УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ИМПЕДАНСНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ключевые слова: *акустическое поле, уравнение типа Шредингера, экстремальная задача, разностная схема, устойчивость.*

Интенсивные исследования процессов распространения акустических волн в двумерных и трехмерных подводных неоднородных волноводах начались с 80-х годов прошлого столетия в связи с потребностями дистанционного зондирования и акустического мониторинга регионов Мирового океана [1–4]. Практически во всех видах сигнализации, связи, локации, для дистанционного изучения водных масс и дна океана используются звуковые волны. Значительный интерес также представляют вопросы формирования акустических полей с заданными свойствами и особенности распространения звуковых волн в неоднородных волноводах.

С математической точки зрения расчет звукового поля точечного или распределенного источников сводится к решению краевой задачи для эллиптического волнового уравнения Гельмгольца в неоднородных областях. В настоящее время разработано большое количество численно-аналитических методов и вычислительных алгоритмов для решения прямых или экстремальных волновых задач в однородных и слоисто-неоднородных средах [1, 2, 5–10]. Математические трудности таких задач, обусловленные комплекснозначностью решения, несамосопряженностью дифференциального оператора по пространственным переменным, неоднородностью и неограниченностью области, можно преодолеть, используя методику аппроксимации волнового уравнения Гельмгольца параболическими уравнениями типа Шредингера [3–5, 11–16]. Это приводит к необходимости разработки эффективных численных методов решения соответствующих аппроксимационных задач с несамосопряженным комплекснозначным оператором.

В настоящей статье рассматриваются вопросы численного моделирования и оптимизации акустических полей на базе параболического волнового уравнения в осесимметричном неоднородном двухслойном волноводе с кусочно-постоянной плотностью и импедансной границей, что позволяет учесть эффекты отражения, поглощения, рассеивания энергии на границе вода–дно. Предложен численный метод решения прямой и оптимизационной задач, изучены дифференциальные свойства функционала качества, исследована устойчивость разностной схемы для прямой и сопряженной краевых задач с комплекснозначным несамосопряженным оператором.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямую задачу отыскания звукового поля в подводном слоисто-неоднородном осесимметричном волноводе $G = \{r_0 < r < \infty,\ 0 < z < H,\ r_0 > 0\}$, где (r, z) — цилиндрические координаты и ось z направлена вертикально вниз. Для определенности считаем, что волновод двухслойный с горизонтальной границей раздела сред, на которой выполняются условия непрерывности акустического давления и нормальной компоненты скорости частиц, а кусочно-непрерывная скорость звука $c(r,z)$ и кусочно-постоянная плотность среды $\rho(z)$ имеют разрыв первого рода на линии $z=\xi$. Кроме того, верхняя граница $z=0$ волновода абсолютно мягкая, нижняя граница импедансная, т.е. описывается граничным условием третьего рода с комплексным коэффициентом. Тогда в рамках параболического приближения акустическое поле в волноводе G описывается краевой задачей для уравнения типа Шредингера с комплексным несамосопряженным оператором

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+k_0^2(n^2(r,z)-1)p=0, \tag{1}$$

$$z\in(0,\xi)\cup(\xi,H),\ r_0<r<\infty,$$

$$[p]|_{z=\xi}=0,\ \left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=\xi}=0,\qquad \rho(z)=\begin{cases}\rho_1, & 0<z<\xi,\\ \rho_2, & \xi<z<H,\end{cases} \tag{2}$$

$$p|_{z=0}=0,\ \left(\frac{\partial p}{\partial z}+\alpha p\right)\Bigg|_{z=H}=0, \tag{3}$$

$$p|_{r=r_0}=u(z). \tag{4}$$

Здесь $p(r,z)$ — комплекснозначное решение, $u(z)$ — заданная функция (начальное значение), $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица, $k_0=\omega/c_0$ — волновое число, c_0 — некоторое значение скорости звука $c(r,z)$, ω — частота, $n^2(r,z)=$ $=(c_0/c(r,z))^2(1+i\nu(r,z))$ — комплекснозначный коэффициент преломления, $[f(r,z)]|_{z=\xi}=f(r,\xi+0)-f(r,\xi-0)$ — скачок f, $\nu(r,z)\geq 0$ — коэффициент поглощения, $\alpha=\alpha(r)$, $\operatorname{Re}\alpha\geq 0$, $\operatorname{Im}\alpha\leq 0$, $\operatorname{Re}\alpha+|\operatorname{Im}\alpha|\neq 0$.

