УДК 517.9+531.19+530.145

М. С. Боровченкова, В. І. Герасименко

Границя Больцмана–Греда рівняння Енскога одновимірних гранульованих газів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Побудовано скейлінгову границю Больцмана–Греда розв'язку задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння Енскога системи твердих куль з дисипативною взаємодією. Обгрунтовано кінетичне рівняння Больцмана та встановлено властивість поширення хаосу для гранульованих газів у одновимірному просторі.

Однією з актуальних проблем сучасної математичної фізики є математичне обгрунтування нелінійних кінетичних рівнянь для м'якої конденсованої речовини, зокрема гранульованих газів і сипучих (гранульованих) середовищ [1, 2].

Оскільки колективна поведінка гранульованих газів відрізняється від статистичної поведінки звичайних газів, то типові властивості таких систем моделюються за допомогою системи твердих куль із непружним розсіянням (дисипативною взаємодією) [3]. У сучасних працях з теорії гранульованих газів [2, 4, 5] в основу опису еволюції станів твердих куль з дисипативною взаємодією покладено апріорі сформульовані кінетичні рівняння типу Больцмана та Енскога.

Строгий метод обгрунтування таких кінетичних рівнянь полягає в побудові скейлінгової границі розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ [6, 7]. Відомо, що динаміка одновимірної системи пружно взаємодіючих твердих куль у скейлінговій границі Больцмана–Греда є тривіальною (потік Кнудсена) [6]. Але, як було встановлено в статті [8], кінетична еволюція одновимірної системи твердих куль, які непружно розсіюються, є нетривіальною і описується рівнянням Больцмана для гранульованих газів.

Зауважимо, що системі твердих куль в одновимірному просторі властива типова колективна поведінка гранульованих газів. Строгий підхід до опису одновимірних гранульованих газів за допомогою рівняння Больцмана розвинуто в роботі [9].

В статті [10] було обгрунтовано немарковське кінетичне рівняння Енскога, яким еволюція станів одновимірних гранульованих газів описується в еквівалентний спосіб до ієрархії рівнянь ББГКІ для маргінальних функцій розподілу. Мета даної роботи полягає в побудові скейлінгової границі Больцмана–Греда розв'язку задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння Енскога і обгрунтуванні рівняння Больцмана для систем частинок з дисипативною взаємодією в одновимірному просторі.

Розглянемо одновимірну систему ідентичних твердих куль (твердих стрижнів) одиничної маси з діаметром (довжиною) $\sigma > 0$. Кожна тверда куля характеризується фазовими координатами $(q_i, v_i) \equiv x_i \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i \geqslant 1$. У результаті непружного зіткнення в одновимірному просторі значення швидкостей твердих куль змінюються в такий спосіб:

$$
\begin{aligned}
v_i^* &= v_j + \varepsilon(v_i - v_j),\\
v_j^* &= v_i - \varepsilon(v_i - v_j),
\end{aligned}
$$

де коефіцієнт ε характеризує величину непружності розсіяння ($\varepsilon = (1-e)/2 \in [0, 1/2)$, e — коефіцієнт відновлення [3]). Відповідно, значення швидкостей твердих куль до зіткнення визначаються такими виразами:

$$v_i^{\diamond} = v_j + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}(v_i - v_j), \qquad v_j^{\diamond} = v_i - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}(v_i - v_j). \tag{1}$$

Динаміка скінченної кількості твердих куль, які непружно розсіюються, побудована в роботах [7, 9] і описується за допомогою напівгрупи операторів $S_n(t, 1, \ldots, n)$, яка визначена майже скрізь на фазовому просторі, як оператор зсуву вздовж фазових траєкторій системи. Спряжена напівгрупа операторів $S_n^*(t, 1, \ldots, n)$ визначається в сенсі функціонала середніх значень спостережуваних системи [6]. Властивості таких напівгруп операторів у відповідних функціональних просторах описано в [10].

