УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, І. Я. Субботін, В. А. Чупордя, К. О. Гринь

Про деякі питання теорії фаззі-груп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Довільну фаззі-групу можна розглядати як сукупність її фаззі-точок. Запропоновано "точковий" підхід до вивчення структури довільної фаззі-групи, визначеної на абстрактній групі. Розглянуто нормальні, зростаючі та переставні фаззі-підгрупи довільної фаззі-групи, отримано їх характеристики та властивості.

Нехай G — група, на якій задана мультиплікативна бінарна операція. Одиничний елемент G позначатимемо через e, щоб уникнути плутанини з числом 1. Нагадаємо, що фаззі-групою на G називається відображення $\gamma\colon G \to [0,1]$, яке задовольняє такі умови:

(FSG 1) $\gamma(xy) \geqslant \gamma(x) \wedge (y)$ для довільних $x, y \in G$;

(FSG 2) $\gamma(x^{-1}) \geqslant \gamma(x)$ для довільних $x \in G$

(див., наприклад, [1, 1.2]). У російськомовній літературі використовується термін нечітка група, але, на наш погляд, він не зовсім відображає суть, тому ми вважаємо за краще використовувати кальку з англійського терміну.

Тут і далі якщо W є підмножиною $[0,1]$, то $\wedge W$ позначає найбільшу нижню границю W, а $\vee W$ — найменшу верхню границю W. У випадку, коли $W = \{a, b\}$, замість $\wedge W$ (відповідно $\vee W$) будемо писати $a \wedge b$ (відповідно $a \vee b$).

Якщо γ, κ — фаззі-групи на G та $\gamma \subseteq \kappa$, то говоритимемо, що γ є фаззі-підгрупою κ і позначатимемо це символом $\gamma \preceq \kappa$.

Якщо Y — підмножина G та $a \in [0,1]$, то через $\chi(Y, a)$ позначатимемо функцію, визначену за правилом

$$\chi(Y,a) = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad x \in Y, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \notin Y. \end{cases}$$

Якщо H — підгрупа G, то $\chi(H, a)$ — фаззі-група на G. Якщо $Y = \{y\}$, то замість $\chi(\{y\}, a)$ використовуватимемо коротший запис $\chi(y, a)$; $\chi(y, a)$ називається фаззі-точкою.

Нехай L — підгрупа G і γ — фаззі-група на G. Визначимо функцію $L|^{\gamma}\colon G \to [0,1]$ за правилом

$$L|^{\gamma}(x) = \begin{cases} \gamma(x), & \text{якщо} \quad x \in L, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \notin L. \end{cases}$$

Якщо x, y — довільні елементи G, то не важко перевірити, що $L|^{\gamma}(xy) \geqslant L|^{\gamma}(x) \wedge L|^{\gamma}(y)$. Звідси випливає, що $L|^{\gamma}$ буде фаззі-групою на G.

Теорія фаззі-груп, як і інших алгебраїчних фаззі-структур, виникла зразу після виникнення теорії фаззі-множин. У рамках цієї теорії працювало досить багато алгебраїстів, отримано дуже багато різноманітних результатів. Деякі з них були зібрані в книзі [1]. Але це, скоріше, механічне зібрання, результати не систематизовано, їх подання досить хаотичне.

З нашої точки зору, однією з головних задач теорії фаззі-груп є вивчення алгебраїчних властивостей довільних фаззі-груп, які визначені на абстрактній групі G. Тут отримано цілий масив результатів, які стосуються будови найбільшої фаззі-групи $\chi(G, 1)$. Але між $\chi(G, 1)$ та довільною фаззі-групою на G існує велика відмінність. Якщо λ — фаззі-підгрупа фаззі-групи γ, яка визначена на G, має деякі властивості по відношенню до γ, то вона далеко не завжди має ті ж самі властивості по відношенню до $\chi(G, 1)$, і навпаки. Якщо розглядати довільну фаззі-групу γ як множину своїх фаззі-точок, то вона є напівгрупою з одиницею відносно операції множення фаззі-множин. І якщо множина тих елементів найбільшої фаззі-групи $\chi(G, 1)$, які мають обернені, є досить великою (усі фаззі-точки $\chi(g, 1)$, $g \in G$, мають обернені), що дає можливість застосування природної дії групи G на $\chi(G, 1)$, то цього вже не скажеш про довільну фаззі-групу, у якої множина елементів, що мають обернені, може бути дуже малою. Це і пояснює таку велику різницю між кількістю результатів про структуру фаззі-групи $\chi(G, 1)$ та структуру довільної фаззі-групи, що визначена на тій самій групі G. Нашою метою якраз і є розпочати систематичне вивчення будови довільної фаззі-групи, визначеної на абстрактній групі G. Почнемо з необхідних та достатніх умов для того, щоб фаззі-множина була фаззі-групою. Дуже корисним виявився нижченаведений "точковий" критерій. Але спочатку нагадаємо визначення добутку фаззі-множин.

