(t)+2\alpha_1q_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z))-f_2(y^1(t),\ y^2(t))-$$

$$-\left[2p_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z)\frac{\partial}{\partial x_1}+2\alpha_1q_1\lambda^0(t,y_t^1,y_t^1,z)\frac{\partial}{\partial x_2}\right]\times$$

$$\times f_2(x_1, x_2)_{x_1=y^1(t),\, x_2=y^2(t)} \Bigg] \Pi(dz) \Bigg\} dt +$$

$$+\left[b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right] f_2(x_1, x_2)_{x_1=y^1(t),\, x_2=y^2(t)} dw(t) +$$

$$+\int_U [f_2(y^1(t) + 2p_1\lambda^0(t, y_t^1, y_t^1, z),\, y^2(t) + 2\alpha_1 q_1 \lambda^0(t, y_t^1, y_t^1, z)) -$$

$$-f_2(y^1(t), y^2(t))]\, \widetilde{\nu}(\varepsilon dt, du),$$

где

$$a_1 = y^2(t) + 2p_i \varepsilon m^0(t, y_t^1, y_t^2), \quad a_2 = -\alpha_i^2 y^1(t) - 2\alpha_i q_i \varepsilon m^0(t, y_t^1, y_t^2),$$

$$b_1 = 2\sqrt{\varepsilon}\, p_i \sigma^0(t, y_t^1, y_t^2), \quad b_2 = 2\sqrt{\varepsilon}\, \alpha_i q_i \sigma^0(t, y_t^1, y_t^2).$$

После несложных вычислений стохастические дифференциалы $dr(t)$ и $d\psi(t)$ примут вид при $\alpha = \alpha_1$, $p = p_1$, $q = q_1$:

$$dr(t) = 2\varepsilon\, \{[p\cos(\alpha t + \psi(t)) + q\sin(\alpha t + \psi(t))]\, m_1(t, r_t, \psi_t) +$$

$$+\frac{1}{2}[p^2 \sin^2(\alpha t + \psi(t)) + q^2 \cos^2(\alpha t + \psi(t)) - pq\sin(\alpha t + \psi(t))]\, \sigma_1^2(t, r_t, \psi_t) +$$

$$+\int_U \frac{1}{r(t)} \lambda_1^2(t, r_t, \psi_t, z)[p^2 \sin^2(\alpha t + \psi(t)) + q^2 \cos^2(\alpha t + \psi(t)) -$$

$$-pq\sin(\alpha t + \psi(t))]\, \Pi(dz)\} dt +$$

$$+2\sigma_1(t, r_t, \psi_t)[p\cos(\alpha t + \psi(t)) + q\sin(\alpha t + \psi(t))]\, dw(\varepsilon t) +$$

$$+2\int_{\mathrm{U}} \lambda_1(t, r_t, \psi_t, z)[p\cos(\alpha t + \psi(t)) + q\sin(\alpha t + \psi(t))]\, \widetilde{\nu}(\varepsilon dt, du),$$

$$d\psi(t) = \frac{2\varepsilon}{r(t)} \{[q\cos(\alpha t + \psi(t)) - p\sin(\alpha t + \psi(t))] + m_1(t, r_t, \psi_t) +$$

$$+\frac{1}{r(t)} \sigma_1^2(t, r_t, \psi_t)[p^2 \sin^2(2\alpha t + 2\psi(t)) - 2pq\cos(2\alpha t + 2\psi(t)) -$$

$$-q^2 \sin^2(2\alpha t + 2\psi(t))] + \frac{1}{r(t)} \int_U \lambda_1^2(t, r_t, \psi_t)[p^2 \sin^2(2\alpha t + 2\psi(t)) -$$

$$-2pq\cos(2\alpha t + \psi(t)) - q^2 \sin^2(2\alpha t + \psi(t))]\, \Pi\, n(du)\} dt +$$

$$+\frac{2}{r} \sigma_1(t, r_t, \psi_t)[q\cos(\alpha t + \psi(t)) - p\sin(\alpha t + \psi(t))]\, dw(\varepsilon t) +$$

$$+\frac{2}{r} \int_U \lambda_1^2(t, r_t, \psi_t, z)[q\cos(\alpha t + \psi(t)) - p\sin(\alpha t + \psi(t))]\, \widetilde{\nu}(\varepsilon dt, dz),$$

где

$$m_1(t, \varphi_1, \varphi_2) := m^0(t, \varphi_1, \varphi_2), \quad \sigma_1(t, \varphi_1, \varphi_2) := \sigma^0(t, \varphi_1, \varphi_2),$$

$$\lambda_1(t, \varphi_1, \varphi_2, z) := \lambda^0(t, \varphi_1, \varphi_2, z).$$