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого точечным гармоническим источником в двухслойном неоднородном осесимметричном волноводе с поглощающей границей. Это давление вне источника удовлетворяет уравнению Гельмгольца [1, 5]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right)+k_0^2\left(\frac{c_0}{c(r,z)}\right)^2(1+i\nu(r,z))P=0, \tag{5}$$

$$z\in(0,\xi)\cup(\xi,H),\ 0<r<\infty,$$

условиям непрерывности на линии раздела акустического давления и нормальной компоненты скорости частиц

$$[P]|_{z=\xi}=P|_{z=\xi+0}-P|_{z=\xi-0}=0,\ \left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=\xi}=0,\ \rho(z)=\begin{cases}\rho_1, & 0<z<\xi,\\ \rho_2, & \xi<z<H,\end{cases} \tag{6}$$

граничным условиям

$$P|_{z=0}=0,\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}+\alpha P\right)\Bigg|_{z=H}=0 \tag{7}$$

и при $k_0 r>>1$ представляется в виде произведения функции Ханкеля первого рода нулевого порядка $H_0^{(1)}(\cdot)$ и плавной амплитуды: $P(r,z)=H_0^{(1)}(k_0 r)p(r,z)$. Подставляя выражение для $P(r,z)$ в (5) и учитывая, что функция Ханкеля $y=H_0^{(1)}(k_0 r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''+\frac{1}{r}y'+k_0^2 y=0$, а также ее асимптотическое поведение $H_0^{(1)}(k_0 r)\approx e^{ik_0 r}/\sqrt{k_0 r}$ при $k_0 r>>1$, для комплексной амплитуды $p(r,z)$ получаем эллиптическое волновое уравнение

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+k_0^2(n^2(r,z)-1)p=0.$$

Пренебрегая в этом уравнении членом $\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$, приходим к узкоугольному параболическому уравнению типа Шредингера (1), которое описывает распространение акустических волн в направлениях, близких к горизонтальному.

С учетом $P(r,z)=H_0^{(1)}(k_0 r)p(r,z)$ из (6), (7) вытекают соответствующие условия сопряжения и краевые условия для параболического волнового уравнения (1).

Отметим, что область эффективного использования уравнения (1) ограничена углами распространения до горизонтали в пределах $10^\circ - 15^\circ$, а наличие в нем мнимого коэффициента $\nu(r,z)$ позволяет проводить моделирование акустических полей с учетом поглощения.

Математическую постановку оптимизационной задачи сформулируем как решение вариационной задачи минимизации некоторого функционала в целях обеспечения минимального отклонения характеристик акустического поля от заданных в некоторой области волновода. При этом в качестве управления принимается начальное распределение решения краевой задачи. Тогда одну из экстремальных задач можно сформулировать следующим образом.

Требуется минимизировать функционал

$$J_\varepsilon(u)=\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}\beta(z)\,|\,p(R,z)-p_0(z)|^2dz+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^H\frac{1}{\rho(z)}|\,u(z)|^2\,dz \qquad (8)$$

при условии, что $p(r,z;u)$ является решением краевой задачи

$$2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+k_0^2(n^2(r,z)-1)p=0\,, \qquad (9)$$

$$z\in(0,\xi)\cup(\xi,H),\ r_0<r<\infty,$$

$$[p]|_{z=\xi}=0,\ \left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=\xi}=0\,, \qquad (10)$$

$$p|_{z=0}=0,\ \left(\frac{\partial p}{\partial z}+\alpha p\right)\Bigg|_{z=H}=0\,, \qquad (11)$$

$$p|_{r=r_0}=u(z). \qquad (12)$$

Здесь $p(R,z)=p(R,z;u)$ — решение задачи (1)–(4) при $r=R$, $r_0<R<\infty$, соотвествующее управлению $u(z)$, $\beta(z)>0$ — заданная непрерывная вещественная весовая функция, $p_0(z)$ — заданная комплекснозначная функция, $u(z)$ — комплекснозначное управление из некоторого выпуклого замкнутого множества $U=\{u(z)\in L_2(\Omega,1/\rho)\}$, где $L_2(\Omega,1/\rho)$ — пространство комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом и весом $1/\rho$ в области $\Omega=(0,H)$. Скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega,1/\rho)$ определяются по формулам

$$(u,v)=(u,v)_{L_2(\Omega,1/\rho)}=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}u(z)\bar{v}(z)dz,\ ||u||=(u,u)^{1/2}=\left(\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}|u(z)|^2\,dz\right)^{1/2},$$

в которых черта означает комплексное сопряжение.

Отметим, что для выделения ограниченного решения в функционал качества (8) добавлен стабилизирующий функционал $\frac{1}{\varepsilon^2}||u||^2$ при некотором заданном $\varepsilon>0$.

Таким образом, оптимизационная задача состоит в определении комплекснозначного управления $u\in U$, при котором функционал (8) достигает своей нижней грани:

$$J_\varepsilon(w)=\inf_{u\in L_2(\Omega,1/\rho)}J_\varepsilon(u). \tag{13}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальные свойства экстремальной задачи (8)–(13). Сначала покажем, что при каждом фиксированном элементе $u\in U$ соответствующее решение $p(r,z)=p(r,z;u)$ краевой задачи (9)–(12) определяется однозначно.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1 . Для комплекснозначного решения краевой задачи (9)–(12) справедлива оценка

$$||\,p(R,z)||\le||u(z)||,\ r_0<R<\infty. \tag{14}$$

Для доказательства неравенства (14) уравнение

$$Lp=2ik_0\frac{\partial p}{\partial r}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)+k_0^2(n^2(r,z)-1)p=0,$$

