УДК 519.863: 330.115

М.В. БОЙЧУК, А.Р. СЕМЧУК

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛНОГО ЦИКЛА ОДНОПРОДУКТОВОЙ МАКРОЭКОНОМИКИ РОСТА

Ключевые слова: *стохастическое моделирование, однопродуктовая макроэкономика, траектория, управление, момент переключения управления.*

В работах [1–3] предложены и исследованы детерминированные модели однопродуктовой макроэкономики роста. Однако на практике представляют интерес стохастические модели. Под полным циклом модели однопродуктовой макроэкономики роста следует понимать учет в ней всех основных показателей, участвующих в этом процессе [3].

Сформулируем предположения, необходимые для построения детерминированной модели, а затем на ее основе формализуем стохастическую модель.

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ

Предположение 1. Валовая продукция X в момент времени $t \in [t_0, T]$ состоит из конечного выпуска продукции Y и производственного потребления W:

$$X(t) = Y(t) + W(t), \ t \in [t_0, T]. \tag{1}$$

Предположим, что производственное потребление W прямо пропорционально валовой продукции X:

$$W(t) = aX(t), \ a \in (0; 1), \ a \equiv \text{const}, \ t \in [t_0, T]. \tag{2}$$

Тогда конечный выпуск продукции составит

$$Y(t) = (1-a)X(t), \ t \in [t_0, T]. \tag{3}$$

Предположение 2. Прибыль и затраты тождественно совпадают

$$Y(t) = C(t) + I(t) + U_r(t) + Z(t) + O_p(t) + S_a(t), \ t \in [t_0, T], \tag{4}$$

где C — непроизводственное потребление; I — валовые инвестиции; U_r — затраты на содержание государственного аппарата (правительственные затраты); Z — средства, выделенные на борьбу с загрязнением окружающей среды; O_p — налоги; S_a — сальдо (экспорт минус импорт). Пусть правительственные затраты, расходы на борьбу с загрязнением окружающей среды, налоги и сальдо являются частью w конечного выпуска продукции Y:

$$U_r(t) + Z(t) + O_p(t) + S_a(t) = wY(t), \ w \in (0; 1), \ w \equiv \text{const}, \ t \in [t_0, T]. \tag{5}$$

С учетом (5) из (4) имеем

$$C(t) + I(t) = (1-w)Y(t), \ t \in [t_0, T]. \tag{6}$$

Предположим, что непроизводственное потребление C составляет часть s величины $(1-w)Y$:

$$C(t) = s(t)(1-w)Y(t) = (1-w)(1-a)s(t)X(t), \ 0 \le s \le 1, \ t \in [t_0, T]. \tag{7}$$

Тогда валовые инвестиции I из (6) будут равны

$$I(t) = (1-s(t))(1-w)Y(t) = (1-a)(1-w)(1-s(t))X(t), \ t \in [t_0, T]. \tag{8}$$

Предположение 3. Суммарные скорость изменения капитала (чистые инвестиции) $J = \dot{K}(t)$ и амортизационные отчисления $A = \mu K(t)$ составляют валовые инвестиции $I(t)$:

$$\dot{K}(t) + \mu K(t) = I(t), \ \mu \equiv \text{const}, \ t \in [t_0, T], \tag{9}$$

где $\dot{K}(t) = dK(t)/dt$ — чистые инвестиции (прибыль), μ, $\mu \in (0,1)$, — норма амортизации капитала.

Предположение 4. Валовая продукция X удовлетворяет ограничению [3]:

$$0 \le X(t) \le F(K(t), L(t)), \ t \in [t_0, T]. \tag{10}$$

Трудовые ресурсы $L(t)$ являются экзогенной переменной, которая имеет постоянный темп роста η:

$$L(t) = L_0 e^{\eta(t-t_0)}, \ L_0 = \text{const}, \ t \in [t_0, T]. \tag{11}$$

Производственная функция $F(K, L)$ определена при всех неотрицательных значениях аргументов K и L и является дважды непрерывно дифференцируемой, монотонно возрастающей, вогнутой по каждой из переменных $K \ge 0$ и $L \ge 0$ [1]. Кроме того, функцию F будем считать однородной степени $\nu \in (0; 2)$ [4], т.е. для произвольного $\lambda > 0$ выполняется соотношение