Якщо початковий стан гранульованого газу в одновимірному просторі описується в термінах одночастинкової маргінальної функції розподілу, то при $t \geqslant 0$ еволюція всіх можливих станів може бути описана за допомогою задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння Енскога [10]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F_1(t, x_1) = &-v_1\frac{\partial}{\partial q_1}F_1(t, x_1) + \\ &+ \int\limits_0^{\infty} dV\, V\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}F_2(t, q_1, v_1^{\diamond}(v_1, V), q_1 - \epsilon, v_2^{\diamond}(v_1, V) \mid F_1(t)) - \\ &\qquad - F_2(t, q_1, v_1, q_1 - \epsilon, v_1 + V \mid F_1(t))\Big) + \\ &+ \int\limits_0^{\infty} dV\, V\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}F_2(t, q_1, \widetilde{v}_1^{\diamond}(v_1, V), q_1 + \epsilon, \widetilde{v}_2^{\diamond}(v_1, V) \mid F_1(t)) - \\ &\qquad - F_2(t, q_1, v_1, q_1 + \epsilon, v_1 - V \mid F_1(t))\Big),\end{aligned} \tag{2}$$

$$F_1(t, x_1)_{|t=0} = F_1^{\epsilon,0}(x_1), \tag{3}$$

де $\epsilon > 0$ — скейлінговий параметр (відношення діаметра $\sigma > 0$ до середньої довжини вільного пробігу твердої кулі) і для значень перетворених швидкостей твердих куль до зіткнення використано такі позначення:

$$v_1^{\diamond}(v_1, V) = v_1 - V + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}V, \qquad v_2^{\diamond}(v_1, V) = v_1 - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}V,$$

та

$$\widetilde{v}_1^{\diamond}(v_1, V) = v_1 + V - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}V, \qquad \widetilde{v}_2^{\diamond}(v_1, V) = v_1 + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}V.$$

Структура інтеграла зіткнень кінетичного рівняння (2) визначається у випадку $s = 2$ маргінальними функціоналами стану $F_s(t, x_1, \ldots, x_s \mid F_1(t))$, $s \geqslant 2$, які зображуються такими рядами за добутками одночастинкової функції розподілу $F_1(t)$ [10]:

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s \mid F_1(t)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^n} dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(t, x_i), \tag{4}$$

де $\{Y\}$ — множина, яка складається з одного елемента $Y \equiv (1,\dots,s)$, тобто $|\{Y\}| = 1$, $(\{Y\}, X \setminus Y) \equiv (\{Y\}, s+1,\dots,s+n)$ та твірний еволюційний оператор $(n+1)$-го порядку $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, визначається таким розкладом:

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y) = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{m_1=1}^{n}\cdots\sum_{m_k=1}^{n-m_1-\dots-m_{k-1}}\frac{1}{(n-m_1-\dots-m_k)!}\times$$
$$\times\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-m_1-\dots-m_k}(t,\{Y\},s+1,\dots,s+n-m_1-\dots-m_k)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{k}\sum_{k_2^j=0}^{m_j}\cdots\sum_{k^j_{n-m_1-\dots-m_j+s}=0}^{k^j_{n-m_1-\dots-m_j+s-1}}\frac{1}{(k^j_{n-m_1-\dots-m_j+s}-k^j_{n-m_1-\dots-m_j+s+1})!}\cdots$$
$$\cdots\frac{1}{(k_1^j-k_2^j)!}\widehat{\mathfrak{A}}_{1+k^j_{n-m_1-\dots-m_j+s+1-i_j}-k^j_{n-m_1-\dots-m_j+s+2-i_j}}(t,i_j,s+n-m_1-\dots-$$
$$-\dots-m_j+1+k^j_{s+n-m_1-\dots-m_j+2-i_j},\dots,s+n-m_1-\dots-$$
$$-\dots-m_j+k^j_{s+n-m_1-\dots-m_j+1-i_j}),\qquad s\geqslant 2,\qquad n\geqslant 0. \tag{5}$$

У виразі (5) оператор $\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t)$ — кумулянт розсіяння:

$$\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y) \doteq \mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y)\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{(s+n)}\setminus\mathbb{W}_{s+n}}\prod_{i=1}^{s+n}\mathfrak{A}_1^{-1}(t,i), \tag{6}$$

який визначається кумулянтом $(n+1)$-го порядку напівгруп операторів системи скінченної кількості твердих куль $S_n^*(t)$:

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t,\{Y\},X\setminus Y) = \sum_{\mathtt{P}\colon(\{Y\},X\setminus Y)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|\mathtt{P}|-1}(|\mathtt{P}|-1)!\prod_{X_i\subset\mathtt{P}}S^*_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i)), \tag{7}$$