$$n^2(r,z)=(c_0/c(r,z))^2(1+i\nu(r,z))$$

умножим на комплексно-сопряженную функцию $\bar{p}(r,z;u)$ и проинтегрируем с весом $1/\rho(z)$ по области $z\in(0,H)$, учитывая разрывность функции $\rho(z)$. Тогда получим

$$(Lp,p)=\int\limits_0^H\frac{1}{\rho(z)}Lp\bar{p}dz=\int\limits_0^\xi\frac{1}{\rho_1}Lp\bar{p}dz+\int\limits_\xi^H\frac{1}{\rho_2}Lp\bar{p}dz=0$$

или

$$2ik_0\int\limits_\Omega\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial r}\bar{p}dz+\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\bar{p}dz+k_0^2\int\limits_\Omega\frac{1}{\rho(z)}(n^2(r,z)-1)|\,p|^2\,dz=0\,.$$

Отделив в этом тождестве мнимую часть, получим

$$k_0\int\limits_\Omega\frac{1}{\rho(z)}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\bar{p}+\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}p\right)dz+\frac{1}{2i}\left(\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\bar{p}dz-\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)pdz\right)+$$

$$+k_0^2\int\limits_\Omega\frac{1}{\rho(z)}\mathrm{Im}\,(n^2(r,z))|\,p|^2\,dz=0\,. \tag{15}$$

Учитывая условия сопряжения (10) и граничные условия (11), для второго слагаемого в (15) находим

$$\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\bar{p}dz-\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right)pdz=\int_{0}^{\xi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\bar{p}dz+$$

$$+\int_{\xi}^{H}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\bar{p}dz-\int_{0}^{\xi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right)pdz-\int_{\xi}^{H}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right)pdz=$$

$$=\frac{1}{\rho_2}(\bar{\alpha}-\alpha)|p|^2|_{z=H}=-\frac{1}{\rho_2}2i\mathrm{Im}\,(\alpha)|p|^2|_{z=H}\,.$$

В результате соотношение (15) принимает вид

$$k_0\int_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\bar{p}+\frac{\partial \bar{p}}{\partial r}p\right)dz-\frac{1}{\rho_2}\mathrm{Im}\,(\alpha)|p|^2\Big|_{z=H}+$$

$$+k_0^2\int_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}\mathrm{Im}\,(n^2(r,z))|p|^2\,dz=0. \tag{16}$$

Проинтегрируем теперь (16) по $r\in(r_0,R)$. Тогда после преобразованй и учета начального условия (12) имеем

$$k_0\int_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}|p|^2\Big|_{r=R}dz-\frac{1}{\rho_2}\int_{r_0}^{R}\mathrm{Im}\,(\alpha)|p|^2\Big|_{z=H}dr+k_0^2\int_{r_0}^{R}dr\int_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}\mathrm{Im}\,(n^2(r,z))|p|^2\,dz=$$

$$=k_0\int_{\Omega}\frac{1}{\rho(z)}|u|^2\,dz. \tag{17}$$

Поскольку $\mathrm{Im}\,n^2(r,z)=(c_0/c(r,z))^2\nu(r,z)\geq 0$, $\mathrm{Im}\,(\alpha)\leq 0$, из (17) окончательно следует неравенство (14). Оценка (14) означает единственность решения задачи (9)–(12) и его непрерывную зависимость от начальных данных.

С целью использования градиентных методов оптимизации исследуем дифференциальные свойства критерия качества (8). Покажем, что функционал (8) дифференцируем в произвольной точке $u(z)\in U$ в комплексном пространстве со скалярным произведением

$$<u,v>=\mathrm{Re}\,(u,v)\,. \tag{18}$$

Для этого оценим главную линейную часть приращения функционала $\Delta J_\varepsilon(u)=J_\varepsilon(u+\delta u)-J_\varepsilon(u)$ в зависимости от приращения управления δu.

Учитывая комплекснозначность управления $u\in U$, рассмотрим случай амплитудно-фазового управления. Легко видеть, что в этом случае приращение решения $\delta p=\delta p(r,z)=p(r,z;u+\delta u)-p(r,z;u)$ удовлетворяет краевой задаче

$$2ik_0\frac{\partial\delta p}{\partial r}+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\delta p}{\partial z}\right)+k_0^2(n^2(r,z)-1)\delta p=0, \tag{19}$$

$$z\in(0,\xi)\cup(\xi,H),\ r_0<r<\infty,$$

$$[\delta p]|_{z=\xi}=0,\ \left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\delta p}{\partial z}\right]\Bigg|_{z=\xi}=0, \tag{20}$$

$$\delta p|_{z=0} = 0, \left. \left(\frac{\partial \delta p}{\partial z} + \alpha \delta p \right) \right|_{z=H} = 0 \qquad (21)$$

с начальным условием

$$\delta p|_{r=r_0} = \delta u(z). \qquad (22)$$

Рассматривая теперь выражение для приращения функционала (8), имеем

$$\Delta J_\varepsilon(u) = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \{ \beta(z)(| p(u+\delta u) - p_0|^2 - | p(u) - p_0|^2) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} (|u+\delta u|^2 - |u|^2) \, dz,$$

где для краткости обозначено $p(u+\delta u) = p(R, z; u+\delta u)$, $p(u) = p(R, z; u)$.