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\nu} F(K, L), \ K, L > 0 \ \forall \lambda > 0. \tag{12}$$

Положив $\lambda = L^{-1}$, из (12) получим

$$F(K/L, 1) = f(K/L). \tag{13}$$

Новая функция f характеризует производительность труда (выпуск продукции на одного работника) и есть функцией капиталовооруженности (количество капитала на одного работника) $k = K/L$. Следствием неоклассических свойств [1] функции $F(K, L)$ являются неоклассические соотношения

$$f(0) = 0, \ f'(k) > 0, \ f''(k) < 0. \tag{14}$$

Детерминированная модель однопродуктовой макроэкономики роста с учетом соотношений (8)–(14) и равенства $\dot{K}/L = \dot{k} + \eta k$ имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{k}(t) + (\mu + \eta) k(t) = (1-a)(1-w)[1-s(t)]\, x(t), \\ 0 \le s(t) \le 1, \ 0 \le x(t) \le \Psi(t) f(k(t)), \ t \in [t_0, T], \end{gathered} \tag{15}$$

где $x = X/L$, $\Psi(t) = L_0^{\nu-1} e^{(\nu-1)\eta(t-t_0)}$.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим стохастическую модель однопродуктовой макроэкономики роста. Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t \subset \sigma$, $t \in [t_0, T]$, с множеством событий Ω и мерой (вероятностью) P, $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\omega \in \Omega$) — $\mathcal{F}_t$-измеримый стандартный винеровский процесс [5] с нулевым математическим ожиданием $M\xi(t) = 0$, $t \in [t_0, T]$.

На вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ задан случайный процесс $\{k(t) \equiv k(t, \omega), \omega \in \Omega, \ t \in [t_0, T]\}$. Управляемая стохастическая система описывается уравнением Ито [5]:

$$\begin{gathered} \dot{k}(t) + (\mu + \eta) k(t) = (1-a)(1-w)[1-s(t)]x(t) + n(t)\dot{\xi}(t), \\ 0 \le x(t) \le \Psi(t) f(k(t)), \ 0 \le s(t) \le 1, \ t \in [t_0, T], \ k(t_0) = k_0, \end{gathered} \tag{16}$$

где n — кусочно-непрерывная функция на $[t_0, T]$, $k_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$. Добавим к системе (16) ограничение на конечное состояние системы

$$k(T) \geq k_T. \tag{17}$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы из множества допустимых управлений

$$0 \leq s(t) \leq 1,\ 0 \leq x(t) \leq \Psi(t) f(k(t)),\ t \in [t_0, T] \tag{18}$$

выбрать такие управления s и x, которые максимизировали бы среднее интегральное дисконтируемое потребление

$$M \int_{t_0}^{T} e^{-\delta(t-\tau)} C(t)\, dt = L_0 (1-w)(1-a) M \int_{t_0}^{T} e^{(\eta-\delta)(t-t_0)} s(t) x(t)\, dt \to \max_{s,x}, \tag{19}$$

где $\delta = \mathrm{const} > 0$ — норма дисконта, M — математическое ожидание. Отметим, что в уравнение движения капиталовооруженности системы (16) входит производная от винеровского процесса $\xi(t)$ ($\dot{\xi}(t)$), которую следует понимать не в обычном смысле, а как обобщенную производную в обобщенном смысле, а функция $\dot{\xi}(t)$ также является обобщенной функцией.

В задаче (16)–(19) под траекторией понимается капиталовооруженность k, а под управлением — норма потребления s и валовая продукция x.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для исследования модели (16), (18), (19) без ограничения на конечное состояние системы (17) используем уравнение Беллмана [6]:

$$\inf_{x,s} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(t,k) + [-(\mu+\eta)k + (1-a)(1-w)(1-s)x] \frac{\partial}{\partial k} V(t,k) + \right.$$
$$\left. + 0{,}5 n^2(t) \frac{\partial^2}{\partial k^2} V(t,k) - L_0 (1-w)(1-a) e^{(\eta-\delta)(t-t_0)} sx \right\} = 0,\ V(T, k_T) = 0, \tag{20}$$

где $V(t,k)$ — цена управления и как функция она дважды непрерывно дифференцируемая по k и один раз по t при почти всех t из $[t_0, T]$.

