УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Е.М. ЕМЕЦ, Т.А. ПАРФЁНОВА, Т.В. ЧИЛИКИНА

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УСЛОВНЫХ ПОЛНОСТЬЮ КОМБИНАТОРНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, перестановки, метод ветвей и границ.*

ВВЕДЕНИЕ

Последние десятилетия быстро развиваются теория и методы дискретной и комбинаторной оптимизации, что обусловлено необходимостью получения практических результатов (в частности, [1–10]). Широкий класс задач евклидовой комбинаторной оптимизации составляют задачи условной полностью комбинаторной оптимизации на перестановках. Для этих задач и их отдельных постановок [4–10] получили развитие как точные, так и приближенные методы. При этом алгоритм метода ветвей и границ используется как в схемах точных методов [11, 12], так и в схемах получения приближенных решений названных задач оптимизации на перестановках [13–16].

Цель настоящей статьи — расширить для задач линейной оптимизации на перестановках методику оценивания допустимых множеств в методе ветвей и границ из [11, 12] и обосновать подход к ветвлению и отсечению в этом методе допустимых подмножеств в условных линейных полностью комбинаторных задачах оптимизации на перестановках.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим условную линейную полностью комбинаторную задачу минимизации на перестановках [4], т.е. задачу нахождения пары $\langle C(x^*), x^* \rangle$:

$$C(x^*) = \min_{x \in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \; ; \tag{1}$$

$$x^* = \arg \min_{x \in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \tag{2}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = b_j, \;\; i=1,2, \;\ldots,\; l; \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_j, \;\; i = l+1, \; l+2, \;\ldots, m; \tag{4}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_{kn}(G), \tag{5}$$

где $E_{kn}(G)$ — множество перестановок из действительных элементов мультимножества $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$, в которых n элементов разные; a_{ij}, b_j, c_j — заданные действительные числа для всех возможных в задаче индексов i и j, а k, m, n — заданные натуральные постоянные, $n \le k$, l — целая константа, $0 \le 1 \le m$.

Решая задачу (1)–(5) методом ветвей и границ (МВГ), необходимо давать оценку допустимых множеств D_i , $i=1,2,\ldots, p$, на которые разбито подмножество допустимых решений D, т.е. множеств D_i, имеющих следующие свойства:

$$D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_p = D \; ; \tag{6}$$

$$D_i \neq \varnothing \;\; \forall i \in J_p \; ; \tag{7}$$

$$D_i \cap D_j = \varnothing \;\; \forall i \neq j ; \; i, j \in J_p \; . \tag{8}$$

Здесь и далее $J_p = \{1, 2, \ldots, p\}$ обозначим множество первых p натуральных чисел.

Важно определить, какое из подмножеств D_i удовлетворяет (3)–(5) при выбранном ветвлении, поэтому условие (7) может проверяться в процессе ветвления или отсечения.

Как известно [17, 18], в задаче нахождения методом ветвей и границ

$$F(x^*) = \min_{x \in R^k} F(x) , \tag{9}$$

$$x^* = \arg \min_{x \in R^k} F(x) \tag{10}$$

при условии

$$x \in D \subset R^k , \tag{11}$$

где $F(x)$: $R^k \xrightarrow{F} R^1$, оценкой для множества D_i может быть число $v_i \in R^1$, которое имеет свойство $v_i \leq F(x) \;\; \forall x \in D_i, \;\; \forall i \in J_p$.

ВЕТВЛЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ В МВГ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ УСЛОВНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Рассмотрим подход к ветвлению и оцениванию в методе ветвей и границ в задаче (1)–(5). В условии (5) $x = (x_1, \ldots, x_k)$ является перестановкой чисел (вообще говоря, действительных) $g_1, \ldots, g_k$. Пусть, не ограничивая общности,

$$g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_k \; . \tag{12}$$

Множество D представляет множество точек $x \in R^k$, которые удовлетворяют условиям (3)–(5). Поэтому в качестве D_i, $i \in J_k$, можем рассмотреть множество

$$D_t^\tau = \Bigg\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k | x_\tau = g_t ; \; \sum_{j \in J_k \setminus \{\tau\}} a_{ij} x_j + a_{i\tau} g_t = b_i \;\; \forall i \in J_l ;$$
$$\sum_{j \in J_k \setminus \{\tau\}} a_{ij} x_j + a_{i\tau} g_t \leq b_i \;\; \forall i \in J_m \setminus J_l \Bigg\} , \; \tau \in J_k \; , \tag{13}$$

если оно не пустое.

Очевидно, что для D_t^τ и D_s^τ в представлении (13) выполняется свойство (8), а $\bigcup_{t=1}^{k} D_t^\tau = D$.

Множество $D_{i_1}^{\tau_1}$ вида (13), если оно содержит по крайней мере два элемента, можно разветвить на подмножества $D_{i_1 t}^{\tau_1 \tau_2}$, $t \in J_{k-1}$:

$$D_{i_1 t}^{\tau_1\tau_2} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k \,|\, x_{\tau_1} = g_{i_1}, x_{\tau_2} = g_t \;,\; \tau_1 \neq \tau_2 \;,\; t \neq i_1; \right.$$

$$\sum_{\forall j \in J_k \setminus \{\tau_1, \tau_2\}} a_{ij} x_j + a_{i\tau_1} g_{i_1} + a_{i\tau_2} g_t = b_i \quad \forall i \in J_l;$$

$$\left. \sum_{\forall j \in J_k \setminus \{\tau_1, \tau_2\}} a_{ij} x_j + a_{i\tau_1} g_{i_1} + a_{i\tau_2} g_t \le b_i \quad \forall i \in J_m \setminus J_l \right\}. \tag{14}$$

Очевидно, что для $D_{i_1 t}^{\tau_1\tau_2}$ и $D_{i_1 s}^{\tau_1\tau_2}$ в представлении (14) выполняется свойство (8), а $\bigcup_{t=1}^{k-1} D_{i_1 t}^{\tau_1\tau_2} = D_{i_1}^{\tau_1}$.

На $(r+1)$-м уровне, $r \le k-1$, аналогичного разбиения допустимого множства имеем

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_r t}^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r\tau_{r+1}} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k \,|\, x_{\tau_j} = g_{i_j} \;\; \forall j \in J_r \;; \right.$$

$$x_{\tau_{r+1}} = g_t \;,\; t \neq i_j \;,\; i_j \in J_k \;\; \forall j \in J_k \;;$$

$$\sum_{\forall j \in J_k \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}} a_{ij} x_j + \sum_{\forall j \in J_r} a_{i\tau_j} g_{i_j} = b_i \quad \forall i \in J_l;$$

$$\left. \sum_{\forall j \in J_k \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}} a_{ij} x_j + \sum_{\forall j \in J_r} a_{i\tau_j} g_{i_j} \le b_i \quad \forall i \in J_m \setminus J_l \right\}. \tag{15}$$

Кроме того, очевидно, что при $r = k-1$ (т.е. на k-м уровне разбиения) образуются исключительно одноэлементные множества.

Отметим, что мультимножество C называется разностью мультимножества A и его подмультимножества B (обозначаем $C = A - B$, где $B \subset A$), если основу $S(C)$ составляет

$$S(C) = \{x \,|\, x \in A \;,\; \text{если} \;\; k_A(x) > k_B(x)\} \;;$$

при этом кратность элемента в мультимножестве C определяется как

$$k_C(x) = k_A(x) - k_B(x) \;.$$

Теорема 1. Оценкой $\upsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}$ подмножества $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}$ из (15) в методе ветвей и границ может служить $\forall r \in J_k$ число

$$\upsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r} = \sum_{j=1}^{r} c_{\alpha_j} \bar{g}_j$$

при условии, что $c_i \ge 0$, $g_i \ge 0$ или $c_i \le 0$, $g_j \le 0$ $\forall i \in J_k$, где $\ge c_{\alpha_1} \ge c_{\alpha_2} \ge \ldots$ $\ldots \ge c_{\alpha_k}$; $\bar{g}_1 \le \bar{g}_2 \le \ldots \le \bar{g}_k$, а мультимножество $\overline{G} = \{g_{i_1}, g_{i_2} \ldots, g_{i_r}, 0, \ldots, 0\}$ имеет k элементов: $|\overline{G}| = k$, $\bar{g}_j \in G$ $\forall j \in J_k$.