После несложных преобразований приращение функционала можно записать в виде

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\mathrm{Re} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \beta(z) \, \delta p \, (\overline{p(u) - p_0}) \, dz + 2 \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Re} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \delta u \, \bar{u} \, dz +$$

$$+ \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} (\beta(z) |\delta p|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\delta u|^2) \, dz. \qquad (23)$$

Оценим в (23) интегральный член, содержащий приращение решения δp. Для этого воспользуемся леммой 1 и учтем, что δp удовлетворяет краевой задаче (19)–(22). Тогда на основании оценки (14) получим неравенство

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \beta(z) |\delta p|^2 \Big|_{r=R} dz \le M \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} |\delta p|^2 \Big|_{r=R} \le M \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} |\delta u|^2 \, dz = M || \delta u ||^2, \quad (24)$$

где $M = \max \beta(z)$, $z \in [0, H]$.

Учитывая в (23) оценку (24), для приращения функционала $\Delta J_\varepsilon(u)$ получаем соотношение

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\mathrm{Re} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \beta(z) \, \delta p \, (\overline{p(u) - p_0}) \, dz +$$

$$+ 2 \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Re} \int_0^H \frac{1}{\rho(z)} \delta u \, \bar{u} \, dz + o(|| \delta u ||) \, . \qquad (25)$$

Чтобы окончательно определить выражение для главной линейной части, введем в рассмотрение сопряженную функцию $\psi(r, z) = \psi(r, z; u)$ как решение в области $G_R = \{r_0 < r < R, 0 < z < H\}$ краевой задачи

$$-2ik_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) + k_0^2 (n^2(r, z) - 1) \bar{\psi} = 0, \qquad (26)$$

$$z \in (0, \xi) \cup (\xi, H), \; r_0 < r < R,$$

$$[\bar{\psi}]|_{z=\xi} = 0 \, , \quad \left. \left[\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right] \right|_{z=\xi} = 0 \, , \qquad (27)$$

$$\overline{\psi}_{|z=0} = 0, \left.\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial z} + \alpha\overline{\psi}\right)\right|_{z=H} = 0, \tag{28}$$

$$\overline{\psi}|_{r=R} = \beta(z)\overline{(p(u) - p_0)}. \tag{29}$$

Аналогично доказательству леммы 1 легко показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\delta p, \overline{\psi}$ — решения задачи (19)–(22) и (26)–(29) соответственно. Тогда имеет место соотношение

$$\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\,\delta p|_{r=r_0} dz = \int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\,\delta p|_{r=R}\, dz. \tag{30}$$

Принимая во внимание в (25) полученную оценку (30) и начальное условие (22), можно окончательно представить выражение для приращения функционала $\Delta J_\varepsilon(u)$ в виде

$$\Delta J_\varepsilon(u) = 2\operatorname{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\overline{\psi}\Big|_{r=r_0}\delta u dz + \frac{2}{\varepsilon^2}\operatorname{Re}\int_0^H \frac{1}{\rho(z)}\delta u\,\overline{u}\,dz + o(||\delta u||). \tag{31}$$

Отсюда следует дифференцируемость функционала $J_\varepsilon(u)$ по $u(z)$ в пространстве $L_2^2(\Omega, 1/\rho)$ действительных пар $\{\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u\}$. Легко также видеть, что функционал (8) выпуклый.

Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 1. Функционал (8) является выпуклым на множестве U, дифференцируемым по Фреше в пространстве $L_2^2(\Omega, 1/\rho)$ действительных пар $\{\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u\}$. Градиент функционала определяется выражением

$$J'_\varepsilon(u) = 2\left\{\psi_1(r_0, z; u) + \frac{1}{\varepsilon^2}u_1,\ \psi_2(r_0, z; u) + \frac{1}{\varepsilon^2}u_2\right\}, \tag{32}$$

где $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ — решение сопряженной задачи (26)–(29), $u = u_1(z) + iu_2(z)$.

Из изложенного следует, что для определения градиента необходимо при фиксированном $u(z)$ получить решение двух краевых задач. Вначале с помощью прямой задачи (9)–(12) следует определить функцию $p(r, z; u)$, а затем из (26)–(29) найти значение сопряженной функции.