Поскольку управление x и произведение управлений sx как переменные на уровне оптимизации задачи (20) считаются функционально независимыми, по управлению x выделим задачу оптимизации $(1-w)(1-a) \dfrac{\partial V}{\partial k} x \to \inf\limits_{x \in [0;\ \Psi(t) f(k)]}$, решением которой при выполнении неравенства $\partial V / \partial k < 0$ является магистральное управление валовой продукцией

$$x_{\text{м}}(t) = \Psi(t) f(k(t)). \tag{21}$$

Подставим (21) в уравнение Беллмана (20). После чего приравняем к нулю коэффициент при произведении управлений sx и получим дифференциальное уравнение для определения функции V: $\dfrac{\partial}{\partial k} V + L_0 e^{(\eta-\delta)(t-t_0)} = 0$.

Проинтегрировав по k это уравнение и использовав условие $V(T, k_T) = 0$, получим функцию V:

$$V(t,k) = -L_0 e^{(\eta-\delta)(t-t_0)} k + L_0 k_T e^{(\eta-\delta)(T-t_0)}. \tag{22}$$

Из (22) имеем неравенство $\partial V / \partial k < 0$, которое гарантирует существование соотношения (21).

Подставив (22) в уравнение Беллмана (20), получим уравнение для определения вспомогательной траектории $k_{\text{в}}$:

$$k_{\text{в}} = \frac{(1-w)(1-a)\Psi(t)}{\mu+\delta} f(k_{\text{в}}), \quad \dot{k}_{\text{в}}(t) = \frac{(1-w)(1-a)\dot{\Psi}(t) f(k_{\text{в}}(t))}{\mu+\delta-(1-w)(1-a)\Psi(t) f'(k_{\text{в}}(t))}. \quad (23)$$

Вспомогательная траектория $k_{\text{в}}(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$, является непрерывно дифференцируемой функцией и определяется из (23) одним из численных методов [7]. Отметим, что при $\nu = 1$ траектория $k_{\text{в}}$ будет статической. Определив $k_{\text{в}} \neq 0$ и подставив в уравнение динамики (16), получим при $k = k_{\text{в}}$ стохастическое управление нормой потребления

$$s(t) = 1-(1-w)^{-1}(1-a)^{-1}\psi^{-1}(t) f^{-1}(k_{\text{в}}(t)) \times$$
$$\times [\dot{k}_{\text{в}}(t) + (\mu+\eta)k_{\text{в}}(t) - n(t)\dot{\xi}(t)], \ t \in [t_0, T].$$

Тогда магистральное управление $s_{\text{м}}$ с использованием равенства для винеровского процесса [5]: $M\dot{\xi}(t) = (M\xi(t))^{\bullet} = 0$, $t \in [t_0, T]$, вычисляется по формуле

$$s_{\text{м}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } s(t) < 0, \\ 1, & \text{если } s(t) > 1, \\ s(t), & \text{если } 0 \le s(t) \le 1, \end{cases} \qquad t \in [t_0, T], \quad (24)$$

и является непрерывной функцией на $[t_0, T]$. Отметим, что при $\nu = 1$ магистральное управление $s_{\text{м}}$ — статическая величина.

Соответствующая стохастическая магистральная траектория (стохастическая магистраль) $k_{\text{м}}$ определяется из начальной стохастической задачи

$$\dot{k}_{\text{м}}(t) = -(\mu+\eta)k_{\text{м}}(t) + (1-w)(1-a)\Psi(t) \times$$
$$\times [1 - s_{\text{м}}(t)] f(k_{\text{м}}(t)) + n(t)\dot{\xi}(t), \ t \in [t_0, T], \quad (25)$$
$$k_{\text{м}}(t_0) = k_0.$$

Задачу (25) можно решить одним из численных методов [8–10]. Поскольку функция f — непрерывно дифференцируемая и вогнутая при $k > 0$, функция n — кусочно-непрерывная на $[t_0, T]$, а функция $s_{\text{м}}$ — непрерывная на $[t_0, T]$, то выполняется условие регулярности

$$f^2(k) + s_{\text{м}}^2(t) f^2(k) + n^2(t) \le \text{const}(1+k^2), \ k \ge 0, \ t \in [t_0, T],$$

которое гарантирует существование и единственность решения задачи (25) в смысле стохастической эквивалентности [8, 11, 12].