Исходные процессы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ выражаются через процессы $r(t)$ и $\psi(t)$ следующим образом:

$$x(t)=r(t)\cos(\alpha t+\psi(t)),\ \dot{x}(t)=-r(t)\alpha\sin(\alpha t+\psi(t)).$$

Для доказательства основного результата работы введем обозначения

$$x_t(\tau):=\{x(t+s),\ \ s\in[-\tau,0]\},\ \bar{x}_t:=\{\bar{x}(t+s)=x(t),\ s\in[-\tau,0]\},$$

$$\overline{m}^{\varepsilon}(t,x(t))=m^{\varepsilon}(t,\bar{x}_t),\ \overline{\sigma}^{\varepsilon}(t,x(t))=\sigma^{\varepsilon}(t,\bar{x}_t),\ \ \overline{\lambda}^{\varepsilon}(t,x(t),z)=\lambda^{\varepsilon}(t,\bar{x}_t,z).$$

Рассмотрим следующее СДФУПВ для $\varepsilon\geq 0$:

$$dx^{\varepsilon}(t)=\varepsilon m^{\varepsilon}(t,x_t^{\varepsilon}(\tau(\varepsilon)))dt+\sigma^{\varepsilon}(t,x_t^{\varepsilon}(\tau(\varepsilon)))dw(\varepsilon t)+$$

$$+\int_U \lambda^{\varepsilon}(t,x_t^{\varepsilon}(\tau(\varepsilon)),z)\,\widetilde{\nu}(\varepsilon dt,dz), \tag{22}$$

которое определяет «малую» часть уравнения (9) и СДФУПВ

$$dz^{\varepsilon}(t)=\varepsilon\overline{m}^{\varepsilon}(t,z^{\varepsilon}(t))\,dt+\overline{\sigma}^{\varepsilon}(t,z^{\varepsilon}(t))\,dw(\varepsilon t)+\int_U\overline{\lambda}^{\varepsilon}(t,z^{\varepsilon}(t),z)\,\widetilde{\nu}(\varepsilon dt,dz) \tag{23}$$

и задает некоторый марковский процесс.

Основной результат работы сформулируем в следующим утверждении.

**Теорема 4.** Пусть:

1) функционалы $m^{\varepsilon}$, $\sigma^{\varepsilon}$ и $\lambda^{\varepsilon}$ из уравнения (22) измеримы по всем переменным и удовлетворяют условиям $1^{\circ}-3^{\circ}$;

2) решения уравнений (22) и (23) непрерывны слева;

3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tau(\varepsilon)=0$ и $\sup\limits_{\varepsilon}\int_0^{\infty}E(m^{\varepsilon}(s,x_s^{\varepsilon}(\tau(\varepsilon))))^2\,ds<K<\infty$;

4) СДФУПВ (22), (23) рассматриваются при одинаковых начальных условиях.

Тогда при достаточно малом значении $\varepsilon>0$ имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}E|x^{\varepsilon}(t)-z^{0}(t)|^2\leq\gamma_1(\varepsilon), \tag{24}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_1(\varepsilon)=0$.

**Доказательство.** Согласно теоремам 2 и 3 для доказательства теоремы 4 достаточно доказать, что

$$\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}E|x^{\varepsilon}(t)-z^{\varepsilon}(t)|^2\leq\gamma_1(\varepsilon). \tag{25}$$

Рассмотрим разность

$$E|x^{\varepsilon}(t)-z^{\varepsilon}(t)|\leq 3E\left|\int_0^t\varepsilon(m^{\varepsilon}(s,x_s^{\varepsilon}(\tau(\varepsilon)))-\overline{m}^{\varepsilon}(s,z^{\varepsilon}(s)))ds\right|^2+$$

$$+3E\left|\int_0^t(\sigma^{\varepsilon}(s,x_s^{\varepsilon}(\tau(\varepsilon)))-\overline{\sigma}^{\varepsilon}(s,z^{\varepsilon}(s)))dw(\varepsilon s)\right|^2+$$

$$+3E\left|\int_0^t\int_U(\lambda^{\varepsilon}(s,x_s^{\varepsilon}(\tau(\varepsilon)),z)-\overline{\lambda}^{\varepsilon}(s,z^{\varepsilon}(s),z))\,\widetilde{\nu}(\varepsilon dt,dz)\right|^2\leq$$

$$\le C_1\left(\varepsilon\int\limits_0^t E(m^\varepsilon(s, x_s^\varepsilon(\tau(\varepsilon))) - \overline{m}^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s)))\right)^2 ds +$$

$$+\int\limits_0^t E(\sigma^\varepsilon(s, x_s^\varepsilon(\tau(\varepsilon))) - \overline{\sigma}^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s)))^2 ds +$$

$$\left.+\int\limits_0^t\int\limits_U E(\lambda^\varepsilon(s, x_s^\varepsilon(\tau(\varepsilon)), z) - \overline{\lambda}^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s), z))^2\, \Pi(dz)\, ds\right),$$

где $C_1 < \infty$ — некоторая константа, не зависящая от $\varepsilon$.