Нехай μ, ν — фаззі-множини на групі G, визначимо операцію $\bullet$ за таким правилом:

$$(\mu \bullet \nu)(x) = \bigvee_{y,z \in G,\ yz=x} (\mu(y) \wedge \nu(z)).$$

Зазначимо, що $(\mu \bullet \nu)(x) = \bigvee_{y \in G} (\mu(y) \wedge \nu(y^{-1}x)) = \bigvee_{z \in G} (\mu(xz^{-1}) \wedge \nu(z)$.

В книзі [1] для позначення цієї операції використовується символ $\circ$, тобто той символ, що стандартно використовується для позначення добутку функцій. Щоб уникнути будь-яких непорозумінь, ми використовуватимемо для операції множення фаззі-множин інший символ.

Твердження 1. *Нехай G — група. Фаззі-множина γ, визначена на G, тоді і тільки тоді є фаззі-групою, коли виконуються такі дві умови:*

(FSG 3) з включень $\chi(x, a), \chi(y, b) \subseteq \gamma$ випливає, що $\chi(x, a) \bullet \chi(y, b) \subseteq \gamma$ для всіх $x, y \in$ $\in \mathrm{Supp}(\gamma)$;

(FSG 4) $\chi(x, a) \subseteq \gamma$ тягне за собою $\chi(x^{-1}, a) \subseteq \gamma$ для кожного $x \in \mathrm{Supp}(\gamma)$.

Розглянемо тепер інше важливе поняття. Нехай γ, κ — фаззі-групи на групі G і $\kappa \preceq \gamma$. Будемо говорити, що κ є нормальною фаззі-підгрупою γ, якщо $\kappa(yxy^{-1}) \geqslant \kappa(x) \wedge \gamma(y)$, для всіх елементів x, $y \in G$ [1, 1.4]. Ми позначатимемо це таким чином: $\kappa \trianglelefteq \gamma$. Для цього поняття ми також отримали "точковий" критерій, який уточнює твердження 3 роботи [2].

Твердження 2. *Нехай G — група, γ, κ — фаззі-групи на G та $\kappa \preceq \gamma$. Якщо κ — нормальна фаззі-підгрупа γ, то $\chi(x, \gamma(x)) \bullet \kappa \bullet \chi(x^{-1}, \gamma(x)) = \kappa$ для кожного елемента $x \in G$. Навпаки, якщо $\chi(x, \gamma(x)) \bullet \kappa \bullet \chi(x^{-1}, \gamma(x)) \preceq \kappa$ для кожного $x \in G$, то κ — нормальна фаззі-підгрупа в γ.*

Нехай γ, κ — фаззі-групи на групі G. Будемо говорити, що γ та κ можна переставити, якщо $\gamma \bullet \kappa = \kappa \bullet \gamma$. Слід зауважити, що у загальному випадку добуток двох фаззі-груп не є фаззі-групою. Має місце таке твердження: добуток двох фаззі-груп γ та κ буде фаззі-групою тоді і тільки тоді, коли $\gamma \bullet \kappa = \kappa \bullet \gamma$ (див., нарпиклад, [1, 4.3]). Якщо $\kappa \preceq \gamma$, то будемо говорити, що κ є переставною в γ, якщо $\lambda \bullet \kappa = \kappa \bullet \lambda$ для кожної $\lambda \preceq \gamma$.