Проверим выполнение неравенства $Mk_{\text{м}}(T) \ge k_T$ для конечного состояния системы.

Если выполняется неравенство $Mk_{\text{м}}(T) \ge k_T$, то магистральные управления $s_{\text{м}}$ и $x_{\text{м}}$, а также соответствующая стохастическая и средняя магистрали являются оптимальным процессом задачи (16)–(19):

$$k_{\text{оп}}(t) = k_{\text{м}}(t), \ s_{\text{оп}}(t) = s_{\text{м}}(t), \ x_{\text{оп}}(t) = x_{\text{м}}(t), \ t \in [t_0, T]. \quad (26)$$

При $Mk_{\text{м}}(T) < k_T$ нужно построить правое управление $s_{\text{п}}$, соответствующую правую траекторию $k_{\text{п}}$ и правый момент переключения управления $\zeta_{\text{п}}$. Это означает, что найденная магистраль $k_{\text{м}}$ не удовлетворяет ограничению на конечное состояние (17) системы (16)–(19), т.е. не выполняется неравенство $Mk_{\text{м}}(T) \ge k_T$. Тогда на отрезке времени $[t_0, \zeta_{\text{п}}]$ ($\zeta_{\text{п}}$ — искомый момент времени) возьмем магистральное управление $s_{\text{м}}$ и соответствующую магистраль $k_{\text{м}}$, а на оставшемся отрезке времени $[\zeta_п, T]$ (правая часть отрезка времени $[t_0, T]$) определим управление $s_п$ (правое управление) и соответствующую траекторию $k_п$ (правую траекторию) таким образом, чтобы выполнилось ограничение на конечное состояние системы $Mk_м(T) = k_T$, если это возможно. При этом момент времени $\zeta_п$ (правый момент переключения управления) определяется из равенства средней магистрали $k_м$ и средней правой траектории $k_п$, т.е. из равенства $Mk_м(\zeta_п) = Mk_п(\zeta_п)$. Тогда объединяя два управления: $s_м$ и $s_п$, а также соответственно траектории $k_м$ и $k_п$ на $[t_0, T]$, получаем искомые управление s и соответствующую траекторию k для задачи (16)–(19), т.е. оптимальный процесс для этой задачи.

Правое управление. При выполнении неравенства $Mk_м(T) < k_T$ необходимо построить правое управление $s_п$ и соответствующую правую траекторию $k_п$. Причем правая траектория $k_п$ на $[\zeta_п, T]$ должна монотонно возрастать, т.е. должно выполняться стохастическое неравенство ($\dot{k}_п(t) > 0$, $t \in [\zeta_п, T]$):

$$-(\mu + \eta)k(t) + (1-w)(1-a)\Psi(t)(1-s(t)) f(k(t)) + n(t)\dot{\xi}(t) > 0 .$$

Это неравенство является основанием для определения правого управления $s_п$, которое можно получить из следующей задачи стохастического программирования:

$$\begin{gathered} \max\,(-z(t)), \\ -(\mu+\eta)k(t) + (1-a)(1-w)\Psi(t) f(k(t))(1-s(t)) + n(t)\dot{\xi}(t) \ge \varepsilon_0, \\ s(t) \ge 0, \;\; s(t) + z(t) = 1, \;\; z(t) \ge 0, \\ k_м(t) \le k \le k_T, \;\; t_0 \le t \le T, \end{gathered} \tag{27}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно малое заданное число.

Поскольку для винеровского процесса математическое ожидание от производной равно производной от математического ожидания [5]: $M\dot{\xi}(t) = (M\xi(t))^{\bullet}$, $t \in [t_0, T]$, а $M\xi(t) = 0$, $t \in [t_0, T]$, соответственно $M\dot{\xi}(t) = 0$.

