УДК 539.3

А. Я. Григоренко, Л. В. Соколова, М. В. Романишин

Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной толщины на основе уточненной модели

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Развивается численно-аналитический подход для исследования свободных колебаний конических изотропных оболочек переменной толщины на основе уточненной модели, который базируется на сплайн-аппроксимации неизвестных функций. Расчеты произведены для разных типов граничных условий. Исследовано влияние переменной толщины на характер поведения динамических характеристик конических оболочек. Проведено сравнение значений динамических характеристик для конических оболочек постоянной и переменной толщины.

Конические оболочки переменной толщины находят широкое применение во многих отраслях современной техники. Одним из важных аспектов обеспечения прочности оболочек является получение информации об их свободных колебаниях.

Обзор исследований по свободным колебаниям оболочек приведен в [1–3].

Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек с переменной толщиной связано с большими трудностями вычислительного характера. В рамках классической теории оболочек такой подход был применен в [4].

В данной работе проводится исследование свободных колебаний конических оболочек с переменной толщиной на основе уточненной модели [5], предлагается эффективная численная методика исследования свободных колебаний конических оболочек переменной жесткости. В основу методики положено применение сплайн-аппроксимации и метода коллокации, с помощью которых исходная краевая задача на собственные значения для систем дифференциальных уравнений в частных производных сводится к соответствующей задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4, 6]. Последняя решается численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Предлагаемая методика позволяет провести исследование свободных колебаний конических оболочек с произвольным законом изменения толщины при сложных граничных условиях.

Исходные соотношения. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях изотропной конической оболочки переменной толщины $h(s, \theta)$ в криволинейной ортогональной системе координат (s, θ), где s — длина дуги меридиана; θ — центральный угол в параллельном круге. Параметры Ламе в данном случае равны: $A = 1$, $B = r$.

Согласно теории Тимошенко–Миндлина [4], уравнения, описывающие свободные колебания конических оболочек, будут иметь вид:

$$r\frac{\partial N_s}{\partial s} + \cos\varphi N_s - N_\theta \cos\varphi + \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \cos\varphi N_{s\theta} + \cos\varphi N_{\theta s} + \sin\varphi Q_\theta = r\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$r\frac{\partial Q_s}{\partial s} + \cos\varphi Q_s + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \sin\varphi N_\theta = r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$
$$r\frac{\partial M_s}{\partial s} + \cos\varphi M_s + \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} - \cos\varphi M_\theta - rQ_s = \frac{r\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \cos\varphi(M_{s\theta} + M_{\theta s}) + r\frac{\partial M_{s\theta}}{\partial s} - rQ_\theta = \frac{r\rho h^3}{12}\frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где φ — угол, образованный нормалью к координатной поверхности и осью вращения; r — радиус параллельного круга; t — время; u, v, w — перемещение точек срединной поверхности; ρ — плотность материала; ω — частота свободных колебаний оболочки.

Представим связь между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r}u + \frac{\sin\varphi}{r}w, \qquad \varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos\varphi}{r}v,$$
$$\kappa_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s}, \qquad \kappa_\theta = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_s\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\cos\varphi + w\sin\varphi\right)\right\},$$
$$2\kappa_{s\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} - \frac{\psi_\theta}{r}\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\cos\varphi\right), \tag{2}$$
$$\gamma_s = \psi_s - \vartheta_s, \qquad \gamma_\theta = \psi_\theta - \vartheta_\theta, \qquad \vartheta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}, \qquad \vartheta_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v\sin\varphi}{r},$$

где ϑ_s, ϑ_θ — углы поворота нормали без учета поперечных сдвигов; γ_s, γ_θ — углы поворота нормали, вызваные поперечным сдвигом.

Для нормальных и сдвигающих усилий N_s, N_θ, $N_{s\theta}$, $N_{\theta s}$, сгибающих и крутильных моментов M_s, M_θ, $M_{s\theta}$, $M_{\theta s}$, перерезывающие усилий Q_s, Q_θ при условии изотропного материала справедливо такое соотношение:

$$N_s = C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_\theta, \qquad N_\theta = C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_\theta, \qquad N_{s\theta} = C_{66}\varepsilon_{s\theta} + \frac{2\sin\varphi}{r}D_{66}\kappa_{s\theta},$$
$$M_s = D_{11}\kappa_s + D_{12}\kappa_\theta, \qquad M_\theta = D_{12}\kappa_s + D_{22}\kappa_\theta, \qquad M_{s\theta} = M_{\theta s} = 2D_{66}\kappa_{s\theta}, \tag{3}$$
$$Q_s = K_1\gamma_s Q_\theta = K_2\gamma_\theta.$$