Доказательство. Согласно определению оценки следует показать, что

$$\sum_{j=1}^{r} c_{\alpha_j} \bar{g}_j \le \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_k) \in D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r} .$$

Пусть коэффициенты целевой функции упорядочены так: $c_{\alpha_1} \geq .. \geq c_{\alpha_p} \geq$ $\geq c_{\alpha_{p+1}} \geq \ldots \geq c_{\alpha_k}$.

При построении подмножество $D^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ определяет мультимножество G_B согласно условию (15): $G_B = \{g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}\}$. Найдем сумму мультимножества G_B и мультимножества, состоящего из $s = k - r$ нулей. Результат (сумма) совпадает с заданным в теореме мультимножеством $\overline{G} = \{\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_k\}$, где, не нарушая общности, можно считать, что имеет место упорядочение $\overline{g}_1 \leq \overline{g}_2 \leq \ldots \leq \overline{g}_k$.

Как известно [4, теорема 3.1],

$$\min_{x \in E_{k\nu}(\overline{G})} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j = \sum_{j=1}^{k} c_{\alpha_j} \overline{g}_j , \tag{16}$$

где $E_{k\nu}(\overline{G})$ — множество перестановок из элементов мультимножества $\overline{G}$, а ν — количество элементов основы $S(\overline{G})$ мультимножества $\overline{G}$: $\nu = | S(\overline{G}) |$. Заметим, что сумма части неотрицательных по условию теоремы слагаемых из (16) меньше суммы всех слагаемых:

$$\sum_{j=1}^{r} c_{\alpha_j} \overline{g}_j \leq \sum_{j=1}^{k} c_{\alpha_j} \overline{g}_j . \tag{17}$$

Отметим, что из формулы (16), которая дает минимум на множестве $x \in E_{k\nu}(\overline{G})$ целевой функции $\sum_{j=1}^{k} c_j x_j$, следует неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} c_{\alpha_j} \overline{g}_j \leq \sum_{j=1}^{r} c_{\tau_j} g_{i_j} = \sum_{j=1}^{r} c_{\tau_j} g_{i_j} + \sum_{j=r+1}^{k} c_{\tau_j} \overline{g}_{i_j} = \sum_{j=1}^{k} c_{\tau_j} \overline{g}_{i_j}, \tag{18}$$

поскольку правая его часть представляет значение той же целевой функции на некотором векторе, не обязательно являющимся минималью (в последнем слагаемом для $j = r+1,\ r+2, \ldots, k$ сомножители $\overline{g}_{i_j}$ являются нулями из $\overline{G} - G_B$, а $\{c_{\tau+1}, \ldots, c_{\tau_k}\} = \{c_1, \ldots, c_k\} - \{c_{\tau_1}, \ldots, c_{\tau_r}\}$; $\{\overline{g}_{i_{\tau+1}}, \ldots, \overline{g}_{i_k}\} = \overline{G} - G_B$).

Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{k} c_{\tau_j} \overline{g}_{i_j} \leq \sum_{j=1}^{k} c_{\tau_j} g_{i_j}, \tag{19}$$

где $\{g_{i_{\tau+1}}, \ldots, g_{i_k}\} = G - G_B$, поскольку по условию теоремы слагаемое вида $c_i g_i \geq 0\ \forall i \in J_k \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$, $\forall j \in J_k \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$, а в левой части (18) они нулевые, все остальные слагаемые в правой и левой частях (19) попарно одинаковы. Далее заметим, что

$$\sum_{j=1}^{k} c_{\tau_j} g_{i_j} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \quad \forall x \in D^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_\tau}$$

по построению множества согласно (15). Из (17)–(19) следует, что $\nu^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ представляет оценку в МВГ подмножества $D^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Оценкой $\nu^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ множества $D^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ из (15) в методе ветвей и границ может быть $\forall r \in J_k$ число

$$\sum_{j=1}^{r} c_{\tau_j} g_{i_j} = \nu^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r} , \tag{20}$$

если выполняются условия $c_i \ge 0$ и $g_j \ge 0$ или $c_i \le 0$ и $g_j \le 0$ $\forall i \in J_k \setminus$ $\setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$; $j \in J_k \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Для доказательства теоремы используем равенство (18) и неравенство (19). В результате получаем $\nu^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r} \le \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \ \forall x = (x_1, \ldots, x_k) \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$, что и требовалось доказать.

Пусть $G_B = \{g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_r}\}$ (g_{i_j} определены в (15)) и $\widetilde{G} = G - G_B = \{\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2, \ldots$ $\ldots, \widetilde{g}_s\}$, где $s = k - r$, при следующей нумерации элементов в мультимножестве $\widetilde{G}$:

$$\widetilde{g}_{i_1} \le \widetilde{g}_{i_2} \le \ldots \le \widetilde{g}_{i_s}. \tag{21}$$

Обозначим $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$, $C_B = \{c_{\tau_1}, c_{\tau_2}, \ldots, c_{\tau_r}\}$, $\widetilde{C} = C - C_B = \{\widetilde{c}_{i_1}, \widetilde{c}_{i_2}, \ldots$ $\ldots, \widetilde{c}_{i_s}\}$, причем, не нарушая общности, можно считать

$$\widetilde{c}_{i_1} \ge \widetilde{c}_{i_2} \ge \ldots \ge \widetilde{c}_{i_s}. \tag{22}$$

Теорема 3. Оценкой множества $D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$ из (15) в методе ветвей и границ может быть величина

$$\xi^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r} = \nu^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r} + \sum_{j=1}^{s} \widetilde{c}_{i_j} \widetilde{g}_{i_j}, \tag{23}$$

где $s = k - r$; $\widetilde{c}_{i_j}$ и $\widetilde{g}_{i_j}$ удовлетворяют условиям (22) и (21) соответственно, величина $\nu^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$ вычисляется по формуле (20).

Замечание к теореме 3. При вычислении величины (20) для использования в (23) не обязательно выполнение условия теоремы 2: $c_i g_j \ge 0$ или $c_i \le 0$, $g_j \le 0$ $\forall i \in J_k \setminus (\tau_1, \ldots, \tau_r)$; $j \in J_k \setminus (i_1, \ldots, i_r)$.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства того, что величина (23) является оценкой для $D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$, нужно доказать следующее:

$$\xi^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r} \le \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \quad \forall (x_1, \ldots, x_k) \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}. \tag{24}$$

Подставив в (24) выражения из (20) и (23), получим

$$\sum_{j=1}^{r} c_{\tau_j} g_{i_j} + \sum_{j=1}^{s} \widetilde{c}_{i_j} \widetilde{g}_{i_j} \le \sum_{j=1}^{k} c_j x_j. \tag{25}$$

Из формул (15) имеем $x_{\tau_j} = g_{i_j}$ $\forall j \in J_r$, $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1 i_2\ldots i_r}$, т.е. правая часть (25) содержит первую сумму из левой части (25), эти суммы взаимно уничтожаются. Из (25) в результате получаем неравенство

$$\sum_{j=1}^{s} \widetilde{c}_{i_j} \widetilde{g}_{i_j} \le \sum_{j \in J_k \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}} c_j x_j. \tag{26}$$

Координаты x_j из (26), объединенные в вектор $\widetilde{x} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_s})$, являются некоторой перестановкой элементов мультимножества $\widetilde{G}$, т.е. $\widetilde{x} \in E(\widetilde{G})$, где $E(\widetilde{G})$ — множество всех таких перестановок.

Как известно [4],

$$\min_{\widetilde{x}\in E(\widetilde{G})} \sum_{j\in J_k\setminus\{\tau_1,\ldots,\tau_r\}} c_j x_j = \sum_{j=1}^{s} \widetilde{c}_{i_j} \widetilde{g}_{i_j}, \tag{27}$$

что согласно определению минимума и доказывает неравенство (26), а следовательно, и (23). Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Отметим, что величину (20) в выражении (23) можно определить следующим образом: $\nu^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1i_2\ldots i_r} = \nu^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_{r-1}}_{i_1i_2\ldots i_{r-1}} + c_{\tau_r} g_{i_r}$.

НОВЫЕ ПРАВИЛА ОТСЕЧЕНИЯ

Рассмотрим предлагаемую методику отсечения.

Известно, что основным правилом отсечения непустых подмножеств D_i допустимого множества D в МВГ (см., например [17, 18]) является отсечение при выполнении неравенства $\nu \ge F_0$, $F_0 = F(x_0)$, $x_0 \in D$, где ν —оценка характеризуемого подмножества D_i, которая не меньше текущего рекорда минимального значения целевой функции F_0.