Из стохастической задачи (27) согласно [13] имеем детерминированную задачу математического программирования для определения среднего правого управления $s_п$:

$$\begin{gathered} \max\,(-z(t)), \\ -(\mu+\eta)k(t) + (1-a)(1-w)\Psi(t) f(k(t))(1-s(t)) \ge \varepsilon_0, \\ s(t) \ge 0, \;\; s(t) + z(t) = 1, \;\; z(t) \ge 0, \\ Mk_м(t) \le k \le k_T . \end{gathered} \tag{28}$$

Если решение $s_п$ задачи (28) не существует, то это означает, что конечное состояние системы k_T недостижимо и нужно ослабить условия на исходную информацию системы (16)–(19). Пусть решение задачи нелинейного программирования (28) существует и, решив ее одним из численных методов [14], найдем правое управление $s_п(t)$, которое является непрерывной функцией на $[t_0, T]$. Тогда стохастическая правая траектория $k_п$ и правый момент переключения управления $\zeta_п$ определяются из решения задачи

$$\begin{gathered} \dot{k}(t) = -(\mu+\eta)k(t) + (1-w)(1-a)\Psi(t) s_п(t) f(k(t)) + \\ + n(t)\dot{\xi}(t), \;\; t \in [t_0, T], \;\; k(T) = k_T, \end{gathered} \tag{29}$$

$$k(\zeta_п) \in D_\varepsilon = \{k \in \mathbb{R} \mid Mk_м(t) - \varepsilon \le k(t) \le Mk_м(t) + \varepsilon, t \in [t_0, T]\},$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое заданное число.

Отметим, что задачу (29) можно решить одним из численных методов [8–10]. Поскольку $f(k \geq 0)$ — непрерывно дифференцируемая и вогнутая функция, а функции n — кусочно-непрерывная и $s_{\text{п}}$ — непрерывная на $[t_0, T]$, то выполняется условие регулярности

$$f^2(k) + s_{\text{п}}^2(t) f^2(k) + n^2(t) \leq \text{const}\,(1 + k^2),\ \ k \geq 0,\ \ t \in [t_0, T],$$

которое гарантирует существование и единственность решения задачи (29) в смысле стохастической эквивалентности [8, 11, 12]. Поскольку значение правого момента переключения $\zeta_{\text{п}}$ может вычисляться с большой погрешностью, то для более точного вычисления $\zeta_{\text{п}}$ необходимо решить задачу оптимального быстродействия.

Правый момент переключения управления. Для более точного определения $\zeta_{\text{п}}$ необходимо решить задачу оптимального быстродействия. Формализуем эту задачу. Обозначим $\tau_s(k)$ момент первого достижения множества D_ε системой (16) при $x(t) = \Psi(t) f(k)$, начинающей движение в обратном направлении оси t из конечного состояния системы $k = k_T$ при $t = T$.

Задача оптимального быстродействия заключается в выборе такого управления $s_{\text{п}}^*(t)$, при котором среднее время достижения D_ε движущейся точкой минимально

$$M\tau_{s_{\text{п}}^*}(k) = \min_{s_{\text{п}} \leq s \leq 1} M\tau_s(k). \tag{30}$$

Решим задачу оптимального быстродействия (16), (30). Запишем уравнение Беллмана [6]:

$$\inf_s \left\{ \frac{\partial}{\partial t} V(t,k) + [-(\mu+\eta)k + (1-a)(1-w)\Psi(t) f(k)(1-s)] \frac{\partial}{\partial k} V(t,k) + \right.$$

$$\left. + 0{,}5 n^2(t) \frac{\partial^2}{\partial k^2} V(t,k) - 1 \right\} = 0,\ \ t \in [t_0, T],\ \ s_{\text{п}} \leq s \leq 1,\ \ V(\zeta_{\text{п}}, Mk_{\text{м}}(\zeta_{\text{п}})) = 0, \tag{31}$$

где $s_{\text{п}}$ — решение задачи нелинейного программирования (28).