Из системы уравнений (1)–(3) получим пять эквивалентных дифференциальных уравнений относительно трех переменных u, v, w точек срединной поверхности оболочки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = F_u\left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}\right),$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = F_v\left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial \theta}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, w, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s\partial \theta}, \psi_\theta, \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s}, \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = F_w\left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, v, \frac{\partial v}{\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \psi_s, \frac{\partial \psi_s}{\partial s}, \psi_\theta, \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right),$$
$$\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \theta^2} = F_{\psi_s}\left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \psi_s, \frac{\partial \psi_s}{\partial s}, \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2}, \right. \tag{4}$$
$$\left. \psi_\theta, \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s}, \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s\partial \theta}\right),$$

$$\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2} = F_{\psi_\theta}\Big(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial\theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial\theta}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial\theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, w, \frac{\partial w}{\partial\theta}, \psi_s, \frac{\partial\psi_s}{\partial s}, \frac{\partial\psi_s}{\partial\theta}, \frac{\partial^2\psi_s}{\partial s\partial\theta},$$
$$\psi_\theta, \frac{\partial\psi_\theta}{\partial s}, \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}, \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial s^2}\Big),$$

где F_u, F_v, F_w, F_{ψ_s}, F_{ψ_θ} — линейные дифференциальные операторы.

На торцах и прямолинейных краях граничные условия могут иметь такой вид:

а) жесткое закрепление

$$u = v = w = \psi_s = \psi_\theta = 0; \tag{5}$$

б) шарнирное опирание

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s} = v = w = \frac{\partial\psi_s}{\partial s} = \psi_\theta = 0 \qquad \text{(на торцах)},\\ &u = \frac{\partial v}{\partial\theta} = w = \psi_s = \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} = 0 \qquad \text{(на прямолинейных контурах)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Методика решения. Решение системы уравнений (5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} &u = \sum_{i=0}^{N} u_i(\theta)\varphi_{1i}(s), \qquad v = \sum_{i=0}^{N} v_i(\theta)\varphi_{2i}(s), \qquad w = \sum_{i=0}^{N} w_i(\theta)\varphi_{3i}(s),\\ &\psi_s = \sum_{i=0}^{N} \psi_{si}(\theta)\varphi_{4i}(s), \qquad \psi_\theta = \sum_{i=0}^{N} \psi_{\theta i}(\theta)\varphi_{5i}(s), \end{aligned} \tag{7}$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$, ψ_{si}, $\psi_{\theta i}$ $(i = 0, \ldots, N)$ — искомые функции; $\varphi_{ji}(s)$ $(j = 1, \ldots, 5)$ — функции, построенные с помощью B-сплайнов третьей степени ($N \geqslant 4$). Выбор функций $\varphi_{ji}(s)$ $(j = 1, \ldots, 5)$ обусловлен требованиями удовлетворить граничные условия при $s = \mathrm{const}$ с помощью линейных комбинаций B-сплайнов 3-й степени.