Приближенное решение задачи оптимального управления (8)–(13) можно получить, используя градиентные методы [17, 18]. Поэтому в таких задачах прежде всего необходимо вычислить градиент минимизируемого функционала и сформулировать необходимые условия оптимальности. В случае экстремальных задач без ограничений условие оптимальности имеет вид

$$\operatorname{grad} J_\varepsilon(w) = 0,\ J_\varepsilon(w) = \inf_{u\in L_2(\Omega, 1/\rho)} J_\varepsilon(u). \tag{33}$$

Для решения задачи (33) можно применить приближенные методы, в частности

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{\tau_{k+1}} + \operatorname{grad} J_\varepsilon(w_k) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, \tag{34}$$

с использованием различных способов выбора итерационных параметров τ_k.

На практике часто используется выбор итерационного параметра в (34) из условия монотонности $J_\varepsilon(w_{k+1}) < J_\varepsilon(w_k)$. Начиная с некоторого заданного значения итерационный параметр уменьшают до тех пор, пока не будет выполнено условие монотонности.

В случае задач оптимизации с ограничениями вместо (34) используется итерационный процесс

$$w_{k+1} = P_U\,(w_k - \tau_{k+1}\,\mathrm{grad}\,J_\varepsilon(w_k)), \tag{35}$$

где P_U — оператор проектирования на множество U.

Алгоритм (35) можно реализовать следующим образом:

$$\frac{\widetilde{w}_{k+1} - w_k}{\tau_{k+1}} + \mathrm{grad}\,J_\varepsilon(w_k) = 0, \tag{36}$$

$$w_{k+1} = P_U\,(\widetilde{w}_{k+1}),\ \ k = 0, 1, \ldots \tag{37}$$

Здесь на первом шаге (36) вычисление аналогично случаю задачи без ограничений. На втором шаге (37) реализуется ввод в подпространство ограничений U.

Приближенное вычисление градиента связано с численным решением прямой краевой задачи (9)–(12) и сопряженной задачи (26)–(29) с комплексными несамосопряженными операторами. Легко видеть, что для численного решения прямой и сопряженной краевых задач можно использовать один и тот же метод, который рассматривается далее.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Для численного моделирования звуковых полей на основе начально-краевой задачи (1)–(4) с комплекснозначным несамосопряженным оператором наиболее удобным является метод сеток. Известно, что использование этого метода требует исследования устойчивости, сходимости и оценки скорости сходимости решения разностной схемы [5, 17, 19]. Отметим, что при рассмотрении разностных схем наиболее важным является вопрос устойчивости по начальным данным, что гарантирует отсутствие накопления ошибок, допущенных на некотором шаге вычислений.

Рассмотрим болеее подробно некоторые из этих вопросов.

В области G для численного исследования дифференциальной задачи (1)–(4) введем равномерную сетку, предполагая соизмеримость отрезков $(0, \xi)$ и (ξ, H):

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \overline{\omega}_\tau \times \overline{\omega}_h = \{(r, z),\ r \in \overline{\omega}_\tau,\ z \in \overline{\omega}_h\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\ \ m = 0, 1, 2, \ldots,\},\ \ \omega_\tau = \{r = r_m \in \overline{\omega}_\tau,\ \ m \geq 1\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{z = z_k = kh,\ \ k = \overline{0, N},\ \ h = H / N = \xi / N_1\},$$

$$\omega_h = \{z = z_k \in \overline{\omega}_h,\ \ k = \overline{1, N-1},\ \ \omega_h^+ = \{z = z_k \in \overline{\omega}_h,\ \ k = \overline{1, N}\}.$$

Используя интегро-интерполяционный метод [17], уравнение (1) с учетом условий сопряжения (2) аппроксимируем на сетке $\overline{\omega}_{\tau h}$ двухслойным разностным уравнением

$$4ik_0 b(z)\,y_r + (a\hat{y}_{\bar{z}})_z + (ay_{\bar{z}})_z + d(r, z)(\hat{y} + y) = 0,\ (r, z) \in \overline{\omega}_\tau \times \omega_h, \tag{38}$$

где введены следующие обозначения:

$$y = y(r_m, z_k) = y_k^m = y^m = y_k,\ \hat{y} = y_k^{m+1},\ y_r = (\hat{y} - y) / h,$$

$$y_z = (y_{k+1} - y_k)/h,\ y_{\bar z} = (y_k - y_{k-1})/h,$$

$$(ay_{\bar z})_{z,k} = \frac{1}{h^2}(a_{k+1} y_{k+1}^m - (a_{k+1} + a_k) y_k^m + a_k y_{k-1}^m),\ a_k = a(z_k).$$

Коэффициенты уравнения (38) определяются формулами

$$a(z) = \frac{1}{\rho(z - 0{,}5h)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_1}, & h \le z \le \xi, \\ \dfrac{1}{\rho_2}, & \xi < z \le H, \end{cases} \qquad b(z) = \begin{cases} 1/\rho_1, & z < \xi, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2}\right), & z = \xi, \\ 1/\rho_2, & z > \xi, \end{cases}$$

$$d(r,z) = \begin{cases} \dfrac{k_0^2 \tilde\varepsilon(r,z)}{\rho(z)},\ \tilde\varepsilon(r,z) = \varepsilon(r + \tau/2, z),\ \varepsilon(r,z) = n^2(r,z) - 1, & z \ne \xi, \\ \dfrac{k_0^2}{2}\left[\dfrac{\tilde\varepsilon(r, \xi - 0)}{\rho_1} + \dfrac{\tilde\varepsilon(r, \xi + 0)}{\rho_2}\right], & z = \xi. \end{cases}$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора, легко показать, что уравнение (38) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1) в узлах, не принадлежащих линии раздела, с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$, и с первым порядком — в противном случае.