де $\sum_{\mathtt{P}}$ — сума за усіма можливими розбиттями $\mathtt{P}$ множини $(\{Y\},X\setminus Y) \equiv (\{Y\},s+1,\dots,s+n)$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин $X_i \in (\{Y\},X\setminus Y)$, які взаємно не перетинаються, та відображення декластеризації θ визначається згідно з формулою $\theta(\{Y\},X\setminus Y) \doteq X$. В означенні (6) також використано обернену напівгрупу операторів вільного руху:

$$\mathfrak{A}_1^{-1}(t,i)f_{s+n} = S_1(t,i)f_{s+n} \doteq f_{s+n}(x_1,\dots,x_{i-1},q_i+v_it,v_i,x_{i+1},\dots,x_{s+n}),$$

та функцію Хевісайда $\mathcal{X}_{\mathbb{R}^{s+n}\setminus\mathbb{W}_{s+n}}$ дозволених конфігурацій системи $s+n$ твердих куль.

Якщо $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})} < e^{-(3s+2)}$, ряд (4) збігається за нормою простору $L^1(\mathbb{R}^s\times(\mathbb{R}^s\setminus\mathbb{W}_s))$ для довільного $t \in \mathbb{R}$ [10].

Типові властивості розв'язку немарковського рівняння Енскога (2) визначаються властивостями твірних еволюційних операторів (5) інтеграла зіткнень кінетичного рівняння.

Розв'язок задачі Коші для немарковського кінетичного рівняння Енскога (2), (3) у просторі інтегрованих функцій існує для довільного $t \in \mathbb{R}^1$ за умови $\|F_1^0\|_{L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} < e^{-1}$ та зображується таким рядом [10]:

$$F_1^\epsilon(t,x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^n} dx_2 \cdots dx_{n+1} \mathfrak{A}_{1+n}(t,1,\ldots,n+1) \prod_{i=1}^{n+1} F_1^{\epsilon,0}(x_i) \mathcal{X}_{\mathbb{R}^{(1+n)}\setminus\mathbb{W}_{1+n}}, \qquad (8)$$

де кумулянти напівгруп операторів $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, визначаються формулою (7).

Нехай початкові одночастинкові маргінальні функції розподілу задовольняють умову

$$|F_1^{\epsilon,0}(x_1)| \leqslant Ce^{-\frac{\beta}{2}v_1^2}, \qquad (9)$$

де $\beta > 0$ — параметр, $C < \infty$ — деяка константа. Тоді кожен член ряду (8) існує, для скінченного інтервалу часу $t \in (0, +t_0)$ ряд (8) є рівномірно збіжним за x_1 з довільного компакта, а функцією (8) визначається слабкий розв'язок немарковського кінетичного рівняння Енскога (2). Доведення цього твердження грунтується на аналогах рівнянь Дюамеля для кумулянтів напівгруп операторів (7) та оцінках, встановлених для ряду ітерацій ієрархії рівнянь ББГКІ для твердих куль [6].

Встановимо асимптотичну поведінку Больцмана–Греда розв'язку (8) немарковського рівняння Енскога для одновимірного гранульованого газу (2). На скінченому інтервалі часу $t \geqslant 0$ справедлива така гранична теорема Больцмана–Греда.

Теорема 1. *Якщо початкова одночастинкова маргінальна функція розподілу* $F_1^{\epsilon,0}$ *задовольняє умову* (9) *та в сенсі слабкої збіжності існує границя*

$$\lim_{\epsilon\to 0}(F_1^{\epsilon,0}(x_1) - f_1^0(x_1)) = 0,$$

то для скінченного інтервалу часу існує границя Больцмана–Греда розв'язку (8) *у сенсі слабкої збіжності*

$$\lim_{\epsilon\to 0}(F_1^{\epsilon}(t,x_1) - f_1(t,x_1)) = 0,$$

де гранична одночастинкова маргінальна функція розподілу визначається рівномірно збіжним на довільному компакті рядом

$$f_1(t,x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^n} dx_2 \cdots dx_{n+1} \mathfrak{A}^0_{1+n}(t,1\ldots,n+1) \prod_{i=1}^{n+1} f_1^0(x_i), \qquad (10)$$

де твірний оператор $\mathfrak{A}^0_{1+n}(t)$ *визначається як кумулянт* $(n+1)$*-го порядку спряжених напівгруп операторів* $S_n^{*,0}(t)$, $n \geqslant 1$, *системи точкових частинок з непружним розсіянням.*