Пусть задача (1)–(5) имеет ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{k_\alpha} \alpha_j x_{i_j} \le \alpha_0; \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{k_\beta} \beta_j x_{i_j} \ge \beta_0; \tag{29}$$

$$\sum_{j=1}^{k_\gamma} \gamma_j x_{i_j} = \gamma_0, \tag{30}$$

где $\alpha_j \ne 0$, $\beta_j \ne 0$, $\gamma_j \ne 0$; $k_\alpha \le k$; $k_\beta \le k$; $k_\gamma \le k$, и решается методом ветвей и границ, которым образовано подмножество допустимых решений $D^{\tau_1\tau_2\ldots\tau_r}_{i_1i_2\ldots i_r}$. Пусть также выполняется условие (21), а также следующие условия:

$$\overline{\alpha}_1 \ge \overline{\alpha}_2 \ge \ldots \ge \overline{\alpha}_{s_\alpha} > 0 > \overline{\alpha}_{s_\alpha+1} \ge \ldots \ge \overline{\alpha}_{k_\alpha},\ s_\alpha \in J_k^0, \tag{31}$$

$$\overline{\beta}_1 \ge \ldots \ge \overline{\beta}_{s_\beta} > 0 > \overline{\beta}_{s_\beta+1} \ge \ldots \ge \overline{\beta}_{k_\beta},\ s_\beta \in J_k^0, \tag{32}$$

$$\overline{\gamma}_1 \ge \ldots \ge \overline{\gamma}_{s_\gamma} > 0 > \overline{\gamma}_{s_{\gamma+1}} \ge \ldots \ge \overline{\gamma}_{k_\gamma},\ \mathrm{s}_\gamma \in J_k^0, \tag{33}$$

где мультимножества $\overline{A} = \{\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{k_\alpha}\}$ и $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_\alpha}\}$; $\overline{B} = \{\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{k_\beta}\}$ и $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_{k_\beta}\}$; $\overline{\Gamma}\{\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_{k_\gamma}\}$ и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_\gamma}\}$ попарно равны: $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, $\overline{\Gamma} = \Gamma$, а $J_k^0 = J_k \cup \{0\}$.

Теорема 4. Если

$$\alpha_0 \notin [\alpha_{\min}; \alpha_{\max}] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{s_\alpha} \overline{\alpha}_j \widetilde{g}_{i_j} + \sum_{j=1}^{k_\alpha - s_\alpha} \overline{\alpha}_{s_\alpha} \widetilde{g}_{i_{s-r_\alpha+j}}; \sum_{j=1}^{s_\alpha} \overline{\alpha}_j \widetilde{g}_{i_{s_{-j+1}}} + \sum_{j=1}^{k_\alpha - s_\alpha} \overline{\alpha}_{s_\alpha+j} \widetilde{g}_{i_{r_\alpha}-j+1}\right], \tag{34}$$

где $r_\alpha = k_\alpha - s_\alpha$;

$$\alpha_0 < \alpha_{\min}; \tag{35}$$

или если

$$\beta_0 \notin [\beta_{\min}; \beta_{\max}] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{s_\beta} \overline{\beta}_j \widetilde{g}_{i_j} + \sum_{j=1}^{k_\beta - s_\beta} \overline{\beta}_{s_\beta} \widetilde{g}_{i_{s-r_\beta+j}} ; \sum_{j=1}^{s_\beta} \overline{\beta}_j \widetilde{g}_{i_{s-j+1}} + \sum_{j=1}^{k_\beta - s_\beta} \overline{\beta}_{s_\beta + j} \widetilde{g}_{i_{r_\beta} - j+1} \right], \quad (36)$$

где $r_\beta = k_\beta - s_\beta$;

$$\beta_0 > \beta_{\max}; \quad (37)$$

или если

$$\gamma_0 \notin [\gamma_{\min}; \gamma_{\max}] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{s_\gamma} \overline{\gamma}_j \widetilde{g}_{i_j} + \sum_{j=1}^{k_\gamma - s_\gamma} \overline{\gamma}_{s+j} \widetilde{g}_{i_{s-r_\gamma+j}} ; \sum_{j=1}^{s_\gamma} \overline{\gamma}_j \widetilde{g}_{i_{s-j+1}} + \sum_{j=1}^{k_\gamma - s_\gamma} \overline{\gamma}_{s_\gamma + j} \widetilde{g}_{i_{r_\gamma} - j+1} \right], \quad (38)$$

где $r_\gamma = k_\gamma - s_\gamma$, то множество $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ является пустым.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 3.1 из [4], согласно которой находятся минимумы и максимумы левых частей (28)–(30) соответственно на множествах размещений по $k_\alpha, k_\beta, k_\gamma$ элементов из мультимножества $\widetilde{G} = \{\widetilde{g}_{i_1}, \widetilde{g}_{i_2}, \ldots, \widetilde{g}_{i_s}\}$ при условии (21) и условиях (31)–(33). Левыми концами в интервалах, которые фигурируют в (34), (36), (38), являются найденные таким образом соответственно минимумы, а правыми концами этих интервалов — соответственно максимумы.

Выполнение одного из условий (35), (37), (38) означает, что ни на одном из наборов переменных, еще не определенных на множестве допустимых решений $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$, соответствующее из ограничений (28)–(30) не выполняется, т.е. $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r} = \varnothing$, что и требовалось доказать.

Замечание к теореме 4. Если равенство (30) превращается в $x_i = \gamma_0$, неравенство (29) — в $x_i \ge \beta_0$, а (28) — в $x_i \le \alpha_0$, то следует проверить существование элементов $x_i = g_j \in \widetilde{G}$, удовлетворяющих соответствующему ограничению (28)–(30) в таком случае.

Теорема 4 определяет одно из возможных правил отсечения вершин (назовем его правилом отсечения 1), о которых известно, что они не содержат допустимых решений.

Правило отсечения 2. Если при проверке ограничений вида (28)–(30) для подмножества $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ переменной x_j возможно принять только значение $g_t \in \widetilde{G}$, тогда подмножество ветвится однозначно до $D_{i_1 i_2 \ldots i_r t}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r j}$. Все остальные еще не рассмотренные подмножества $D_{i_1 i_2 \ldots i_r + 1}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_{r+1}}$, где $\tau_{r+1} \ne j$; $i_{r+1} \ne t$ отсекаются как пустые.

Правило отсечения 3. Если при применении теоремы 4 получено $\alpha_0 = \alpha_{\min}$ или $\beta_0 = \beta_{\max}$, или $\gamma_0 = \gamma_{\min}$, или $\gamma_0 = \gamma_{\max}$, то это означает, что подмножество $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ ветвится до одноэлементного подмножества, в котором не найденные еще переменные принимают значения, определяемые равенствами, в которые преобразуются ограничения (28)–(30) соответственно. Все остальные подмножества более низких уровней, чем уровень множества $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$, которые являются его подмножествами и еще не проанализированы, отсекаются как пустые.

Как видно из примера и иллюстрации (см. рис. 1–3) его решения, оценки допустимого подмножества увеличиваются (не уменьшаются) при движении по схеме вниз на одном уровне, который имеется в одном подмножестве, либо вправо или вправо и вниз: от корня дерева D к «листьям» по ветвям. Случайно ли это для данного примера? Оказывается, что нет. Об этом свидетельствует следующая теорема.

Теорема 5. Если для элементов мультимножества G выполняется условие (12), для коэффициентов целевой функции — упорядоченность

$$c_{\tau_1} \geq c_{\tau_2} \geq \ldots \geq c_{\tau_k}, \tag{39}$$

а допустимые подмножества $D^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1\ i_2 \ldots i_q}$ $(q \in \{j, i_r\})$, $D^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r \tau_{r+1} \ldots \tau_{r+\chi}}_{i_1\ i_2 \ldots i_r\ i_{r+1} \ldots i_{r+\chi}}$ задачи (1)–(5) в МВГ определяются согласно (13)–(15), то между их оценками существуют соотношения

$$\xi^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r} \leq \xi^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r \tau_{r+1} \ldots \tau_{r+\chi}}_{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_{r+\chi}}, \ r+\chi \leq k \ \ \forall r \in J_{k-1}, \ \forall \chi \in J^0_{k-1}; \tag{40}$$

$$\xi^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r} \leq \xi^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_{r-1} \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1} j}, \ r \in J_{k-1}, \ j \in \{i_{r+1}, \ldots, i_k\}. \tag{41}$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из формул вида (20), (23), (27), которые применяются к левым и правым частям соотношений (40), (41).