Подставив (7) в уравнения (4), требуем, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k \in [s_a, s_b]$, $k = 0, \ldots, N$. В случае четного числа узлов сетки ($N = 2n + 1$, $n \geqslant 3$) и при условии, что узлы коллокации удовлетворяют требованиям $\xi_{2i} \in [s_{2i}, s_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [s_{2i}, s_{2i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n)$, на отрезке сетки $[s_{2i}, s_{2i+1}]$ имеем два узла коллокации, а на соседних отрезках $[s_{2i+1}, s_{2i+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков сетки $[s_{2i}, s_{2i+1}]$ точки коллокации выбираются следующим образом: $\xi_{2i} = s_{2i} + z_1 h$, $\xi_{2i+1} = s_{2i} + z_2 h$ $(i = 0, \ldots, n)$, где h — шаг сетки; z_1 и z_2 — корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке [0, 1], которые равняются: $z_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$ и $z_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно повышает порядок точности аппроксимации. После всех преобразований получим систему $N + 1$ линейных дифференциальных уравнений относительно u_i, v_i, $w_i\psi_{si}$, $\psi_{\theta i}$. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} &\Phi_{lj} = [\varphi_{ij}^{(l)}(\xi_k)]i, \qquad k = 0, \ldots, N, \qquad l = 0, \ldots, 2,\\ &\overline{u}^T = \{u_0, \ldots, u_N\}\overline{v}^T = \{v_0, \ldots, v_N\}\overline{w}^T = \{w_0, \ldots, w_N\},\\ &\overline{\psi}_s^T = \{\psi_{s0}, \ldots, \psi_{sN}\}\overline{\psi}_\theta^T = \{\psi_{\theta 0}, \ldots, \psi_{\theta N}\}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{a}_{1r}^T = \{a_{1r}(\theta,\xi_0),\ldots,a_{1r}(\theta,\xi_N)\}, \qquad r=1,\ldots,10,\\
&\overline{a}_{2r}^T = \{a_{2r}(\theta,\xi_0),\ldots,a_{2r}(\theta,\xi_N)\}, \qquad r=1,\ldots,15,\\
&\overline{a}_{3r}^T = \{a_{3r}(\theta,\xi_0),\ldots,a_{3r}(\theta,\xi_N)\}, \qquad r=1,\ldots,12,\\
&\overline{a}_{4r}^T = \{a_{4r}(\theta,\xi_0),\ldots,a_{4r}(\theta,\xi_N)\}, \qquad r=1,\ldots,18,\\
&\overline{a}_{5r}^T = \{a_{5r}(\theta,\xi_0),\ldots,a5_{1r}(\theta,\xi_N)\}, \qquad r=1,\ldots,18,\\
&\overline{a}_{111}^T = \{a_{111}(\theta,\xi_0,\omega),\ldots,a_{111}(\theta,\xi_N,\omega)\}, \qquad \overline{a}_{216}^T = \{a_{217}(\theta,\xi_0,\omega),\ldots,a_{216}(\theta,\xi_N,\omega)\},\\
&\overline{a}_{313}^T = \{a_{313}(\theta,\xi_0,\omega),\ldots,a_{313}(\theta,\xi_N,\omega)\}, \qquad \overline{a}_{419}^T = \{a_{419}(\theta,\xi_0,\omega),\ldots,a_{419}(\theta,\xi_N,\omega)\},\\
&\overline{a}_{519}^T = \{a_{519}(\theta,\xi_0,\omega),\ldots,a_{519}(\theta,\xi_N,\omega)\},
\end{aligned}
$$

а также для матрицы $A=[a_{ij}]$ $(i,\, j=0,\ldots,N)$ и вектора $\overline{c}=\{c_0,\ldots,c_N\}$ обозначить через $\overline{c}\cdot A$ матрицу $[c_i a_{ij}]$, то система дифференциальных уравнений (4) примет вид

$$
\begin{aligned}
u'' &= (\Phi_{01}a_{11}+\Phi_{11}a_{12}+\Phi_{21}a_{14}+\Phi_{01}a_{111})u+(\Phi_{01}a_{13})u'+(\Phi_{02}a_{15}+\Phi_{12}a_{16})v+\\
&\quad+(\Phi_{02}a_{17}+\Phi_{12}a_{18})v'+(\Phi_{03}a_{19}+\Phi_{13}a_{110})w,\\
v'' &= (\Phi_{01}a_{21}+\Phi_{11}a_{22})u+(\Phi_{01}a_{23}+\Phi_{11}a_{24})u'+(\Phi_{02}a_{25}+\Phi_{12}a_{26}+\Phi_{22}a_{28}+\Phi_{02}a_{216})v+\\
&\quad+(\Phi_{02}a_{27})v'+(\Phi_{03}a_{29})w+(\Phi_{03}a_{210})w'+(\Phi_{04}a_{211}+\Phi_{14}a_{212})\psi_s'+\\
&\quad+(\Phi_{05}a_{213}+\Phi_{15}a_{214}+\Phi_{25}a_{215})\psi_\theta,\\
w'' &= (\Phi_{01}a_{31}+\Phi_{11}a_{32})u+(\Phi_{02}a_{33})v+(\Phi_{02}a_{34})v'+(\Phi_{03}a_{35}+\Phi_{13}a_{36}+\Phi_{23}a_{38}+\\
&\quad+\Phi_{03}a_{313})w+(\Phi_{03}a_{37})w'+(\Phi_{04}a_{39}+\Phi_{14}a_{310})\psi_s+(\Phi_{05}a_{311})\psi_\theta+(\Phi_{05}a_{312})\psi_\theta', \qquad (8)\\
\psi_s'' &= (\Phi_{01}a_{41}+\Phi_{11}a_{42}+\Phi_{21}a_{44})u+(\Phi_{01}a_{43})u'+(\Phi_{02}a_{45}+\Phi_{12}a_{46})v+\\
&\quad+(\Phi_{02}a_{47}+\Phi_{12}a_{48})v'+(\Phi_{03}a_{49}+\Phi_{13}a_{410})w+(\Phi_{04}a_{411}+\Phi_{14}a_{412}+\Phi_{24}a_{414}+\\
&\qquad+\Phi_{04}a_{419})\psi_s+(\Phi_{04}a_{413})\psi_s'+(\Phi_{05}a_{415}+\Phi_{15}a_{416})\psi_\theta+(\Phi_{05}a_{417}+\Phi_{15}a_{418})\psi_\theta',\\
\psi_\theta'' &= (\Phi_{01}a_{51}+\Phi_{11}a_{52})u+(\Phi_{01}a_{53}+\Phi_{11}a_{54})u'+(\Phi_{02}a_{55}+\Phi_{12}a_{56}+\Phi_{22}a_{58})v+\\
&\quad+(\Phi_{02}a_{57})v'+(\Phi_{03}a_{59})w+(\Phi_{03}a_{510})w'+(\Phi_{04}a_{511}+\Phi_{14}a_{512})\psi_s+(\Phi_{04}a_{513}+\\
&\quad+\Phi_{14}a_{514})\psi_s'+(\Phi_{05}a_{515}+\Phi_{15}a_{516}+\Phi_{25}a_{518}+\Phi_{05}a_{519})\psi_\theta+(\Phi_{05}a_{517})\psi_\theta'.
\end{aligned}
$$