Зауважимо, що генератор напівгрупи операторів $S_n^{*,0}(t)$ визначається таким оператором

$$(\mathcal{L}_n^{*,0} f_n)(x_1,\ldots,x_n) = -\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial q_j} f_n(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j_1<j_2=1}^{n} |v_{j_2} - v_{j_1}| \times$$
$$\times \left(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} f_n(x_1,\ldots,q_{j_1},v_{j_1}^\diamond,\ldots,q_{j_2},v_{j_2}^\diamond,\ldots,x_n) - f_n(x_1,\ldots,x_n)\right)\delta(q_{j_1}-q_{j_2}),$$

де значення швидкостей до зіткнення $v^\diamond$, $v_1^\diamond$ визначаються виразами (1).

Якщо f_1^0 задовольняє умову (9), то для $t \geqslant 0$ гранична одночастинкова функція розподілу, яка зображується рядом (10), є слабким розв'язком задачі Коші для кінетичного рівняння Больцмана одновимірного гранульованого газу:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,q,v) = -v\frac{\partial}{\partial q}f_1(t,q,v) +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dv_1|v-v_1|\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}f_1(t,q,v^\diamond)f_1(t,q,v_1^\diamond) - f_1(t,q,v)f_1(t,q,v_1)\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{I}_0^{(n)}, \quad (11)$$
$$f_1(t)_{|t=0} = f_1^0,$$

де значення швидкостей до зіткнення $v^\diamond$, $v_1^\diamond$ визначаються виразами (1) і залишок інтеграла зіткнень $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{I}_0^{(n)}$ кінетичного рівняння (11) визначається такими виразами:

$$\mathcal{I}_0^{(n)} \equiv \frac{1}{n!}\int\limits_0^{\infty}dV\,V\int\limits_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^n}dx_3\cdots dx_{n+2}\mathfrak{V}_{1+n}(t)\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}F_1(t,q_1,v_1^\diamond(v_1,V))\times$$
$$\times F_1(t,q_1,v_2^\diamond(v_1,V)) - F_1(t,q_1,v_1)F_1(t,q_1,v_1+V)\Big)\prod_{i=3}^{n+2}F_1(t,x_i) +$$
$$+\int\limits_0^{\infty}dV\,V\int\limits_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^n}dx_3\cdots dx_{n+2}\mathfrak{V}_{1+n}(t)\Big(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}F_1(t,q_1,\widetilde{v}_1^\diamond(v_1,V))\times$$
$$\times F_1(t,q_1,\widetilde{v}_2^\diamond(v_1,V)) - F_1(t,q_1,v_1)F_1(t,q_1,v_1-V)\Big)\prod_{i=3}^{n+2}F_1(t,x_i),$$

де твірні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t) \equiv \mathfrak{V}_{1+n}(t,\{1,2\},3,\ldots,n+2)$, $n \geqslant 0$, зображуються розкладами (5) за кумулянтами напівгруп операторів розсіяння одновимірної системи точкових частинок з непружним розсіянням, а саме

$$\widehat{S}_n^0(t,1,\ldots,n) \doteq S_n^{*,0}(t,1,\ldots,n)\prod_{i=1}^{n}S_1^{*,0}(t,i)^{-1}, \qquad n \geqslant 2. \quad (12)$$

З фізичної точки зору розклад інтеграла зіткнень та розв'язок (8) немарковського кінетичного рівняння Енскога для гранульованого газу є розкладом за ступенями густини і, отже, вираз $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{I}_0^{(n)}$ з інтеграла зіткнень рівняння Больцмана (11) складається з поправок за густиною до інтеграла зіткнень рівняння Больцмана одновимірного гранульованого газу, сформульованого з феноменологічних міркувань в роботі [8]. Відзначимо, що в границі пружних зіткнень, тобто $\varepsilon \to 0$, інтеграл зіткнень рівняння Больцмана (11) в одновимірному просторі тотожно дорівнює нулю.

Усі можливі кореляції, які виникають в процесі еволюції гранульованих газів, описуються маргінальними функціоналами стану (4), які визначаються явно за допомогою розв'язку (8) немарковського кінетичного рівняння Енскога (2). Беручи до уваги існування скейлінгової границі (10) розв'язку немарковського кінетичного рівняння Енскога (2), для маргінальних функціоналів стану (4) справедливе таке твердження.