Замечание. Теорема позволяет не рассматривать (отсекать) подмножества, оценки для которых находятся в правых частях (40), (41), если есть подмножество с оценкой $\xi^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r} \geq F_0$. При этом $\tau_1, \ldots, \tau_r$ определяют в соответствии с (39), а g_{i_j} при формировании подмножеств согласно (15) выбирают в соответствии с порядком (12), используя для определения очередной координаты из G элемент с наименьшим (в соответствии с (12)) возможным номером.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример. Найти минимум функции $2x_1 - 4x_2 + x_4 + 5x_5$ при следующих условиях:

1) $x_1 + 2x_2 - x_4 = -7$;
2) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10$;
3) $x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 2$;
4) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in E_{55}(G)$, где $G = \{-2, 1, 0, 3, 5\}$.

При ветвлении множества допустимых решений используем тот порядок переменных, который соответствует такой упорядоченности коэффициентов целевой функции: $c_{\tau_1} \geq c_{\tau_2} \geq \ldots \geq c_{\tau_k}$. Имеем упорядоченность $c_5 = 5 \geq c_1 = 2 \geq c_4 = 1 \geq$ $\geq c_3 = 0 \geq c_2 = -4$. Следовательно, порядок определения переменных в дереве выберем так: x_5, x_1, x_4, x_3, x_2, а порядок использования подходящих значений переменных из G определим согласно (12), т.е. $g_1 = -2$; $g_2 = 0$; $g_3 = 1$; $g_4 = 3$; $g_5 = 5$.

Следовательно, для первой вершины дерева $x_5 = -2$; образуем D^5_1; получаем $\widetilde{C} = \{2, 1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{0, 1, 3, 5\}$. Определим оценку $\xi^5_1 = 5 \cdot (-2) + (2 \cdot 0 +$ $+ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-4) \cdot 5) = -10 + 1 - 20 = -29$. Дерево ветвления с оценками вершин и значениями целевых функций приведено на рис. 1–3.

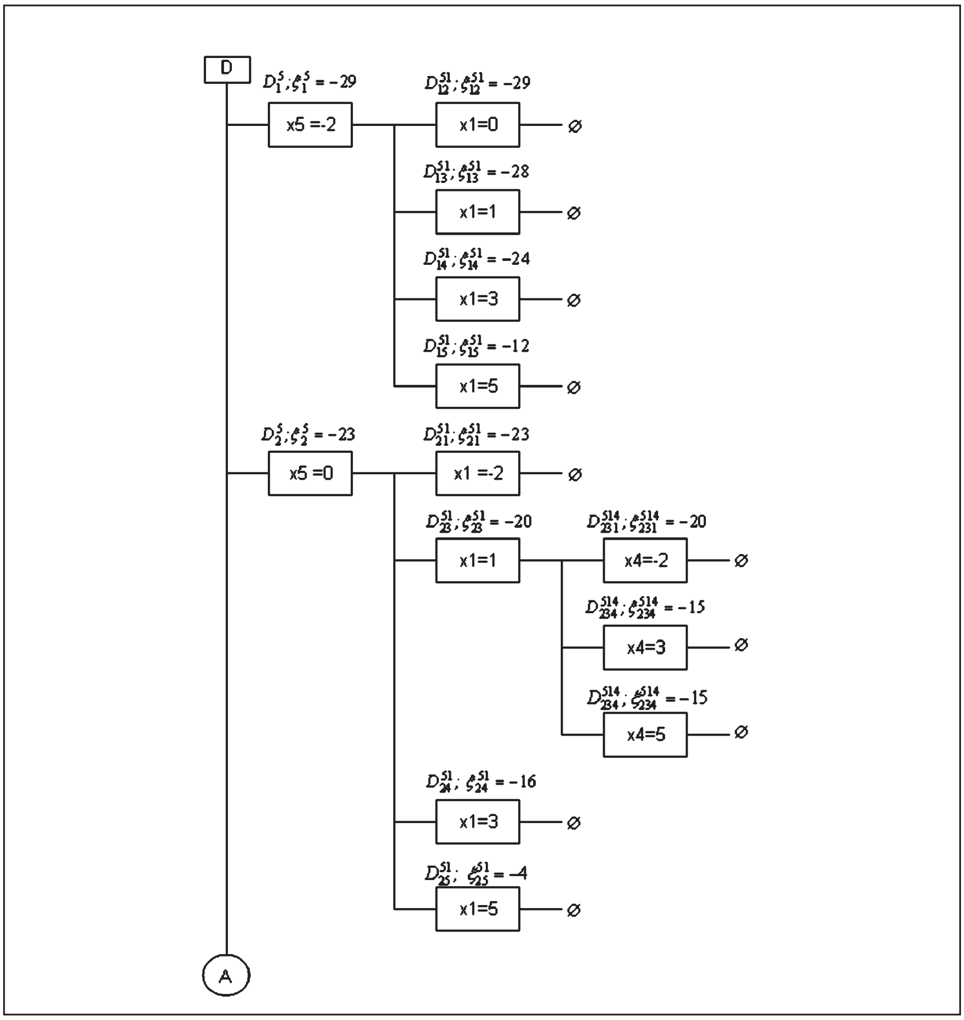

Рис. 1

Проверим для D_1^5 теорему 4. Имеем ограничения:

1) $x_1 + 2x_2 - x_4 = -7$;

2) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 10$;

3) $x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 0$.

Для каждого из них проверяем условия теоремы 4:

1) $\gamma_{\min} =$

$= \min\limits_{(x_1, x_2, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_2 - x_4) =$

$= 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 = -19$,

$\gamma_{\max} =$

$= \max\limits_{(x_1, x_2, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_2 - x_4) =$

$= 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 = 13$,

$\gamma_0 = -7 \in [-19; 13]$;

$\gamma_0 \in [\gamma_{\min}; \gamma_{\max}]$;

2) $\alpha_{\min} =$

$= \min\limits_{(x_1, x_2, x_3) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 - 2x_2 + 3x_3) =$

$= 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = -9$,

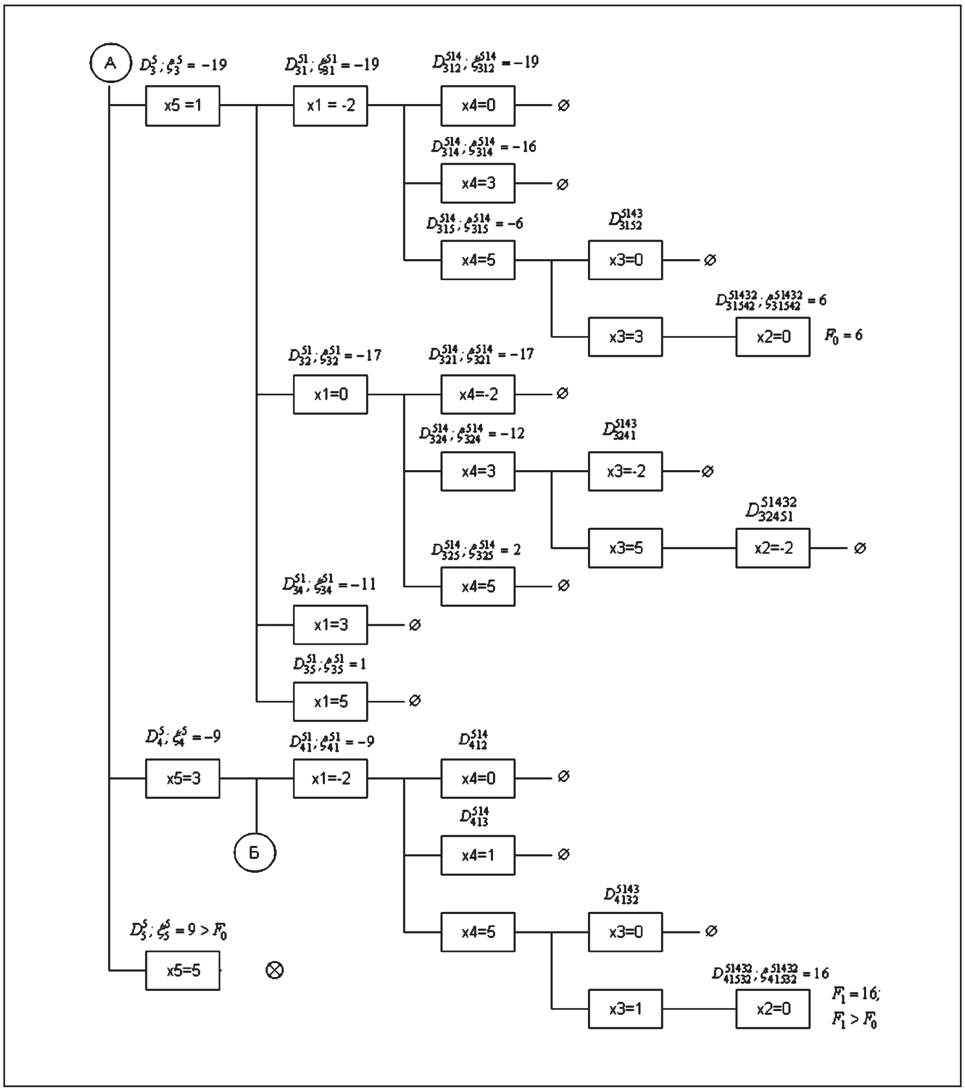

Рис. 2

$\alpha_0 = 10 > \alpha_{\min} = -9$; следовательно, нет оснований утверждать, что $D_1^5 = \varnothing$;