Легко видеть, что разностное уравнение (38) принимает вид

$$4ik_0 y_r + \hat y_{\bar z z} + y_{\bar z z} + k_0^2 \tilde\varepsilon(r,z)(\hat y + y) = 0,\ z \ne \xi,$$

$$ik_0\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) y_r + \frac{1}{2h}\left(\frac{1}{\rho_2}(\hat y_z + y_z) - \frac{1}{\rho_1}(\hat y_{\bar z} + y_{\bar z})\right) + \frac{1}{2} d(r,z)(\hat y + y) = 0$$

при $z = \xi$.

Импедансное граничное условие (3) в узлах $(r,z) = (r, z_N)$, $r \in \bar\omega_\tau$, аппроксимируем уравнением

$$2ik_0 h y_r - (\hat y_{\bar z} + y_{\bar z}) + \left(\frac{h}{2} k_0^2 \tilde\varepsilon(r,z) - \tilde\alpha(r)\right)(\hat y + y) = 0,$$

где $\tilde\alpha(r) = \alpha(r + \tau/2)$.

Таким образом, исходной задаче (1)–(3) сопоставим разностную задачу

$$4ik_0 b(z) y_r + ((a\hat y_{\bar z})_z + (ay_{\bar z})_z) + d(r,z)(\hat y + y) = 0,\ (r,z) \in \bar\omega_\tau \times \omega_h, \qquad (39)$$

$$2ik_0 h b_N y_r - a_N(\hat y_{\bar z} + y_{\bar z}) + \left(\frac{h}{2} d_N - \frac{1}{\rho_2}\tilde\alpha(r)\right)(\hat y + y) = 0,$$

$$(r,z) = (r, z_N),\ r \in \bar\omega_\tau, \qquad (40)$$

$$y(r,0) = 0,\ r \in \bar\omega_\tau. \qquad (41)$$

Для исследования свойств разностной схемы (39)–(41) введем гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2(\omega_h^+)$ комплекснозначных функций, заданных на сетке ω_h^+. Скалярное произведение и норму в $\mathcal{H}$ определим по формулам

$$[y, v] = (y, v)_{\omega_h} + 0{,}5 h y_N \bar v_N,\ \|[y]\| = [y, y]^{1/2},$$

$$(y, v)_{\omega_h} = \sum_{z \in \omega_h} h y \bar v,\ \|y\|_{L_2(\omega_h)} = (y, y)_{\omega_h}^{1/2},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Учитывая соотношения (39)–(41), задаче (1)–(4) поставим в соответствие двухслойную неявную разностную схему в операторной форме

$$4ik_0 By_r + A(\hat{y}+y)=0,\ \ r\in\overline{\omega}_\tau, \tag{42}$$

$$y^0 \ \text{задано.} \tag{43}$$

Здесь y^0, $y\in\mathcal{H}$, $y^0=\{u(z),\ z\in\omega_h^+\}$, $y=y(r)=\{y(r,z),\ z\in\omega_h^+\}$, $B=b(z)E$, где E — тождественный оператор, а линейный комплекснозначный оператор A действует в пространстве $\mathcal{H}$ и определяется соотношениями

$$Av=\begin{cases}\dfrac{1}{h}a_2 v_z-\dfrac{1}{h^2}a_1 v+d(r,z)v, & z=h,\\ (av_{\bar z})_z+d(r,z)v, & z=z_k,\ k=\overline{2,N-1},\\ -\dfrac{2}{h}a_N v_{\bar z,N}+d_N v_N-\dfrac{2}{h}\dfrac{1}{\rho_2}\tilde{\alpha}(r)v_N, & z=H.\end{cases}$$

Устойчивость по начальным данным будем исследовать в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_D$, определяемом скалярным произведением $(y,v)_D=[Dy,v]$ и нормой $\|[y]\|_D=[Dy,y]^{1/2}$, где D — некоторый (возможно, зависящий от r) самосопряженный положительно-определенный оператор. Применительно к двухслойной схеме (42), (43) равномерная устойчивость по начальным данным в $\mathcal{H}_D$ означает выполнение энергетического неравенства

$$[Dy^{m+1},\ y^{m+1}]^{1/2}\le[Dy^m,\ y^m]^{1/2},\quad m=0,1,2,\ldots$$

Введем в рассмотрение вспомогательный оператор второй разностной производной $\Lambda v=(av_{\bar z})_z$, действующий в пространстве сеточных функций, определенных на сетке $\overline{\omega}_h$ и принимающих нулевое значение при $z=0$.

Имеет место утверждение.