Полученную систему (8) обыкновенных дифференциальных уравнений можно привести к нормальному виду:

$$
\frac{d\overline{Y}}{d\theta} = A(\theta,\omega)\overline{Y} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant b), \tag{9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\overline{Y}^T = \{&u_0,\ldots,u_N,u_0',\ldots,u_N',v_0,\ldots,v_N,v_0',\ldots,v_N',w_0,\ldots,w_N,w_0',\ldots,w_N';\psi_{s0},\ldots,\\
&\ldots,\psi_{sN},\psi_{s0}',\ldots,\psi_{sN}',\psi_{\theta 0},\ldots,\psi_{\theta N},\psi_{\theta 0}',\ldots,\psi_{\theta N}'\};
\end{aligned}
$$

$A(\theta,p)$ — квадратная матрица порядка $10(N+1)\times 10(N+1)$.

Граничные условия (5), (6) для системы (9) можно записать в виде

$$B_1\overline{Y}(0) = \overline{0}, \qquad B_2\overline{Y}(b) = \overline{0}. \tag{10}$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) с граничными условиями (10) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Решение задач. Анализ результатов. Упругие характеристики материала исследуемых оболочек таковы: $E = 1$; $\nu = 0{,}3$; $\rho = 1$.

Расчеты проведены по методу сплайн-коллокации при разном количестве точек коллокации практически совпадают ($N = 8$; 10; 14). Данные расчетов приведены для $N = 10$.

Оценка достоверности получаемых результатов осуществлялась путем сравнения частот цилиндрической оболочки ($R = 10$, $L = 20$, $h_0 = 2$) с частотами близких к ней конических оболочек эквивалентной массы со следующими геометрическими параметрами: $R = 10$, $L = 20$, $h_0 = 2$, угол конусности $\beta = 1^\circ$ (будем обозначать такой вариант геометрических параметров — C); $R = 10$, $L = 20$, $h_0 = 2$, $\beta = 2{,}5^\circ$ (будем обозначать такой вариант геометрических параметров — D). Рассматривался случай шарнирного опирания всех контуров. Для цилиндрической панели задача решалась путем аппроксимации функций перемещений двойными рядами Фурье:

$$\begin{gathered}
u = \sum_i \sum_j a_{kn} \cos(n\theta) \cos\left(\frac{\pi k}{L} s\right), \qquad v = \sum_i \sum_j b_{kn} \sin(n\theta) \sin\left(\frac{\pi k}{L} s\right), \\
w = \sum_i \sum_j c_{kn} \cos(n\theta) \sin\left(\frac{\pi k}{L} s\right), \qquad \psi_s = \sum_i \sum_j d_{kn} \cos(n\theta) \cos\left(\frac{\pi k}{L} s\right), \\
\psi_\theta = \sum_i \sum_j e_{kn} \cos(n\theta) \cos\left(\frac{\pi k}{L} s\right).
\end{gathered} \tag{11}$$