Из (31) определим правое управление $s_{\text{п}}^*$:

$$s_{\text{п}}^*(t) = \begin{cases} s_{\text{п}}, & \text{если } \dfrac{\partial}{\partial k} V < 0, \\ 1, & \text{если } \dfrac{\partial}{\partial k} V > 0,\ \ t \in [t_0, T]. \\ \text{произвольное из } [s_{\text{п}}, 1], & \text{если } \dfrac{\partial}{\partial k} V = 0, \end{cases} \tag{32}$$

Чтобы $s_{\text{п}}^*$ было равно $s_{\text{п}}$, необходимо выполнение неравенства $\partial V / \partial k < 0$. Поэтому функцию V будем искать в виде

$$V(t,k) = lk - lMk(\zeta_{\text{п}}),\ \ l < 0. \tag{33}$$

Подставим (33) в уравнение Беллмана (31) и положим $t = \zeta_{\text{п}}$, $k = Mk_{\text{м}}(\zeta_{\text{п}})$. В результате получим нелинейное алгебраическое уравнение для определения правого момента переключения управления $\zeta_{\text{п}}$:

$$l[-(\mu+\eta) Mk_{\text{м}}(\zeta_{\text{п}}) + (1-a)(1-w)\Psi(\zeta_{\text{п}}) \times$$

$$\times f(Mk_{\text{м}}(\zeta_{\text{п}}))(1 - s_{\text{п}}(\zeta_{\text{п}}))] - 1 = 0,\ \ \zeta_{\text{п}} \in (t_0, T), \tag{34}$$

которое можно решить одним из численных методов [7]. Причем выбором числа l можно добиться того, что $\zeta_{\text{п}} \in (t_0, T)$.

Правая траектория. Согласно найденному $\zeta_{\text{п}}$ соответствующая стохастическая правая траектория $k_{\text{п}}(t)$ определяется из начальной стохастической задачи

$$\dot{k}(t)+(\mu+\eta)k(t)=(1-a)(1-w)[1-s_{\text{п}}(t)]\psi(t)f(k(t))+n(t)\dot{\xi}(t), \tag{35}$$

$$t\in[\zeta_{\text{п}},T],\ k(\zeta_{\text{п}})=k_{\text{м}}(\zeta_{\text{п}}),$$

а средняя правая траектория определяется из задачи (35) при $n(t)=0$, $t\in[t_0,T]$, и начальном среднем условии $k(\zeta_{\text{п}})=Mk_{\text{м}}(\zeta_{\text{п}})$.

Оптимальный процесс. Запишем стохастический и средний оптимальный процесс задачи (16)–(19) $\{k_{\text{оп}}(t), s_{\text{оп}}(t), x_{\text{оп}}(t),\ t\in[t_0,T]\}$ [6]:

$$k_{\text{оп}}(t)=\begin{cases}k_{\text{м}}(t), & \text{если } t\in[t_0,\zeta_{\text{п}}),\\ k_{\text{п}}(t), & \text{если } t\in[\zeta_{\text{п}},T],\end{cases}\quad s_{\text{оп}}(t)=\begin{cases}s_{\text{м}}(t), & \text{если } t\in[t_0,\zeta_{\text{п}}),\\ s_{\text{п}}(t), & \text{если } t\in[\zeta_{\text{п}},T],\end{cases} \tag{36}$$

$$x_{\text{оп}}(t)=\psi(t)f(k_{\text{оп}}(t)),\ t\in[t_0,T].$$

Итак, экономическая система движется от $t=t_0$ до момента $t=\zeta_{\text{п}}$ по магистрали $k_{\text{м}}$ при магистральном управлении $s_{\text{м}}$, в момент правого переключения управления $t=\zeta_{\text{п}}$ сходит с магистрали и далее, до момента $t=T$, движется по правой траектории $k_{\text{п}}$ при правом управлении $s_{\text{п}}$. При этом оптимальная траектория $k_{\text{оп}}$ и оптимальное управление $x_{\text{оп}}$ являются кусочно-дифференцируемыми функциями, а оптимальное управление $s_{\text{оп}}$ — кусочно-непрерывной функцией на $[t_0,T]$.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОПРОДУКТОВОЙ МАКРОЭКОНОМИКИ РОСТА

Шаг 1. Вычислить магистральное управление $s_{\text{м}}(t)$, $t\in[t_0,T]$, по формуле (24) и соответствующую стохастическую и среднюю магистральную траекторию $k_{\text{м}}(t)$ из решения задачи (27).