Лемма 3. Пусть $y\in\mathcal{H}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Im}\,(iby_r,(\hat{y}+y))_{\omega_h}=\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{N-1}ihb_k\,y_{r,k}\,\overline{(\hat{y}_k+y_k)}\right\}=\frac{1}{\tau}((b\hat{y},\hat{y})_{\omega_h}-(by,y)_{\omega_h}), \tag{44}$$

$$\operatorname{Im}\,(\Lambda(\hat{y}+y),\hat{y}+y))_{\omega_h}=\frac{2hk_0}{\tau}b_N(|\hat{y}_N|^2-|y_N|^2)+\frac{h}{2}\operatorname{Im}\,(d_N)|\hat{y}_N+y_N|^2-$$
$$-\frac{1}{\rho_2}\operatorname{Im}\,(\tilde{\alpha}(r))|\hat{y}_N+y_N|^2. \tag{45}$$

Доказательство. Для доказательства (44) учтем, что по определению мнимой части

$$\operatorname{Im}\,(ib(z)\,y_r\,\overline{(\hat{y}+y)})=\frac{1}{2}[b(z)(y_r\,\overline{(\hat{y}+y)}+\overline{y_r}\,(\hat{y}+y))].$$

Учитывая далее выражение для оператора разностной производной, после несложных преобразований находим

$$\operatorname{Im}\,(ib(z)\,y_r\,\overline{(\hat{y}+y)})=\frac{1}{\tau}b(z)(|\hat{y}|^2-|y|^2).$$

Следовательно, для мнимой части скалярного произведения $(iby_r,(\hat{y}+y))_{\omega_h}$ получаем

$$\operatorname{Im}\,(iby_r,\hat{y}+y)_{\omega_h}=\frac{1}{\tau}((b\hat{y},\hat{y})_{\omega_h}-(by,y)_{\omega_h}).$$

Для доказательства второго тождества (45) заметим, что

$$\operatorname{Im}\,(\Lambda(\hat{y}+y),\hat{y}+y)_{\omega_h}=\frac{1}{2i}\{(\Lambda(\hat{y}+y),\hat{y}+y)_{\omega_h}-(\hat{y}+y,\Lambda(\hat{y}+y)_{\omega_h}\}.$$

Отсюда, воспользовавшись разностной формулой Грина для комплекснозначных функций [19]

$$(y,(av_{\bar z})_z)_{\omega_h}-((ay_{\bar z})_z,v)_{\omega_h}=$$

$$=-((\bar a-a)\,y_{\bar z},v_{\bar z}]+[y\bar a\bar v_{\bar z}-\bar v a y_{\bar z}]_N-[y_0\bar a_1\bar v_{z,0}-\bar v_0 a_1 y_{z,0}]$$

и учитывая, что $a-\bar a=0$, $v_0=y_0=0$, получаем

$$\operatorname{Im}(\Lambda w,w)_{\omega_h}=\frac{i}{2}a_N[w\bar w_{\bar z}-\bar w w_{\bar z}]_N,\ w=\hat y+y. \tag{46}$$

Применив краевое условие (40), имеем

$$\operatorname{Im}(\Lambda w,w)_{\omega_h}=\frac{i}{2}\left\{w_N\left[-2ik_0hb_N\,\bar y_{r,N}+\frac{h}{2}\overline{d_N\,w_N}-\frac{1}{\rho_2}\overline{\tilde\alpha(r)w_N}\right]-\right.$$

$$\left.-\bar w_N\left[2ik_0hb_N\,y_{r,N}+\frac{h}{2}d_N\,w_N-\frac{1}{\rho_2}\tilde\alpha(r)w_N\right]\right\}=$$

$$=\frac{i}{2}\left\{-2ik_0hb_N[w\bar y_r+\bar w y_r]+\frac{h}{2}|w_N|^2(\overline{d_N}-d_N)+\frac{1}{\rho_2}|w_N|^2(\tilde\alpha(r)-\overline{\tilde\alpha(r)})\right\}.$$

Поскольку

$$[w\bar y_r+\bar w y_r]|_N=\frac{2}{\tau}(|\hat y_N|^2-|y_N|^2),$$

из предыдущего тождества окончательно следует

$$\operatorname{Im}(\Lambda w,w)_{\omega_h}=\frac{2hk_0}{\tau}b_N(|\hat y_N|^2-|y_N|^2)+\frac{h}{2}\operatorname{Im}(d_N)|w_N|^2-\frac{1}{\rho_2}\operatorname{Im}\tilde\alpha(r)|w_N|^2.$$

Перейдем к анализу устойчивости разностной схемы (42), (43) по начальным данным. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 2. Для решения разностной схемы (42), (43) справедливо энергетическое тождество

$$[b\hat y,\hat y]+\frac{\tau}{4k_0}[\operatorname{Im}(d)(\hat y+y),\hat y+y]-\frac{1}{\rho_2}\frac{\tau}{4k_0}\operatorname{Im}(\tilde\alpha)|\hat y_N+y_N|^2=[by,y]. \tag{47}$$

