УДК 531

Н. В. Никитина

Об условиях замыкания траектории в трехмерном пространстве

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Приводятся условия существования замкнутой траектории в системе, заданной в трехмерном пространстве. Рассмотрена консервативная система.

Рассматривается неустойчивость вращений твердого тела, которая устанавливается с помощью теоремы о неустойчивости Четаева ([1], с. 27–32). К примеру, который рассмотрен Четаевым, добавляются сведения о замкнутости траектории. Рассмотрены симметрия и бифуркация в трехмерном пространстве, которые определяют сигнатуру спектра характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ) для рассматриваемой системы.

В качестве исходных результатов, необходимых для доказательства симметрии трехмерной траектории, приведем некоторые сведения о принципе симметрии [2].

Запишем двумерную систему в следующем виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x), \qquad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x), \tag{1}$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $F_1 \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $F_2 \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, и $F_i(0,0) = 0$ $(i = 1, 2)$. Геометрический принцип симметрии, на основе которого можно установить условия замыкания фазовой траектории, формулируется так: *в системе* (1) *существует симметрия траектории, если выполняются условия четности функции* $F_1(x)$ *относительно* x_1 *и нечетности функции* $F_2(x)$ *относительно* x_1, т. е.

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2), \qquad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \tag{2}$$

Это утверждение основано на том, что на плоскости Ox_1x_2 ось Ox_2 является осью симметрии, и всякая интегральная кривая слева от оси x_2 является зеркальным отображением кривой справа.

На основе принципа симметрии можно заключить, что *в системе* (1) *существует симметрия траектории, если выполняются условия четности функции* $F_2(x)$ *относительно* x_2 *и нечетности* $F_1(x)$ *относительно* x_2, т. е.

$$F_2(x_1, -x_2) = F_2(x_1, x_2), \qquad F_1(x_1, -x_2) = -F_1(x_1, x_2). \tag{3}$$

Достаточно предположить, что интегральная кривая, начинаясь на оси x_1, при дальнейшем продолжении вновь приходит на ось x_1. Здесь ось Ox_1 является осью симметрии.

Движение твердого тела (случай Эйлера.) Теорема о неустойчивости Четаева [1] применима к задаче о неустойчивости вращения твердого тела вокруг средней оси эллипсоида инерции. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$J_x\frac{d\omega_x}{dt} = (J_y - J_z)\omega_y\omega_z, \qquad J_y\frac{d\omega_y}{dt} = (J_z - J_x)\omega_x\omega_z, \qquad J_z\frac{d\omega_z}{dt} = (J_x - J_y)\omega_x\omega_y. \tag{4}$$

Для эллипсоида инерции механической системы (4) в случае неустойчивости верны неравенства [1]

$$J_x < J_z < J_y. \tag{5}$$

В случае Эйлера оси координат являются главными центральными осями инерции, и уравнения (4) суть дифференциальные уравнения относительно проекций вектора угловой скорости ω. Учитывая неравенство (5) и полагая, что $J_x = J$, $J_z = 2J$, $J_y = 3J$, запишем систему (4) в виде

$$\frac{du}{dt} = vw, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}uw, \qquad \frac{dw}{dt} = -uv, \tag{6}$$

где $u = \omega_x$, $v = \omega_y$, $w = \omega_z$. В уравнениях (6) существует следующая совокупность неизолированных особых точек:

$$u \neq 0, \quad v = 0, \quad w = 0; \qquad v \neq 0, \quad u = 0, \quad w = 0; \qquad w \neq 0, \quad u = 0, \quad w = 0. \tag{7}$$

Для возмущенного движения системы (6) необходимо, чтобы *начальное возмущение было, по крайней мере, по двум координатам.* Тогда изображающая точка не останется в неизолированных особых точках (7). Доказательство неустойчивости системы (6), связанной с неравенством (5), приводится в [1, с. 27] на основе теоремы Четаева.

О существовании в системе (6) *замкнутой траектории.* Обозначим начальные условия в системе (6): при $t = 0$: $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, $w(0) = w_0$.