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $Mk_{\text{м}}(T)\geq k_T$. Если оно выполняется, то рассчитать стохастический и средний оптимальный процесс задачи (16)–(19) по формулам $k_{\text{оп}}(t)=k_{\text{м}}(t)$, $s_{\text{оп}}(t)=s_{\text{м}}(t)$, $x_{\text{оп}}(t)=x_{\text{м}}(t)$.

Конец работы алгоритма.

При $Mk_{\text{м}}(T)<k_T$ вычислить правое управление $s_{\text{п}}$ из решения задачи нелинейного программирования (28). Переход к шагу 3.

Шаг 3. Вычислить стохастическую и среднюю правую траекторию $k_{\text{п}}(t)$ и правый момент переключения управления $\zeta_{\text{п}}$.

Шаг 4. Рассчитать стохастический и средний оптимальный процесс по формулам (36).

Конец работы алгоритма.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА МОДЕЛЬНОМ ПРИМЕРЕ

Исходные данные: $a=0{,}1$; $w=0{,}05$; $\mu=0{,}04$; $\eta=0{,}06$; $L_0=3$; $t_0=0$; $\nu=1{,}1$; $T=12$; $\delta=0{,}08$; $f(k)=2k^{0{,}6}$; $k_0=200$; $k_T=238{,}9792$.

Некоторые значения расчета среднего оптимального процесса приведены в табл. 1.

Магистраль и правая траектория вычислялись из соответствующих задач (25) и (35)

Таблица 1

Время, t	Значения оптимального управления	
	$k_{\text{оп}}$	$s_{\text{оп}}$
1	222,7803	0,0417
2	246,4568	0,0417
3	270,6839	0,0417
4	259,3059	0,2984
5	250,2120	0,3297
6	243,3588	0,3644
7	238,7425	0,4028
8	236,4033	0,4451
9	236,4323	0,4919
10	238,9792	0,5437
11	238,9793	0,5438
12	238,9793	0,5438

с использованием формул Рунге–Кутта с шагом $h = 0{,}1$ [8]. Задача нелинейного программирования (28) решалась методом Эрроу–Гурвица [14]. В результате расчета получили, что правый момент переключения $\zeta_{\text{п}} = 3{,}0008$.

Экономическая система движется по магистрали, в момент переключения $\zeta_{\text{п}} = 3{,}0008$ сходит с нее и движется до момента $T = 12$ по правой траектории. При этом на отрезке времени $[0; 3{,}0008]$ большая часть инвестиций вкладывается в накопление капитала (в среднем 95,83 %), а очень малая часть (в среднем 4,17 %) идет на потребление. На отрезке времени $[3{,}0008; 12]$ инвестиции распределяются почти поровну.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Магистральное и правое управления, а также правый момент переключения управления стохастической модели однопродуктовой макроэкономики роста носят детерминированный характер, а магистраль и правая траектория — стохастический.

2. Предложенная методика исследования стохастической задачи моделирования однопродуктовой макроэкономики роста дополняет методы математического моделирования, дает возможность повысить эффективность и достоверность прогнозирования и принятия решений для такого рода экономических процессов и систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 296 с.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 240 с.
3. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов и др.; Под ред. В.Ф. Кротова. — М.: Высш. шк., 1990. — 430 с.
4. Бойчук М.В., Бойчук В.М. Моделювання виробничих функцій за допомогою диференціальних моделей другого порядку // Наук. вісн. Буковинської держ. фін. акад.: Зб. наук. праць. — Чернівці: Технодрук, 2008. — Вип. 3, ч. І: Економічні науки. — С. 351–356.
5. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. — К.: Либідь, 1990. — 168 с.
6. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
7. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів. — Чернівці: Золоті литаври, 2005. — 396 с.
8. Юрченко І.В., Ясинська Л.І., Ясинський В.К. Методи стохастичного моделювання систем. — Чернівці: Прут, 2002. — 416 с.
9. Никитин Н.Н., Разевич В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1978. — **18**, № 1. — С. 106–117.
10. Мильштейн Г.Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применение. — 1975. — **20**, вып. 3. — С. 583–588.
11. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. — К.: Наук. думка, 1977. — 364 с.
12. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — К.: Наук. думка, 1977. — 348 с.
13. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.
14. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1986. — 320 с.

Поступила 27.02.2012