3) $\beta_{\max} = \max\limits_{(x_1, x_3, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_3 + x_4) = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 14$, $\beta_0 = 0 < 14 = \beta_{\max}$;

следовательно, нет оснований считать, что $D_1^5 = \varnothing$.

Ветвим на первом уровне «вглубь», т.е. $x_1 = 0$, имеем D_{12}^{51}, $\widetilde{C} = \{1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G} = \{1,\ 3,\ 5\}$. Определяем оценку $\xi_{12}^{51} = 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-4) \cdot 5) = -29.$

Ограничения приобретают следующий вид: $2x_2 - x_4 = -7$; $-2x_2 + 3x_3 \le 10$; $2x_3 + x_4 \ge 0$. Применяем теорему 4: $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = -3$; $-7 = \gamma_0 < \gamma_{\min}$; следовательно, $\gamma_0 \notin [\gamma_{\min}; \gamma_{\max}]$; $D_{12}^{51} = \varnothing$.

Ветвим на втором уровне «вширь», т.е. $x_1 = 1$; образуем D_{13}^{51}; $\widetilde{C} = \{1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G} = \{0,\ 3,\ 5\}$. Определяем оценку $\xi_{13}^{51} = = 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-4) \cdot 5) = -28$. Получаем ограничения для D_{13}^{51}:

1) $2x_2 - x_4 = -8$;
2) $-2x_2 + 3x_3 \le 0$;
3) $2x_3 + x_4 \ge -1$.

Применяем теорему 4:

$$\gamma_{\min} = \min_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) =$$

$$= 2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = -5;$$

$$-8 = \gamma_0,\ \gamma_{\min} = -5,\ \gamma_0 < \gamma_{\min};$$

значит, выполнено условие (38); следовательно, $D_{13}^{51} = \varnothing$.

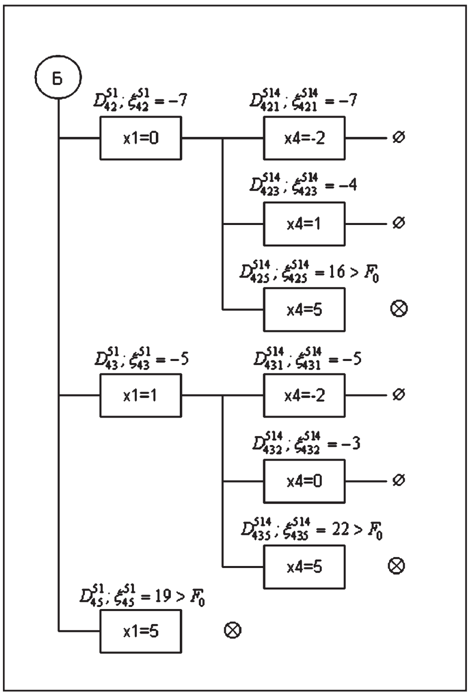

Рис. 3

Ветвим на втором уровне «вширь», задав $x_1 = 3$, образуем D_{14}^{51}; $\widetilde{C} = \{1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G} = \{0,\ 1,\ 5\}$. Определяем $\xi_{14}^{51} = -10 + 2 \cdot 3 + (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-4) \cdot 5) = -24$. Для D_{14}^{51} ограничения приобретают вид: 1) $2x_2 - x_4 = -10$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 7$; 3) $2x_3 + x_4 \ge -3$. Применим теорему 4: $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = -5$; $\gamma_0 = -10 < \gamma_{\min} = -5$; следовательно, согласно (38) $D_{14}^{51} = \varnothing$.

Ветвим «вширь», задав $x_1 = 5$; образуем последнее множество D_{14}^{51} этого уровня из D_1^5 (поскольку выбираем $g_k = g_5 = 5$); $\widetilde{C} = \{1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{0,\ 1,\ 3\}$. Определяем оценку: $\xi_{15}^{51} = -10 + 2 \cdot 5 + (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-4) \cdot 3) = -12$. Для D_{15}^{51} ограничения задачи приобретают вид: 1) $2x_2 - x_4 = -12$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 5$; 3) $2x_3 + x_4 \ge -5$. Применим теорему 4: $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3$; $\gamma_0 = -12 < < -3 = \gamma_{\min}$. Следовательно, согласно (38) $D_{15}^{51} = \varnothing$.

Возвращаемся на первый уровень и продолжаем его ветвить «вширь», образуя D_2^5, положив $x_1 = 0 = g_2$. Образуем $\widetilde{C} = \{2,\ 1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 1, 3, 5\}$. Определяем оценку: $\xi_2^5 = 5 \cdot 0 + (2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-4) \cdot 5) = -23$.

Для D_2^5 ограничения приобретают вид: 1) $x_1 + 2x_2 - x_4 = -7$; 2) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 10$; 3) $x_1 + 2x_3 + x_4 \ge 2$. Проверим теорему 4:

1) $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_1, x_2, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_2 - x_4) = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = -8$,

$\gamma_{\max} = \max\limits_{(x_1, x_2, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_2 - x_4) = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) = 15$;

$-7 = \gamma_0 \in [-8;\ 15]$;

2) $\alpha_{\min} = \min\limits_{(x_1, x_2, x_3) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 - 2x_2 + 3x_3) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = -4$;

$\alpha_0 = 10 > \alpha_{\min}$;

3) $\beta_{\max} = \max\limits_{(x_1, x_3, x_4)\in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_3 + x_4) = 2\cdot 5 + 1\cdot 3 + 1\cdot 1 = 14;\ \beta_0 = 2 < 14 = \beta_{\max}$.

Следовательно, ни по одному ограничению нет оснований утверждать, что вершина $D_2^5 = \varnothing$. Значит, ее можно ветвить.

Ветвим «вглубь», образуем D_{21}^{51}, задав $x_1 = -2$. Имеем $\widetilde{C} = \{1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G} = \{1,\ 3,\ 5\}$. Найдем $\xi_{21}^{51} = 0 + 2\cdot(-2) + (1\cdot 1 + 0\cdot 3 + (-4)\cdot 5) = -23$.

Для множества допустимых решений D_{21}^{51} имеем ограничения: 1) $2x_2 - x_4 = -5$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 12$; 3) $2x_3 + x_4 \ge 4$. Применим теорему 4, чтобы определить возможность отсечения D_{21}^{51}: $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4)\in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 5 = -3$; $\gamma_0 = 5 > \gamma_{\min} = -3$. Следовательно, согласно теореме 4 (условие (38)) D_{21}^{51} отсекается как пустое множество.

Образуем D_{23}^{51}, задав $x_1 = 1$. Получим $\widetilde{C} = \{1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2,\ 3,\ 5\}$. Найдем $\xi_{23}^{51} = 0 + 2\cdot 1 + (1\cdot(-2) + 0\cdot 3 + (-4)\cdot 5) = -20$. Для D_{23}^{51} имеем ограничения: 1) $2x_2 - x_4 = -8$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 9$; 3) $2x_3 + x_4 \ge 1$. Проверяем выполнение теоремы 4:

1) $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4)\in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 5 = -9$,

$\gamma_{\max} = \max\limits_{(x_2, x_4)\in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2\cdot 5 + (-1)\cdot(-2) = 12$,

$\gamma_0 = -8 \in [\gamma_{\min}; \gamma_{\max}] = [-9; 12]$;

2) $\alpha_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_3)\in E_{33}^2(\widetilde{G})} (-2x_2 + 3x_3) = 3\cdot(-2) + (-2)\cdot 5 = -16$, $\alpha_0 = 9 > \alpha_{\min} = -16$;

3) $\beta_{\max} = \max\limits_{(x_3, x_4)\in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_3 + x_4) = 2\cdot 5 + 1\cdot 3 = 13$, $\beta_0 = 1 < \beta_{\max} = 13$.