Введем безразмерные величины $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{t}$ следующим образом: $\overline{u} = u/v_0$, $\overline{v} = v/v_0$, $\overline{w} = w/v_0$, $\overline{t} = tv_0$. Рассмотрим следующие системы: систему из первого и второго уравнений системы (6), которая отображает движение на плоскости uv

$$\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} = \overline{vw}, \qquad \frac{d\overline{v}}{d\overline{t}} = \frac{1}{3}\overline{uw}; \tag{8}$$

систему из второго и третьего уравнений системы (6), которая отображает движение на плоскости vw

$$\frac{d\overline{v}}{d\overline{t}} = \frac{1}{3}\overline{uw}, \qquad \frac{d\overline{w}}{d\overline{t}} = -\overline{uv}; \tag{9}$$

систему из первого и третьего уравнений системы (6)

$$\frac{d\overline{u}}{d\overline{t}} = \overline{vw}, \qquad \frac{d\overline{w}}{d\overline{t}} = -\overline{uv}. \tag{10}$$

Согласно физическому аспекту задачи Эйлера, изображающая точка движется по поверхности. На основании первого интеграла системы (6) поверхность имеет вид

$$\frac{2}{3}u^2 + v^2 + w^2 = \mathrm{const}. \tag{11}$$

При движении по поверхности (11) изображающая точка описывает замкнутую кривую. Запишем систему (6) в общем виде (безразмерные величины здесь и далее приведены без черты сверху)

$$\frac{du}{dt} = Q(u, v, w), \qquad \frac{dv}{dt} = S(u, v, w), \qquad \frac{dw}{dt} = F(u, v, w). \tag{12}$$

При рассмотрении системы вида (8) получим условия четности и нечетности функций $Q(u, v, w)$ и $S(u, v, w)$ относительно u

$$Q(-u, v, w) = Q(u, v, w), \qquad S(-u, v, w) = -S(u, v, w), \tag{13}$$

условия четности и нечетности тех же функций относительно v

$$S(u, -v, w) = S(u, v, w), \qquad Q(u, -v, w) = -Q(u, v, w), \tag{14}$$

которые устанавливают тенденцию к замыканию проекций траектории на плоскости uv с осями симметрии v и u.

При рассмотрении системы вида (9) получим условия четности и нечетности функций $S(u, v, w)$ и $F(u, v, w)$ по отношению к v

$$S(u, -v, w) = S(u, v, w), \qquad F(u, -v, w) = -F(u, v, w), \tag{15}$$

условия четности и нечетности тех же функций относительно w

$$F(u, v, -w) = F(u, v, w), \qquad S(u, v, -w) = -S(u, v, w), \tag{16}$$

которые устанавливают тенденцию к замыканию проекций траектории на плоскости vw с осями симметрии w и v.

При рассмотрении системы вида (10) получим условия четности и нечетности функций $Q(u, v, w)$ и $F(u, v, w)$ по отношению к u

$$Q(-u, v, w) = Q(u, v, w), \qquad F(-u, v, w) = -F(u, v, w), \tag{17}$$

условия четности и нечетности тех же функций относительно w

$$F(u, v, -w) = F(u, v, w), \qquad Q(u, v, -w) = -Q(u, v, w), \tag{18}$$

которые устанавливают тенденцию к замыканию проекций траектории на плоскости uw с осями симметрии w и u.

Сформулируем принцип симметрии с привлечением неповторяющихся условий из приведенных (13)–(18) на правые части уравнений (12).

В системе (12) *существует замкнутая траектория, если в функциях* $Q(u, v, w)$, $S(u, v, w)$, $F(u, v, w)$ *выполняются следующие условия четности:*

$$Q(-u, v, w) = Q(u, v, w), \qquad S(u, -v, w) = S(u, v, w), \qquad F(u, v, -w) = F(u, v, w)$$

и нечетности

$$Q(u, -v, w) = -Q(u, v, w), \qquad Q(u, v, -w) = -Q(u, v, w), \qquad S(-u, v, w) = -S(u, v, w);$$
$$S(u, v, -w) = -S(u, v, w), \qquad F(-u, v, w) = -F(u, v, w), \qquad F(u, -v, w) = -F(u, v, w)$$

относительно переменных u, v, w.