Используя условие Липшица $1^\circ$ и условие интегрируемости $3^\circ$, получаем неравенство

$$E|x^\varepsilon(t) - z^\varepsilon(t)| \le \varepsilon K C_1 + C_2 \int\limits_0^t \sup_{s_1\in[0,\tau(\varepsilon)]} E|x^\varepsilon(s-s_1) - z^\varepsilon(s-s_1)|\, ds,$$

где $C_2 = C_2(C_1, K, \mu, T) < \infty$.

Последнее неравенство позволяет сделать заключение, что

$$\sup_{t\in[0, T/\varepsilon]} E|x^\varepsilon(t) - z^\varepsilon(t)| \le \varepsilon K C_1 + C_2 \int\limits_0^T \sup_{t\in[0, T/\varepsilon]} E|x^\varepsilon(t) - z^\varepsilon(t)|\, dt.$$

Используя неравенство Гронуоллу, получаем соотношение

$$\sup_{t\in[0, T/\varepsilon]} E|x^\varepsilon(t) - z^\varepsilon(t)| \le \varepsilon K C_1 e^{C_2 T},$$

что доказывает (25) и утверждение теоремы 4.

Теорема 4 доказана. ■

**Замечание 3.** С помощью теорем 3 и 4 удалось усреднить снос и перейти от диффузии $\sigma^\varepsilon(t, x_t)$ к диффузии $\sigma^0(t, x(t))$ и от $\lambda^\varepsilon(t, x_t, z)$ к $\lambda^\varepsilon(t, x(t), z)$, которые зависят уже не от отрезка траектории $x_t$, а от $x(t)$. Это означает, что сильное решение СДФУПВ (22) можно заменить марковским процессом [2–4].

Для упрощения изложения будем оперировать чисто диффузионным СДФУПВ, т.е. $\lambda(t, \psi, u) \equiv 0$.

Обозначим

$$\begin{cases} m_r(t, r_t, \psi_t) := 2\{[p\cos(\alpha t + \psi(t)) - q\sin(\alpha t + \psi(t))]\, m_1(t, r_t, \psi_t) + \\ \quad + \dfrac{1}{r}\sigma_1^2(t, r_t, \psi_t)[-pq\cos(2\alpha t + 2\psi(t))]\}, \\ m_\psi(t, r_t, \psi_t) := \dfrac{2}{r}\{[q\cos(\alpha t + \psi(t)) - p\sin(\alpha t + \psi(t))]\, m_1(t, r_t, \psi_t) + \\ + \dfrac{1}{r}\sigma_1^2(t, r_t, \psi_t)[p^2\sin(2\alpha t + 2\psi(t)) - 2pq\cos(2\alpha t + 2\psi(t)) + q^2\sin(2\alpha t + 2\psi(t))]\}, \\ \sigma_r(t, r_t, \psi_t) := 2\sigma_1(t, r_t, \psi_t)[p\cos(\alpha t + \psi(t)) - q\sin(\alpha t + \psi(t))], \\ \sigma_\psi(t, r_t, \psi_t) := \dfrac{2}{r}\sigma_1(t, r_t, \psi_t)[q\cos(\alpha t + \psi(t)) - p\sin(\alpha t + \psi(t))]. \end{cases} \tag{26}$$

Перепишем дифференциалы $r(t)$ и $\psi(t)$ в обозначениях (26):

$$\begin{cases} dr(t) = \varepsilon m_r(t, r_t, \psi_t)dt + \sigma_r(t, r_t, \psi_t)dw(\varepsilon t), \\ d\psi(t) = \varepsilon m_\psi(t, r_t, \psi_t)dt + \sigma_\psi(t, r_t, \psi_t)dw(\varepsilon t). \end{cases}$$