Следовательно, нет оснований утверждать, что D_{23}^{51} отсекается.

Образуем D_{231}^{514}, задав $x_4 = -2$. Имеем $\widetilde{C} = \{0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{3,\ 5\}$. Найдем $\xi_{231}^{514} = 2 + 1\cdot(-2) + (0\cdot 3 + (-4)\cdot 5) = -20$. Ограничения для D_{231}^{514} приобретают вид: 1) $2x_2 = -10$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 9$; 3) $2x_3 \ge 3$. Ограничение 1 означает, что $x_2 = -5 \notin \widetilde{G}$, т.е. $D_{231}^{514} = \varnothing$.

Задав $x_4 = 3$, образуем D_{234}^{514}; получим $\widetilde{C} = \{0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 5\}$. Определим $\xi_{234}^{514} = 2 + 1\cdot 3 + (0\cdot(-2) + (-4)\cdot 5) = -15$. Ограничения для D_{234}^{514} имеют вид: 1) $2x_2 = -5$; $x_2 = -\dfrac{5}{2} \notin \widetilde{G}$; следовательно, $D_{234}^{514} = \varnothing$.

Задав $x_4 = 5$, образуем D_{235}^{514}; получим $\widetilde{C} = \{0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 3\}$. Найдем $\xi_{235}^{514} = -1$. Ограничения для подмножества имеют вид: 1) $2x_2 = -3$; $x_2 = -\dfrac{3}{2} \notin \widetilde{G}$; следовательно, $D_{235}^{514} = \varnothing$.

Возвращаемся на второй уровень, задав $x_1 = 3$; образуем D_{24}^{51}; получаем $\widetilde{C} = \{1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 1, 5\}$. Найдем $\xi_{24}^{51} = -16$.

Образуем ограничения для D_{24}^{51}: 1) $2x_2 - x_4 = -10$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 7$; 3) $2x_3 + x_4 \ge -1$. Применим к ним правило отсечения 1 (теорему 4):

$$\gamma_{\min} = \min_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 5 = -9,$$

$$\gamma_{\max} = \max_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2\cdot 5 + (-1)\cdot(-2) = 12, \ \gamma_0 \notin [\gamma_{\min}; \gamma_{\max}];$$

следовательно, по правилу 1 вершина D_{24}^{51} отсекается, поскольку она пуста.

Задав $x_1 = 5$, образуем D_{25}^{51}; получаем $\widetilde{C} = \{1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{2, 1, 3\}$. Находим $\xi_{25}^{51} = 0 + 2\cdot 5 + (1\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (-4)\cdot 3) = -4$. Ограничения для D_{25}^{51} принимают вид: 1) $2x_2 - x_4 = -12$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 5$; 3) $2x_3 + x_4 \ge -3$. Применим теорему 4: 1) $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 = -7$; $\gamma_0 = -12 < -7 = \gamma_{\min}$; следовательно, выполняется условие (38) и $D_{25}^{51} = \varnothing$.

Возвращаемся на первый уровень, задав $x_5 = 1$; образуем D_3^5; получаем $\widetilde{C} = \{2, 1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 0, 3, 5\}$, $\xi_3^5 = -19$. Ограничения для D_3^5 таковы: 1) $x_1 + 2x_2 - x_4 = -7$; 2) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 10$; 3) $x_1 + 2x_3 + x_4 \ge 3$.

Применим теорему 4:

1) $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_1, x_2, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_2 - x_4) = 2\cdot(-2) + 1\cdot 0 - 1\cdot 5 = -9$,

$\gamma_{\max} = \max\limits_{(x_1, x_2, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_2 - x_4) = 2\cdot 5 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) = 15$,

$\gamma_0 = -7 \in [\gamma_{\min}; \gamma_{\max}] = [-9; 15]$;

2) $\alpha_{\min} = \min\limits_{(x_1, x_2, x_3) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 - 2x_2 + 3x_3) = 3\cdot(-2) + 1\cdot 0 - 2\cdot 5 = -16$,

$\alpha_0 = 10 > \alpha_{\min} = -16$;

3) $\beta_{\max} = \max\limits_{(x_1, x_3, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_3 + x_4) = 2\cdot 5 + 1\cdot 3 + 1\cdot 0 = 13$; $\beta_0 = 3 < 13 = \beta_{\max}$.

Следовательно, нет оснований утверждать, что вершина $D_3^5 = \varnothing$.

Ветвим множество, задав $x_1 = -2$; образовалось множество D_{31}^{51}; получаем $\widetilde{C} = \{1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{0, 3, 5\}$. Оценка $\xi_{31}^{51} = 5 + 2\cdot(-2) + (1\cdot 0 + 0\cdot 3 + (-4)\cdot 5) = -19$. Ограничение для D_{31}^{51}: 1) $2x_2 - x_4 = -5$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 12$; 3) $2x_3 + x_4 \ge 5$. Применим к ним теорему 4:

1) $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2\cdot 0 - 4\cdot 5 = -20$,

$\gamma_{\max} = \max\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2\cdot 5 - 1\cdot 0 = 10$; $\gamma_0 = -5 \in [-20; 10]$;

2) $\alpha_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_3) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (-2x_2 + 3x_3) = 3\cdot 0 - 2\cdot 5 = -10$; $\alpha_0 = 12 > \alpha_{\min} = -10$;

3) $\beta_{\max} = \max\limits_{(x_3, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_3 + x_4) = 2\cdot 5 + 1\cdot 3 = 13$; $\beta_0 = 5 < \beta_{\max} = 13$.

Нет оснований утверждать, что множество $D_{31}^{51}=\varnothing$.

Ветвим множество, задав $x_4=0$; получим D_{312}^{514}, $\widetilde{C}=\{0,-4\}$, $\widetilde{G}=\{3, 5\}$; находим $\xi_{312}^{514}=-19$. Ограничения: 1) $2x_2=-5$; $x_2=-\frac{5}{2}\notin\widetilde{G}$; следовательно, $D_{312}^{514}=\varnothing$.

Образуем множество D_{314}^{514}, задав $x_4=3$, $\widetilde{C}=\{0,-4\}$, $\widetilde{G}=\{0, 5\}$; оценка $\xi_{314}^{514}=-16$. Проверим ограничения вида: 1) $2x_2=-2$; $x_2=-1\notin\widetilde{G}$; следовательно, $D_{314}^{514}=\varnothing$.

Образуем множество D_{315}^{514}, задав $x_4=5$; получаем $\widetilde{C}=\{0,-4\}$, $\widetilde{G}=\{0,3\}$; оценка $\xi_{315}^{514}=-6$. Ограничения: 1) $2x_2=0$; $x_2=0$; число $0\in\widetilde{G}$; следовательно, $x_3=3$ (по правилу отсечения 3); образовалось множество D_{31542}^{51432}, а $D_{3152}^{5143}=\varnothing$. Оценка: $\xi_{31542}^{51432}=6+3\cdot 0-4\cdot 0=6$. Проверим ограничения 2 и 3 в образованном множестве: 2) $0+3\cdot 3<12$ — выполняется; 3) $2\cdot 3+5>5$ — выполняется. Следовательно, получено допустимое решение $x^0=(-2;\ 0;\ 3;\ 5;\ 1)$; $F_0=6$. Кроме D_3^5, неразветвленных вершин нет; ее нужно ветвить дальше.