Для замыкания траекторий на плоскости необходимо одно условие четности и нечетности, например (2) или (3). Поэтому количество условий можно уменьшить. Сформулируем принцип симметрии, уменьшая количество условий из приведенных (13)–(18). Остаются

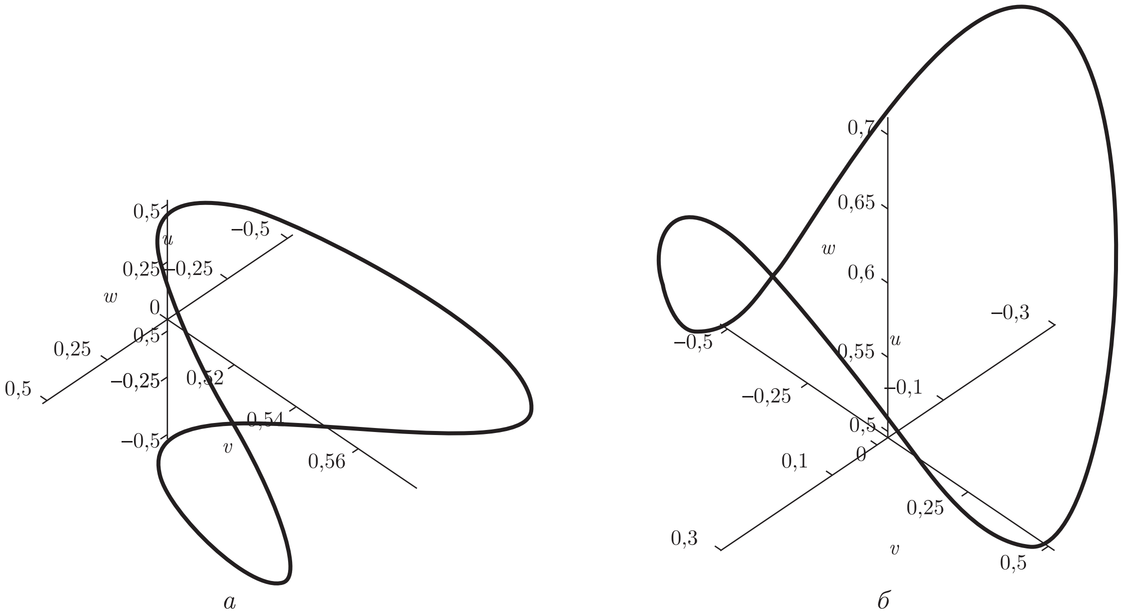


Рис. 1

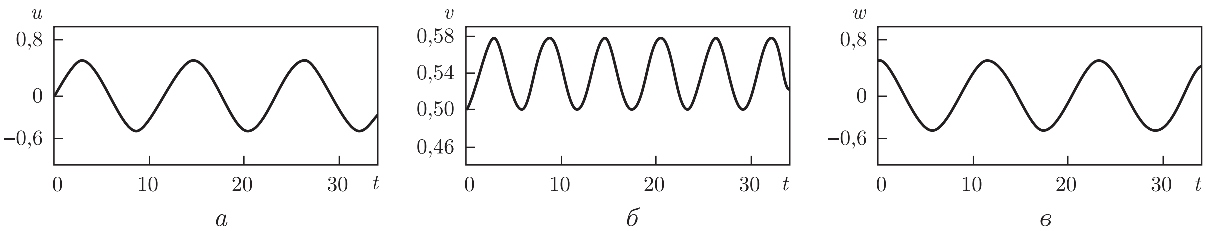


Рис. 2

условия (14) (ось симметрии u), условия (16) (ось симметрии v), условия (17) (ось симметрии w).

В системе (12) *существует замкнутая траектория, если в функциях* $Q(u,v,w)$, $S(u,v,w)$, $F(u,v,w)$ *выполняются следующие условия четности:*

$$Q(-u,v,w) = Q(u,v,w), \quad S(u,-v,w) = S(u,v,w), \quad F(u,v,-w) = F(u,v,w) \tag{19}$$

и нечетности

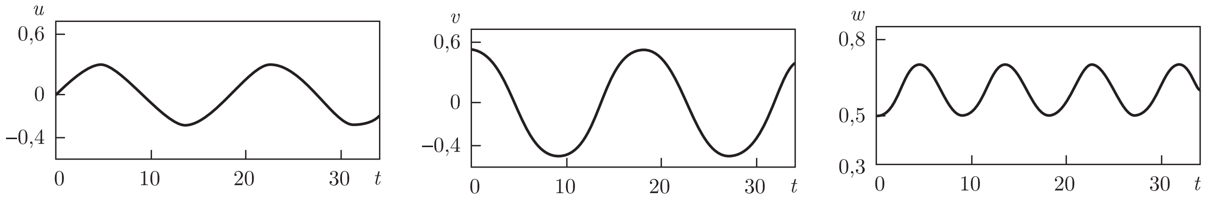
$$Q(u,-v,w) = -Q(u,v,w), \quad S(u,v,-w) = -S(u,v,w), \quad F(-u,v,w) = -F(u,v,w) \tag{20}$$

относительно переменных u, v, w.