Як ми побачимо далі, важливим прикладом переставних фаззі-підгруп є нормальні фаззі-підгрупи γ. У теорії абстрактних груп властивості переставних підгруп вивчаються досить довгий час. Існує великий масив статей, в яких отримані змістовні результати. Багато з них відображені в монографії [3]. Для переставних фаззі-підгруп ситуація кардинально відрізняється. Як і для багатьох інших властивостей, вивчення переставних фаззі-підгруп проводилось тільки в $\chi(G, 1)$. У роботах [4–7] та [1, 4.3] можна знайти деякі початкові результати для випадку, коли група G є скінченною. Вивчення переставних фаззі-підгруп $\chi(G, 1)$, коли G є довільною (не обов'язково скінченною), було ініційовано в [8, 9]. У даній роботі ми починаємо вивчати переставність у довільній фаззі-групі. Наведений нижче результат дає інформацію про структуру добутку $\gamma \bullet \kappa$.

Теорема 1. *Нехай G — група, γ, κ — фаззі-множини на G. Тоді*

$$\gamma \bullet \kappa = \bigcup_{y \in \mathrm{Supp}(\gamma), z \in \mathrm{Supp}(\kappa)} \chi(y, \gamma(y)) \bullet \chi(z, \kappa(z)).$$

Наслідок. *Нехай G — група.*

Якщо γ, λ, κ — фаззі-множини на G, причому $\lambda \subseteq \kappa$, то $\gamma \bullet \lambda \subseteq \gamma \bullet \kappa$ та $\lambda \bullet \gamma \subseteq \kappa \bullet \gamma$.

Якщо γ, λ_a — фаззі-множини на G, $a \in A$, то $\gamma \bullet \Big(\bigcup_{a \in A} \lambda_a\Big) = \bigcup_{a \in A} (\gamma \bullet \lambda_a)$ *та* $\Big(\bigcup_{a \in A} \lambda_a\Big) \bullet \gamma = \bigcup_{a \in A} (\lambda_a \bullet \gamma)$.

Нижчеподаний результат дає "точковий" критерій для переставності фаззі-підгрупи в довільній фаззі-групі.

Теорема 2. *Нехай G — група та γ — фаззі-група на G. Якщо $\kappa \preceq \gamma$, то κ буде переставною в γ тоді і тільки тоді, коли $\chi(\langle x \rangle, \gamma(x)) \bullet \kappa = \kappa \bullet \chi(\langle x \rangle, \gamma(x))$ для кожного $x \in \mathrm{Supp}(\gamma)$.*

Нехай λ — фаззі-множина на G, $a \in [0, 1]$. Покладемо

$$L_a(\lambda) = \{x \mid x \in G \text{ і } \lambda(x) \geqslant a\}.$$

Підмножина $L_a(\lambda)$ називається a-рівнем λ. Нагадаємо, що якщо γ — фаззі-група на G, то або $L_a(\gamma)$ є підгрупою в G, або $L_a(\gamma) = \varnothing$. За допомогою рівнів можна дати таку характеризацію фаззі-групи: γ є фаззі-групою на G тоді і тільки тоді, коли $L_a(\gamma)$ є підгрупою G для кожного $a \leqslant \gamma(e)$ (див., наприклад, [1, теорема 1.2.6]).

За допомогою поняття рівня отримуємо такий критерій переставності.

Теорема 3. *Нехай G — група та γ — фаззі-група на G. Якщо $\kappa \preceq \gamma$, то κ є переставною в γ тоді і тільки тоді, коли $L_a(\kappa)$ є переставною підгрупою в $L_a(\gamma)$, для кожного $a \leqslant \gamma(e)$.*

Зазначимо, що ця теорема є суттєвим узагальненням головного результату статті [8], у якій були отримані умови переставності фаззі-підгрупи в $\chi(G, 1)$ за деяких додаткових обмежень (так званий sup-property).