Образуем множество D_{32}^{51}, приняв $x_1=0$; получаем $\widetilde{C}=\{1, 0, -4\}$, $\widetilde{G}=\{-2, 3, 5\}$. Находим $\xi_{32}^{51}=5\cdot 1+2\cdot 0+(1\cdot(-2)-0\cdot 3+(-4)\cdot 5)=-17$; $\xi_{32}^{51}<F_0$; следовательно, D_{32}^{51} можем ветвить. Проверим, что множество $D_{32}^{51}\neq\varnothing$ согласно теореме 4. Проанализируем для этого множества ограничения задачи, которые примут вид: 1) $2x_2-x_4=-7$; 2) $-2x_2+3x_3\le 10$; 3) $2x_3+x_4\ge 3$. Подсчитаем параметры:

$$1)\ \gamma_{\min}=\min_{(x_2,x_4)\in E_{33}^2(\widetilde{G})}(2x_2-x_4)=2\cdot(-2)-1\cdot 5=-9,$$

$$\gamma_{\max}=\max_{(x_2,x_4)\in E_{33}^2(\widetilde{G})}(2x_2-x_4)=2\cdot 5+(-1)\cdot(-2)=12,\ \gamma_0=-7\in[-9;\ 12];$$

$$2)\ \alpha_{\min}=\min_{(x_2,x_3)\in E_{33}^2(\widetilde{G})}(-2x_2+3x_3)=3\cdot(-2)-2\cdot 5=-16,\ \alpha_0=10>\alpha_{\min}=-16;$$

$$3)\ \beta_{\max}=\max_{(x_3,x_4)\in E_{33}^2(\widetilde{G})}(2x_3+x_4)=2\cdot 5+1\cdot 3=13,\ \beta_0=3<13=\beta_{\max}.$$

Следовательно, нет оснований считать $D_{32}^{51}=\varnothing$.

Сделаем ветвление D_{32}^{51}, задав $x_4=-2$ и образовав D_{321}^{514}; получаем $\widetilde{C}=\{0,-4\}$, $\widetilde{G}=\{3, 5\}$. Оценка $\xi_{321}^{514}=5+1\cdot(-2)+(0\cdot 3+(-4)\cdot 5)=-17<F_0$; ограничения примут вид для множества D_{321}^{514}: 1) $2x_2=-9$; $x_2=-\frac{9}{2}\notin\widetilde{G}$; следовательно, $D_{321}^{514}=\varnothing$.

Образуем множество D_{324}^{514}, положив $x_4=3$; получаем $\widetilde{C}=\{0,-4\}$, $\widetilde{G}=\{2, 5\}$. Подсчитаем оценку: $\xi_{324}^{514}=5+3+(0\cdot(-2)+(-4)\cdot 5)=-12<F_0$. Проверим выполнение ограничений, которые приобретают вид: 1) $2x_2=-4$; $x_2=-2\in\widetilde{G}$, значит, $x_3=5$. Образовано по правилу 3 множество D_{32451}^{51432} ($D_{3241}^{5143}=\varnothing$). Вычислим $\xi_{32451}^{51432}=8+0\cdot 5+(-4)\cdot(-2)=16>F_0$. Проверим в D_{32451}^{51432} ограничения 2 и 3.

Ограничение 2 не выполнилось; следовательно, $D_{32451}^{51432} = \varnothing$.

Положим $x_4 = 5$, образовав D_{325}^{514}; $\widetilde{C} = \{0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{2, 3\}$. Рассчитаем оценку $\xi_{325}^{514} = 5 + 3 + (0 \cdot (-2) + (-4) \cdot 3) = -4 < F_0$. Рассмотрим на D_{325}^{514} ограничения: 1) $2x_2 = -2$; $x_2 = -1 \notin \widetilde{G}$. Следовательно, $D_{325}^{514} = \varnothing$.

Возвратимся на второй уровень, положим $x_1 = 3$ и образуем D_{34}^{51}; получаем $\widetilde{C} = \{1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2; 0, 5\}$; найдем $\xi_{34}^{51} = -11 < F_0$. Анализируем ограничения в виде: 1) $2x_2 - x_4 = -10$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 7$; 3) $2x_3 + x_4 \ge 0$. Применим теорему 4:

1) $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 = -9$,

$\gamma_{\max} = \max\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) = 12$,

$\gamma_0 = -10 \notin [-9; 12] = [\gamma_{\min}; \gamma_{\max}]$; $D_{34}^{51} = \varnothing$.

Образуем множество D_{35}^{51}, положив $x_1 = 5$. Имеем $\widetilde{C} = \{1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{2, 0, 3\}$. Рассчитаем оценку множества D_{35}^{51}: $\xi_{35}^{51} = 5 + 2 \cdot 5 + (1 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 + (-4) \cdot 3) = 1 < F_0$. Следовательно, если позволят ограничения, можно продолжать ветвить множество D_{35}^{51}. Проверим выполнение ограничений, которые приобретают вид: 1) $2x_2 - x_4 = -12$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 5$; 3) $2x_3 + x_4 \ge -2$. Вычислим $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -7$, $\gamma_0 = -12 < -7 = \gamma_{\min}$; следовательно, $D_{35}^{51} = \varnothing$ согласно теореме 4.

Второй уровень множества D_{35}^{51} исчерпан, возвращаемся на первый, где, задав $x_5 = 3$, создаем множество D_4^5; получаем $\widetilde{C} = \{2, 1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 0, 1, 5\}$. Найдем для D_4^5 оценку $\xi_4^5 = 5 \cdot 3 + (2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-4) \cdot 5) = -9 < F_0$, что позволит после проверки теоремы 4 дальше ветвить D_4^5. Ограничения примут вид: 1) $x_1 + 2x_2 - x_4 = -7$; 2) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 10$; 3) $x_1 + 2x_3 + x_4 \ge 5$. Вычислим:

1) $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_1, x_2, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_2 - x_4) = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 - 4 \cdot 5 = -24$;

$\gamma_{\max} = \max\limits_{(x_1, x_2, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_2 - x_4) = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) = 19$;

$\gamma_0 = -7 \in [-24; 19]$;

2) $\alpha_{\min} = \min\limits_{(x_1, x_2, x_3) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 - 2x_2 + 3x_3) = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 5 = -16$;

$\alpha_0 = 10 > -16 = \alpha_{\min}$;

3) $\beta_{\max} = \max\limits_{(x_1, x_3, x_4) \in E_{44}^3(\widetilde{G})} (x_1 + 2x_3 + x_4) = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 11$; $\beta_0 = 5 < 11 = \beta_{\max}$.

Следовательно, нет оснований утверждать, что вершина $D_4^5 = \varnothing$. Продолжаем ветвить ее, задав $x_1 = -2$ и получив D_{41}^{51}. Находим $\widetilde{C} = \{1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{0, 1, 5\}$, $\xi_{41}^{51} = -9 < F_0$. Анализируем получаемые ограничения: 1) $2x_2 - x_4 = -5$; 2) $-2x_2 + 3x_3 \le 12$; 3) $2x_3 + x_4 \ge 7$. Найдем $\gamma_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_4) \in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_2 - x_4) = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = -5$; по правилу 3 $x_2 = 0$; $x_4 = 5$; следовательно, $x_3 = 1$, т.е. образовано множество D^{51432}_{41532} ($D^{514}_{412}=\varnothing$, $D^{514}_{413}=\varnothing$, $D^{5143}_{4152}=\varnothing$). Оценка этого множества: $\xi^{51432}_{41532}=15+(-4)+5+0+0=16>F_0$. Проверим в этом множестве ограничения 2 и 3:

2) $-2\cdot 0+3\cdot 1<12$ — выполнено;

3) $2\cdot 1+5=7$ — выполнено.

Следовательно, имеем еще одно допустимое решение: $x'=(-2;0;1;5;3)$; $F_1=16$. Поскольку $F_1>F_0$, то рекорд F_0 не уменьшается.

Возвращаемся на второй уровень, задаем $x_1=0$, образуем D^{51}_{42}, получаем $\widetilde{C}=\{1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G}=\{-2, 1, 5\}$. Вычисляем оценку $\xi^{51}_{42}=5\cdot 3+0\cdot 2+(1\cdot(-2)+1\cdot 0-$ $-4\cdot 5)=-7<F_0$.

Проанализируем в D^{51}_{42} ограничения, которые имеют вид: 1) $2x_2-x_4=-7$; 2) $-2x_2+3x_3\le 10$; 3) $2x_3+x_4\ge 5$.

Найдем величины:

1) $\gamma_{\min}=\min\limits_{(x_2,x_4)\in E^2_{33}(\widetilde{G})}(2x_2-x_4)=2\cdot(-2)-1\cdot 5=-9$,

$\gamma_{\max}=\max\limits_{(x_2,x_4)\in E^2_{33}(\widetilde{G})}(2x_2-x_4)=2\cdot 5-1\cdot(-2)=12$; $\gamma_0=-7\in[-9;12]$;

2) $\alpha_{\min}=\min\limits_{(x_2,x_3)\in E^2_{33}(\widetilde{G})}(-2x_2+3x_3)=3\cdot(-2)+(-2)\cdot 5=-16<10=\alpha_0$;

3) $\beta_{\max}=\max\limits_{(x_3,x_4)\in E^2_{33}(\widetilde{G})}(2x_3+x_4)=2\cdot 5+1\cdot 1=11>5=\beta_0$.