На рис. 1, *а* изображена замкнутая кривая, удовлетворяющая неравенству (5) и условиям (19), (20). На рис. 2, *а*, *б*, *в* приведены временные реализации по координатам u, v, w. Начальные условия следующие:

$$v(0) = 0{,}5; \qquad w(0) = 0{,}5; \qquad u(0) = 0. \tag{21}$$

Неустойчивость вращений в окрестности средней оси эллипсоида инерции проявляется как увеличение отклонения от нуля (рис. 2, б) при сохранении устойчивости орбиты.



а *б* *в*

Рис. 3

О бифуркациях в системе (6). Введем малые отклонения δu, δv, δw в системе (6) от частных решений $\widehat{u}$, $\widehat{v}$, $\widehat{w}$ и составим уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta u}{dt} = \widehat{w}\delta v + \widehat{v}\delta w, \qquad \frac{d\delta v}{dt} = \frac{1}{3}(\widehat{w}\delta u + \widehat{u}\delta w), \qquad \frac{d\delta w}{dt} = -(\widehat{v}\delta u + \widehat{u}\delta v).$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе в вариациях, имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda\left(\frac{\widehat{u}^2}{3} + \widehat{v}^2 - \frac{\widehat{w}^2}{3}\right) + \frac{2}{3}\widehat{u}\widehat{v}\widehat{w} = 0.$$

Запишем характеристические показатели точек на следующих плоскостях: uv, uw, vw соответственно

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\widehat{v}^2 - \frac{\widehat{u}^2}{3}}, \qquad \lambda_3 = 0; \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{\widehat{u}^2}{3} + \frac{\widehat{w}^2}{3}}, \qquad \lambda_3 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\widehat{w}^2}{3} - \frac{\widehat{v}^2}{3}}, \qquad \lambda_3 = 0.$$

На плоскости uv все точки имеют эллиптический характер. На плоскостях uw, vw можно построить сепаратрису, которая разделяет эллиптические и седловые точки. Геометрическая симметрия может быть тождественна симметрии ХПЛ точек на траектории [3]. Для трехмерной консервативной системы, имеющей симметрию проекций на трех плоскостях, сигнатура спектра ХПЛ траектории имеет вид $(0, 0, 0)$. Так как траектория замкнута, то неустойчивость по Четаеву (см. [1]) не сопровождается потерей орбитальной устойчивости [4].

Об устойчивом вращении вокруг наибольшей полуоси эллипсоида инерции. В [1] установлена устойчивость движения вокруг наибольшей полуоси инерции. Пусть эллипсоид инерции удовлетворяет неравенству

$$J_x > J_y > J_z. \tag{22}$$

Учитывая условие (22) и полагая, что $J_x = 3J$, $J_y = 2J$, $J_z = J$, запишем систему (4) так:

$$\frac{du}{dt} = \frac{vw}{3}, \qquad \frac{dv}{dt} = -uw, \qquad \frac{dw}{dt} = uv, \tag{23}$$

где $u = \omega_x$, $v = \omega_y$, $w = \omega_z$.

Уравнения (23) представлены системой (12). Для системы (12), согласно принципу симметрии, существует замкнутая траектория в трехмерном пространстве. На рис. 1, *б* изображена замкнутая устойчивая кривая, удовлетворяющая неравенству (22). На рис. 3, *а*, *б*, *в* приведены временные реализации по координатам u, v, w системы (23) при начальных условиях (21).

Физический результат такой: если траектория имеет тенденцию замыкания на каждой плоскости, то существует траектория, замкнутая в трехмерном пространстве.

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – Москва: Наука, 1990. – 176 с.
2. *Nemytskii V. V., Stepanov V. V.* Qualitative theory of differential equations. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
3. *Никитина Н. В.* Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – Киев: Феникс, 2012. – 235 с.
4. *Leonov G. A.* Strange attractors and classical stability theory. – St.-Petersburg: St.-Petersburg Univ. Press, 2008. – 160 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.01.2013

Н. В. Нікітіна

Про умови замикання траєкторії у тривимірному просторі

Встановлено умови існування замкненої траєкторії в системі, заданій у тривимірному просторі. Розглянуто консервативну систему.

N. V. Nikitina

On the closing conditions of a trajectory in the three-dimensional space

The conditions of existence of a closed trajectory in the three-dimensional space are obtained. A conservative system is considered.