Решение этой системы осуществлялось методом пошагового поиска и сравнивалось с частотами, полученными методом сплайн-коллокации для данной оболочки и близкими к ней коническими оболочками. В табл. 1 приведены следующие результаты расчета собственных частот для указанных граничных условий: A — задача решалась для случая цилиндрической оболочки с помощью аналитического подхода; B — задача решалась для случая цилиндрической оболочки с помощью предложенной численной методики; C, D — задача решалась для случая конических оболочек, геометрические параметры которых близки к рассматриваемой цилиндрической панели. Результаты приведены для частотного параметра $\Omega_m = \omega_m H_0 \sqrt{\rho/G_0} \cdot 10^2$ (m — номер частоты).

На основании предлагаемой методики были исследованы свободные колебания конической изотропной оболочки, жестко закрепленной по всем контурам с переменной в окружном

Таблица 1

Ω_m	A	B	C	D
Ω_1	7,01	7,08	7,06	7,03
Ω_2	9,09	9,39	9,21	8,94
Ω_3	9,86	9,87	9,83	9,57
Ω_4	9,99	10,00	9,85	9,82

Таблица 2

Ω_m	α				
	0	0,05	0,1	0,15	0,2
Ω_1	7,85	7,82	7,76	7,67	7,56
Ω_2	8,20	8,21	8,23	8,25	8,26
Ω_3	9,09	9,09	9,10	9,11	9,13

направлении толщиной со следующими геометрическими параметрами: $R = 10$, $L = 20$, $\beta = \pi/6$, где L — длина образующей; R_0 — начальный радиус; β — угол конусности.

Толщина исследуемой оболочки изменяется по следующему закону:

$$h = h_0(1 + \alpha \cos\theta), \tag{12}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}2$; l — длина образующей; h_0 — толщина оболочки постоянной толщины и эквивалентной массы (в расчетах $h_0 = 2$). Результаты расчетов собственных частот указанных выше конических оболочек с соответствующими граничными условиями для различных значений параметра α приведены в табл. 2.

На основании данных в табл. 2 можно проследить характер различия значений собственных частот конических оболочек с переменной толщиной относительно оболочек с постоянной толщиной. Наблюдается уменьшение значения первой частоты и возростание значений второй и третьей частот при увеличении параметра α и на более высоких частотах.

1. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
2. *Leissa A. W.* Vibration of shells. – NASA SP – **288**. – Washington: US Government Printing Office, 1973. – 428 p.
3. *Qatu M. S.* Recent research advance in the dynamic behavior of shells: 1989–2000 // Appl. Mech. Rev. – 2002. – P. 415–434.
4. *Григоренко А. Я., Мальцев С. А.* Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной толщины // Доп. НАН України. – 2009. – № 7. – С. 63–69.
5. *Mindlin R. D.* An introduction to the mathematical theory of elastic plates. – Singapore: World Scientific, 2006. – 211 p.
6. *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L., Sokolova L. V.* On one approach to studying free vibrations of cylindrical sheels of variable thickness in the circumferential direction within a refined statement // J. of Math. Sci. – 2010. – No 4. – P. 548–553.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.02.2013

О. Я. Григоренко, Л. В. Соколова, М. В. Романішин

Розв'язання задач про вільні коливання конічних оболонок змінної товщини на основі уточненої моделі

Розвинуто чисельно-аналітичний підхід для дослідження вільних коливань конічних ізотропних оболонок змінної товщини на основі уточненої моделі, який базується на сплайн-апроксимації невідомих функцій. Розрахунки виконано для різних типів граничних умов. Досліджено вплив змінної товщини на характер поведінки динамічних характеристик конічної оболонки. Проведено порівняння значень динамічних характеристик для конічних оболонок сталої та змінної товщини.

A. Ya. Grigorenko, L. V. Sokolova, M. V. Romanishyn

Solving the problems of free vibrations of conical shells with variable thickness on the basis of a refined model

The paper considers free vibrations of thick conical shells with variable thickness within a refined model. The method of spline-approximation is used. Calculations were carried out for different types of boundary conditions. The influence of a variable thickness of shells on free vibrations is studied. The dynamical characteristics of conical shells with constant or variable thickness are compared.