Следовательно, нет оснований не ветвить дальше D^{51}_{42}.

Выполним ветвление, задав $x_4=-2$ и образовав D^{514}_{421}; получим $\widetilde{C}=\{0,-4\}$, $\widetilde{G}=\{1,\ 5\}$. Найдем $\xi^{514}_{421}=15+1\cdot(-2)+(0\cdot 1-4\cdot 5)=-7<F_0$. Проанализируем ограничение вида: $2x_2=-9$; $x_2=-\frac{9}{2}\notin\widetilde{G}$; следовательно, $D^{514}_{421}=\varnothing$.

Зададим $x_4=1$, образовав D^{514}_{423}; получим $\widetilde{C}=\{0,-4\}$, $\widetilde{G}=\{-2, 5\}$. Найдем $\xi^{514}_{423}=15+1\cdot 1+(0\cdot(-2)-4\cdot 5)=-4<F_0$. Проанализируем ограничения: 1) $2x_2=-6$; $x_2=-3\notin\widetilde{G}$, $D^{514}_{423}=\varnothing$.

Зададим $x_4=5$, образовав D^{514}_{425}, получим $\widetilde{C}=\{0,-4\}$, $\widetilde{G}=\{-2, 1\}$. Найдем $\xi^{514}_{425}=15+1\cdot 5+(0\cdot(-2)-4\cdot 1)=16>F_0$, отсекаем множество D^{514}_{425}, поскольку его оценка хуже (больше) рекорда F_0 (отметим, что отсечение по этой причине получено впервые в этом примере).

Задаем $x_1=1$, образовав D^{51}_{43}; получаем $\widetilde{C}=\{1,\ 0,\ -4\}$, $\widetilde{G}=\{-2, 0, 5\}$. Найдем $\xi^{51}_{43}=15+1\cdot 2+(1\cdot(-2)+0\cdot 0-4\cdot 5)=-5<F_0$. Проанализируем ограничения, которые для D^{51}_{43} приняли вид: 1) $2x_2-x_4=-8$; 2) $-2x_2+3x_3\le 9$; 3) $2x_3+x_4\ge 4$.

Находим параметры:

1) $\gamma_{\min}=\min\limits_{(x_2,x_4)\in E^2_{33}(\widetilde{G})}(2x_2-x_4)=2\cdot(-2)-1\cdot 5=-9$,

$\gamma_{\max}=\max\limits_{(x_2,x_4)\in E^2_{33}(\widetilde{G})}(2x_2-x_4)=2\cdot 5-1\cdot(-2)=12$; $\gamma_0=-8\in[-9;\ 12]$;

2) $\alpha_{\min} = \min\limits_{(x_2, x_3)\in E_{33}^2(\widetilde{G})} (-2x_2 + 3x_3) = 3\cdot(-2)+(-2)\cdot 5 = -16 < 9 = \alpha_0$,

3) $\beta_{\max} = \max\limits_{(x_3, x_4)\in E_{33}^2(\widetilde{G})} (2x_3 + x_4) = 2\cdot 5 + 1\cdot 0 = 10 > 4 = \beta_0$. Следовательно, можно продолжать ветвить D_{43}^{51}.

Зададим $x_4 = -2$, образовав D_{431}^{514}, получим $\widetilde{C} = \{0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{0, 5\}$. Оценим D_{431}^{514}: $\xi_{431}^{514} = 15 + 2 + 1\cdot(-2) + (0\cdot 0 - 4\cdot 5) = -5 < F_0$. Проанализируем ограничения для D_{431}^{514}, которые приняли вид: 1) $2x_2 = -10$; $x_2 = -5 \notin \widetilde{G}$; следовательно, $D_{431}^{514} = \varnothing$.

Зададим $x_4 = 0$, образовав D_{432}^{514}, получим $\widetilde{C} = \{0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 5\}$. Находим $\xi_{432}^{514} = -3 < F_0$. Проанализируем ограничения: 1) $2x_2 = -8$; $x_2 = -4 \notin \widetilde{G}$; следовательно, $D_{432}^{514} = \varnothing$.

Зададим $x_4 = 5$, образовав D_{435}^{514}, получим $\widetilde{C} = \{0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 0\}$; оценим $\xi_{435}^{514} = 22 > F_0$. Множество отсекается.

Задаем $x_1 = 5$, образовав D_{45}^{51}, получим $\widetilde{C} = \{1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{-2, 0, 1\}$; оценим $\xi_{45}^{51} = 19 > F_0$; следовательно, вершину D_{45}^{51} отсекаем. Возвращаемся на первый уровень.

Задаем последнее из возможных значений для $x_5 = 5$, образовывая множество D_5^5; получим $\widetilde{C} = \{2, 1, 0, -4\}$, $\widetilde{G} = \{2, 0, 1, 3\}$. Найдем $\xi_5^5 = 5\cdot 5 + (2\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 - 4\cdot 3) = 9 > F_0$; следовательно, множество D_5^5 отсекаем.

Все вершины либо разветвлены до одноэлементных (допустимых решений), либо отсечены. Это означает, что задача решена. Текущий минимальный рекорд целевой функции и точка, которая его определяет, имеют вид $x^* = x^0 = (-2;\ 0;\ 3;\ 5;\ 1)$; $C(x^*) = F_0 = 6$. Схема решения примера МВГ представлена на рис. 1–3. Заметим, что в МВГ для этого примера не было улучшения рекорда F_0, т.е. первое допустимое решение оказалось оптимальным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье метод ветвей и границ распространяется на решение условной линейной полностью комбинаторной задачи оптимизации на перестановках на основе определения оценок допустимых подмножеств, определения правил ветвления и правил отсечения подмножеств. При этом обнаружено и обосновано свойство оценки, использование которого увеличивает эффективность МВГ. В дальнейшем целесообразно исследовать возможность получения условий, при которых первое допустимое решение в МВГ для рассмотренной задачи являлось бы оптимальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — К.: Наук. думка, 1988. — 472 с.
2. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
3. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — К.: Наук. думка, 2003. — 263 с.

4. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.

5. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи: — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.

6. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. — К.: УМК ВО, 1992. — 92 с.

7. Ємець О.О., Роскладка О.В. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування: — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 129 с.

8. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними функціями / Під ред. І.В. Сергієнка. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.

9. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях / Под ред. И.В. Сергиенко. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.

10. Емец О.А., Романова Н.Г. Оптимизация на полиперестановках / Под ред. И.В. Сергиенко. — К.: Наук. думка, 2010. — 105 с.

11. Емец О.А., Парфенова Т.А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 106–112.

12. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Оцінювання допустимих множин розв'язків комбінаторної транспортної задачі на переставленнях, що розв'язується методом гілок та меж // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2010 — № 1. — С. 21–28.

13. Ємець О.О., Парфьонова Т.О. Наближений метод для розв'язування комбінаторних транспортних задач // Радиоэлектроника и информатика. — 2006. — № 2. — С. 39–41.

14. Ємець О., Романова Н., Роскладка О. Про властивості деяких задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях та методи їх розв'язування // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Приклад. математика та інформатика. — 2002. — Вип. 5. — С. 13–15.

15. Ємець О.О., Романова Н.Г., Чілікіна Т.В. Оптимізація на вершинно розташованих евклідових комбінаторних множинах // Математичне моделювання. — 2003. — № 2 (10). — С. 39–41.

16. Ємець О.О., Романова Н.Г. Комбінований метод розв'язування лінійних комбінаторних задач оптимізації на вершинно розташованих евклідових комбінаторних множинах // Динамические системы (межвед. науч. сб.). — 2004. — Вып. 17. — С. 166–170.

17. Математические методы исследования операций: Учеб. пособие для вузов / Ю.М. Ермольев, И.И. Ляшко, В.С. Михалевич, В.И. Тюптя. — К.: Вища шк., 1979. — 312 с.

18. Линейное и нелинейное программирование / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З. Шор. — К.: Вища шк., 1975. — 372 с.

Поступила 20.09.2011