Для доказательства умножим в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ уравнение (42) на величину $w=\hat y+y$. Тогда, отделяя мнимую часть полученного тождества, имеем

$$\operatorname{Im}\{4k_0(iby_r,w)+(\Lambda w,w)+(dw,w)\}=0. \tag{48}$$

Используя далее лемму 3, а также выражение

$$\operatorname{Im}(dw,w)=\operatorname{Im}\left\{\sum_{k=1}^{N-1}hd_k^n w_k^{n+1}\overline{(w_k^{n+1})}\right\}=||(\operatorname{Im}d)^{1/2}(\hat y+y)||^2,$$

тождество (48) преобразуем к виду

$$(b\hat y,\hat y)_{\omega_h}+\frac{h}{2}b_N|\hat y_N|^2+\frac{\tau}{4k_0}[(\operatorname{Im}(d)w,w)+\frac{h}{2}\operatorname{Im}(d_N)|w_N|^2]-$$

$$-\frac{1}{\rho_2}\frac{\tau}{4k_0}\operatorname{Im}\tilde\alpha(r)|w_N|^2=(by,y)_{\omega_h}+\frac{h}{2}b_N|y_N|^2.$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

На основании тождества (47) можно установить единственность и равномерную устойчивость разностной схемы (42), (43) по начальным данным в норме энергетического пространства комплекснозначных функций $\mathcal{H}_B$ со скалярным произведением и нормой соответственно:

$$[By, v] = (by, v)_{\omega_h} + 0{,}5hb_N\, y_N\, \bar{v}_N\,,\ \ |[\,y]|_B = [By, y]^{1/2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. Разностная схема (42), (43) имеет единственное решение.

Теорема 4. Разностная схема (42), (43) равномерно устойчива по начальным данным в норме $\mathcal{H}_B$, и для ее решения имеет место априорная оценка

$$|[\,y^{m+1}\,]|_B \le |[\,y^m\,]|_B\,,\ \ m = 0, 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Прямым следствием неравенства (49) является оценка

$$|[\,y^m\,]|_B \le |[\,y^0\,]|_B\,,\ \ m = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

выражающая устойчивость разностной схемы (42), (43) по начальным данным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 264 с.
2. Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Дж.Б. Келлера и Дж. Пападакиса. — М.: Мир, 1980. — 230 с.
3. Тапперт Ф.Д. Метод параболического уравнения // Распространение волн в подводной акустике. — М.: Мир, 1980. — С. 180–226.
4. Завадский В.Ю. Моделирование волновых процессов. — М.: Наука, 1991. — 368 с.
5. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. — Киев: Наук. думка, 2001. — 452 с.
6. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Численное исследование экстремальных задач теории излучения звука в плоском волноводе // Мат. моделирование. — 1991. — **3**, № 12. — С. 52–64.
7. Алексеев Г.В., Комашинская Т.С., Синько В.Г. Распределенные вычисления в задачах активной минимизации звука в двумерном многомодовом волноводе // Сиб. журн. индустр. математики. — 2004. — **7**, № 2. — С. 9–22.
8. Данилов В.Я., Кравцов Ю.А., Наконечный А.Г. Математические аспекты управления гидроакустическими полями // Формирование акустических полей в океанических волноводах. — Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. — С. 32–55.
9. Bermudez A., Gamallo P., Rodriguez R. Finite element methods in local active control of sound // SIAM J. Control and Optim. — 2004. — **43**, N 2. — P. 437–465.
10. Савенкова А.С. Мультипликативное управление в задаче рассеяния для уравнения Гельмгольца // Сиб. журн. индустр. математики. — 2007. — **10**, № 1. – С. 128–139.
11. Lee D., Mc Daniel S.T. Ocean acoustic propagation by finite difference method // Comput. Math. Appl. — 1987. — **14**. — P. 305–423.
12. Гладкий А.В., Скопецкий В.В., Подласов Е.С. Численное моделирование волновых процессов в неоднородных средах с импедансной границей // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 4. — С. 41–50.
13. Гладкий А.В., Скопецкий В.В., Харрисон Д.А. Анализ и формирование акустических полей в неоднородных волноводах // Там же. — 2009. — № 2. — С. 63–71.
14. Lee D., Pierse A.D., Shang E.C. Parabolic equation development in the twentieth Century // J. Comput. Acoust. — 2000. — **1**, N 4. — P. 527–637.
15. Meyer M., Hermand J.-P. Optimal nonlocal boundary control of the wide-angle parabolic equation for inversion of a waveguide acoustic field // J. Acoust. Soc. Amer. — 2005. — **117**, N 5. — P. 2937–2948.
16. Meyer M., Hermand J.-P., Asch M., Le Gac J.-C. An analytic multiple frequency adjoint-based inversion algorithm for parabolic-type approximations in ocean acoustics // Inverse Probl. Sci. and Eng. — 2006. — **14**, N 3. — P. 245–265.
17. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
18. Васильев П.Ф. Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
19. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 416 с.

Поступила 10.01.2012