Наслідок 1. *Нехай G — група і γ — фаззі-група на G. Якщо її фаззі-підгрупа κ є переставною в γ, то $\mathrm{Supp}(\kappa)$ є переставною підгрупою в $\mathrm{Supp}(\gamma)$.*

Наслідок 2. *Нехай G — група і γ — фаззі-група на G. Якщо її фаззі-підгрупа κ є нормальною в γ, то κ є переставною підгрупою в γ.*

Нехай γ — фаззі-група на G, а μ — фаззі-множина на G та $\mu \subseteq \gamma$. Нагадаємо, що фаззі-підгрупа, породжена μ, це перетин всіх фаззі-підгруп γ, що містять у собі μ. Цю фаззі-підгрупу позначатимемо через $\langle \mu \rangle$. Ми вже зазначали вище, що у випадку, коли γ,

κ — такі фаззі-групи, для яких $\gamma \bullet \kappa = \kappa \bullet \gamma$, то їх добуток $\gamma \bullet \kappa = \kappa \bullet \gamma$ також є фаззі-групою. Але на відміну від абстрактних груп $\gamma \bullet \kappa$ та $\langle \gamma, \kappa \rangle$ не обов'язково збігаються.

Наслідок 3. *Нехай G — група і γ — фаззі-група на G. Якщо її фаззі-підгрупи λ, κ є переставними в γ, то $\langle \lambda, \kappa \rangle$ є переставною підгрупою в γ.*

Як і для абстрактних груп, для фаззі-груп має місце тотожність Дедекінда.

Теорема 4. *Нехай G — група, γ, κ, λ — фаззі-групи на G. Припустимо, що $\kappa \preceq \gamma$ та $\kappa \bullet \lambda = \lambda \bullet \kappa$. Тоді $\gamma \bigcap (\kappa \bullet \lambda) = \kappa \bullet (\gamma \bigcap \lambda)$ та $\gamma \bigcap \langle \kappa, \lambda \rangle = \langle \kappa, \gamma \bigcap \lambda \rangle$.*

Наслідок. *Нехай G — група і γ — фаззі-група на G. Тоді решітка всіх нормальних фаззі-підгруп γ є модулярною.*

У випадку, коли $\gamma = \chi(G, 1)$, останнє твердження було отримано в роботах [10, 11].

Теорема 5. *Нехай G — група та γ — фаззі-група на G. Підгрупа L з $\mathrm{Supp}(\gamma)$ переставна в $\mathrm{Supp}(\gamma)$ тоді і тільки тоді, коли $L|^{\gamma}$ переставна в γ.*

Наслідок 1. *Нехай G — група і γ — фаззі-група на G. Кожна фаззі-підгрупа з γ переставна в γ тоді і тільки тоді, коли кожна підгрупа $\mathrm{Supp}(\gamma)$ є переставною в $\mathrm{Supp}(\gamma)$.*

Цей результат є суттєвим узагальненням теореми 3.2 роботи [8].

Наслідок 2. *Нехай G — група і γ — фаззі-група на G. Якщо кожна фаззі-підгрупа з γ переставна в γ, то G є групою одного з таких типів:*

(I) G — абелева група.

(II) $G = \times_{p \in \Pi(G)} G_p$, де G_p — силовська p-підгрупа G, яка задовольняє такі умови:

(i) якщо $p \neq 2$, то $G_p = B_p \langle a_p \rangle$, де B_p — нормальна абелева підгрупа експоненти p^k, та існує таке натуральне число t, що $t = 1 + p^m$, $m \leqslant k \leqslant m + d$, де $p^d = |G_p/B_p|$ та $a_p^{-1} b a_p = b^t$ для всіх $b \in B_p$;

(ii) якщо $p = 2$, то або G_p — дедекіндова група, або $G_p = B_p \langle a_p \rangle$, де B_p — нормальна абелева підгрупа експоненти p^k, та існує таке натуральне число t, що $t = 1 + p^m$, $2 \leqslant m \leqslant k \leqslant m + d$, де $p^d = |G_p/B_p|$ та $a_p^{-1} b a_p = b^t$ для всіх $b \in B_p$.

В обох випадках G_p є нільпотентною та обмеженою.

(III) G містить у собі таку нормальну абелеву періодичну підгрупу T, що G/T — вільна від скруту та локально циклічна. Більш того, кожна підгрупа T є G-інваріантною.

Нехай γ, κ — фаззі-групи на G та $\kappa \preceq \gamma$. Визначимо нормалізатор $N_\gamma(\kappa)$ фаззі-підгрупи κ в γ як об'єднання всіх фаззі-точок $\chi(x, a) \subseteq \gamma$, які задовольняють таку умову: $\chi(x^{-1}, a) \bullet \kappa \bullet \chi(x, a) = \kappa$.