Применив теорему 4 к данной системе, получим следующее частично усредненное СДФУПВ:

$$\begin{cases} dr(t) = \varepsilon \overline{m}_r(r(t), \psi(t))dt + \overline{\sigma}_r(t, r(t), \psi(t))dw(\varepsilon t), \\ d\psi(t) = \varepsilon \overline{m}_\psi(r(t), \psi(t))dt + \overline{\sigma}_\psi(t, r(t), \psi(t))dw(\varepsilon t). \end{cases}$$

Составим для этой системы уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) для совместной плотности распределения $\xi$ случайных процессов $r$ и $\psi$ [5, 12]:

$$\frac{\partial \xi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon \overline{m}_r(r, \psi)\xi) - \frac{\partial}{\partial \psi}(\varepsilon \overline{m}_\psi(r, \psi)\xi) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r^2}(-\xi \overline{\sigma}_r^2(t, r, \psi)) +$$

$$+2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r \partial \psi}\{\xi \overline{\sigma}_r(t, r, \psi)\overline{\sigma}_\psi(t, r, \psi)\} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\{\xi \overline{\sigma}_\psi^2(t, r, \psi)\}.$$

В этом уравнении усредняем по явно входящему времени $t$ те коэффициенты при $\xi$, которые еще содержат $t$ [14], а именно

$$\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}[\varepsilon \overline{m}_r(r, \psi)\overline{\xi}] - \frac{\partial}{\partial \psi}[\varepsilon \overline{m}_\psi(r, \psi)\overline{\xi}] + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r^2}[\overline{\xi}\, \overline{\sigma}_\psi^2(r, \psi)] +$$

$$+2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial r \partial \psi}[\overline{\xi}\, \overline{\sigma}_r(r, \psi)\overline{\sigma}_\psi(r, \psi)] + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}[\overline{\xi}\, \overline{\sigma}_\psi^2(r, \psi)].$$

Отметим, что этому уравнению соответствует система уравнений для амплитуды и фазы

$$\begin{cases} d\overline{r} = \varepsilon \overline{m}_r(\overline{r}, \overline{\psi})dt + \sigma_{11}(\overline{r}, \overline{\psi})d\eta_1(\varepsilon t) + \sigma_{12}(\overline{r}, \overline{\psi})d\eta_2(\varepsilon t), \\ d\overline{\psi} = \varepsilon \overline{m}_\psi(\overline{r}, \overline{\psi})dt + \sigma_{12}(\overline{r}, \overline{\psi})d\eta_1(\varepsilon t) + \sigma_{22}(\overline{r}, \overline{\psi})d\eta_2(\varepsilon t), \end{cases}$$

где $\eta_1$ и $\eta_2$ — одинаковые некоррелированные «белые шумы» [12], а коэффициенты $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$, $\sigma_{22}$ определяются из матричного равенства

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \overline{\sigma}_r^2 & \overline{\sigma}_r \overline{\sigma}_\psi \\ \overline{\sigma}_r \overline{\sigma}_\psi & \overline{\sigma}_\psi^2 \end{bmatrix}.$$

Эту систему назовем полностью упрощенной для системы (21).

В настоящей работе изложены следующие результаты: доказано утверждение о близости исходной системы (9), «частично» усредненной системы (21) и некоторого марковского процесса, заданного (23) при достаточно малых $\varepsilon$ на бесконечно возрастающем интервале времени $[0, T/\varepsilon]$.

Таким образом, можно утверждать, что правая часть уравнения (9), не теряя общности, может быть заменена на некоторый марковский процесс при соответствующих условиях, наложенных на коэффициенты $m^\varepsilon$, $\sigma^\varepsilon$, $\lambda^\varepsilon$ и память $\tau(\varepsilon)$. Отметим, что этот подход применим также и к дискретным системам со случайной памятью [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Ясинский В.К., Малык И.В. О непрерывности по параметру решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с пуассоновскими возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6 — С. 45–61.

2. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 861 с.
3. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
4. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — Berlin: Springer, 2005 — 331 p.
5. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. — К.: Наук. думка, 1971. — 440 с.
6. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
7. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
8. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969. — 576 с.
9. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. — Berlin: Springer, 1987. — 600 p.
10. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — К.: Наук. думка, 1982. — 612 с.
11. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 314 с.
12. Ясинський В.К. Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — К.: ТВМС, 2005. — 578 с.
13. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
14. Jakubovski A. A non-Skorohod topology on the Skorohod space// Electronic J. of Probability. — 1997. — **42**, N 18 — P. 1–21.
15. Букатарь М.И., Царьков Е.Ф. Об автоколебаниях в ламповом генераторе с запаздывающей обратной связью // Известие вузов. — 1970. — № 8. — С. 1117–1125.

*Поступила 16.06.2010*