Теорема 2. *За умов попередньої теореми для маргінальних функціоналів стану* (4) *існує границя Больцмана–Греда в сенсі слабкої збіжності в просторі обмежених функцій:*

$$\mathrm{w-}\lim_{\epsilon\to 0}(F_s(t,x_1,\ldots,x_s \mid F_1^{\epsilon}(t)) - f_s(t,x_1,\ldots,x_s \mid f_1(t))) = 0, \qquad s \geqslant 2,$$

та граничні маргінальні функціонали стану $f_s(t \mid f_1(t))$, $s \geqslant 2$, визначаються рядами за добутками одночастинкової функції розподілу (10), *подібними до* (4), *твірні еволюційні оператори яких зображуються розкладами* (5) *за кумулянтами напівгруп операторів розсіяння* (12) *одновимірної системи точкових частинок з непружним розсіянням.*

Зауважимо, що в границі пружних зіткнень граничні маргінальні функціонали стану є добутками одночастинкової функції розподілу невзаємодіючих частинок, що інтерпретується як властивість поширення початкового хаосу [6].

Таким чином, в границі Больцмана–Греда [6] розв'язок (8) немарковського кінетичного рівняння Енскога (2) задовольняє рівняння Больцмана для гранульованого газу (11) в одновимірному просторі, а маргінальні функціонали стану (4) збігаються до відповідних функціоналів від граничної одночастинкової функції розподілу (10), тобто частинки одновимірного гранульованого газу на відміну від багатовимірного випадку не є статистично незалежними.

Зауважимо також, що в роботі сформульовано новий підхід до обгрунтування кінетичного рівняння Больцмана для твердих куль у скейлінговій границі Больцмана–Греда на відміну від традиційного [6].

1. *Villani C.* Mathematics of granular materials // J. Stat. Phys. – 2006. – **124**, No 2–4. – P. 781–822.
2. *Brey J. J., Dufty J. W., Santos A.* Dissipative dynamics for hard spheres // Ibid. – 1997. – **87**. – P. 1051–1068.
3. *Brilliantov N. V., Pöschel T.* Kinetic theory of granular gases. – New York: Oxford Univ. Press, 2004. – 329 p.
4. *Toscani G.* The large-time behavior of nonconservative evolution equations // Kinetic Methods for Nonconservative and Reacting Systems. – Napoli: Seconda Universita di Napoli, 2005. – Vol. 16. – P. 145–320.
5. *Modelling* and numerics of kinetic dissipative systems / Eds. L. Pareschi, G. Russo, G. Toscani. – New York: Nova Science, 2006. – 220 p.
6. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.
7. *Petrina D. Ya.* Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy / Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. – Kyiv, 2008. – 400 p.
8. *Mac Namara S., Young W. R.* Kinetics of a one-dimensional granular medium in the quasielastic limit // Phys. Fluids A. – 1993. – **5**, No 1. – P. 34–45.
9. *Benedetto D., Caglioti E., Pulvirenti M.* Collective behavior of one-dimensional granular media // Modelling in Appl. Sci. – Boston: Birkhäuser, 2000. – P. 81–110.
10. *Borovchenkova M. S., Gerasimenko V. I.* On the kinetic equations of a one-dimensional granular gas // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine. – 2012. – **9**, No 2. – P. 69–86.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка
Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 19.04.2013

М. С. Боровченкова, В. И. Герасименко

Предел Больцмана–Греда уравнения Енскога одномерных гранулированных газов

Построен скейлинговый предел Больцмана–Греда решения задачи Коши для немарковского уравнения Энскога системы твердых шаров с диссипативным взаимодействием. Обосновано кинетическое уравнение Больцмана и установлено свойство распространения хаоса для гранулированных газов в одномерном пространстве.

M. S. Borovchenkova, V. I. Gerasimenko

The Boltzmann–Grad limit of the Enskog equation for one-dimensional granular gases

We construct the Boltzmann–Grad scaling limit of a solution of the Cauchy problem of the non-Markovian Enskog equation for a system of hard spheres with the dissipative interaction. The validity of the Boltzmann kinetic equation is proved, and the property of the propagation of a chaos is established for granular gases in a one-dimensional space.