Теорема 6. *Нехай G — група, γ, κ — фаззі-групи на G та $\kappa \preceq \gamma$. Тоді нормалізатор $N_\gamma(\kappa)$ буде фаззі-підгрупою γ.*

Твердження 2 показує, що κ є нормальною фаззі-підгрупою у своєму нормалізаторі $N_\gamma(\kappa)$.

Нехай γ — фаззі-група на G. Будемо говорити, що γ задовольняє нормалізаторну умову, якщо $N_\gamma(\kappa) \neq \kappa$ для будь-якої фаззі-підгрупи κ з γ.

Теорема 7. *Нехай G — група та γ — фаззі-група на G. Якщо γ задовольняє нормалізаторну умову, то її носій $\mathrm{Supp}(\gamma)$ також задовольняє нормалізаторну умову. Зокрема, $\mathrm{Supp}(\gamma)$ є локально нільпотентною групою.*

Нехай γ — фаззі-група на G. Її фаззі-підгрупа κ називається зростаючою підгрупою в γ, якщо існує зростаючий ряд

$$\kappa = \kappa_0 \trianglelefteq \kappa_1 \trianglelefteq \cdots \kappa_\alpha \trianglelefteq \kappa_{\alpha+1} \trianglelefteq \cdots \kappa_\beta = \gamma.$$

Теорема 8. *Нехай G — група та γ — фаззі-група на G. Кожна фаззі-підгрупа γ є зростаючою тоді і тільки тоді, коли γ задовольняє нормалізаторну умову.*

1. *Mordeson J. N., Bhutani K. R., Rosenfeld A.* Fuzzy group theory. – Berlin: Springer, 2005. – 300 p.
2. *Kurdachenko L. A., Grin K. O., Turbay N. A.* On hypercentral fuzzy groups // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – **13**, No 1. – P. 92–106.
3. *Schmidt R.* Subgroups lattices of groups. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
4. *Asaad M.* Groups and fuzzy subgroups // Fuzzy Sets and Systems. – 1991. – **39**. – P. 323–328.
5. *Asaad M., Abou-Zaid S.* Groups and fuzzy subgroups II // Ibid. – 1993. – **56**. – P. 375–377.
6. *Asaad M., Abou-Zaid S.* Characterization of fuzzy subgroups // Ibid. – 1996. – **77**. – P. 247–251.
7. *Asaad M., Abou-Zaid S.* A contribution to the theory of fuzzy subgroups // Ibid. – 1996. – **77**. – P. 355–369.
8. *Ajmal N., Thomas K. V.* Quasinormality and fuzzy subgroups // Ibid. – 1993. – **58**. – P. 217–225.
9. *Hassan N. H.* On permutable and mutually permutable fuzzy groups // Int. J. Appl. Math. and Statistic. – 2009. – **15**. – P. 556–558.
10. *Ajmal N., Thomas K. V.* The lattice of fuzzy subgroups and fuzzy normal subgroups // Inform. Sci. – 1994. – **76**. – P. 1–11.
11. *Ajmal N.* The lattice of fuzzy normal subgroups is modular // Ibid. – 1995. – **83**. – P. 199–209.

Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 15.02.2013

Л. А. Курдаченко, И. Я. Субботин, В. А. Чупордя, Е. А. Гринь

О некоторых вопросах теории фаззи-групп

Произвольную фаззи-группу можно рассматривать как совокупность ее фаззи-точек. Предложен "точечный" подход к изучению структуры произвольной фаззи-группы, определенной на абстрактной группе. Рассмотрены нормальные, возрастающие и перестановочные фаззи-подгруппы произвольной фаззи-группы, получены их характеристики и свойства.

L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, V. A. Chupordya, K. O. Grin

On some questions in the theory of fuzzy groups

It is possible to consider an arbitrary fuzzy group as the union of its fuzzy points. The authors propose a "point" approach to the study of the structure of an arbitrary fuzzy group defined on an abstract group. Normal, ascendant, and permutable fuzzy subgroups of an arbitrary fuzzy group are considered, and their characteristics and properties have been obtained.