УДК 517.9

Ю. В. Малицкий, В. В. Семенов

Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С. И. Ляшко)

Предложен новый метод решения вариационных неравенств на множестве неподвижных точек не более чем счетного семейства фейеровских операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Доказаны теоремы сильной сходимости.

Вариационные неравенства с монотонными операторами — один из центральных объектов изучения в прикладном нелинейном анализе. Многие задачи исследования операций, математической экономики и математической физики могут быть записаны в форме вариационных неравенств, для численного решения которых к настоящему времени предложено и исследовано большое количество алгоритмов. Среди последних большое значение имеют итерационные процессы, порожденные фейеровскими и нерастягивающими операторами [1–7]. Эти операторы обладают очень важным свойством замкнутости относительно композиций определенного типа, что открывает возможность естественной декомпозиции задач и сборки алгоритмов из некоторого семейства более простых процедур.

В работе рассматривается вариационное неравенство на множестве неподвижных точек не более чем счетного семейства фейеровских операторов, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Отталкиваясь от известного "гибридого метода" Takahashi–Takeuchi–Kubota [8–9] поиска неподвижных точек, мы предлагаем так называемую схему внешних аппроксимаций для решения рассматриваемой задачи с сильно монотонным и липшицевым оператором. Основной результат — теоремы сильной сходимости схемы внешних аппроксимаций. Заметим, что наш анализ совсем не использует понятий, связанных со слабой топологией (демизамкнутость, свойство Кадеца–Кли) (см. также [9, 10]). Все необходимые сведения по нелинейному анализу изложены в работах [1, 7].

Пусть H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Оператор $T\colon H \to H$ называют фейеровским (квазинерастягивающим), если

1) $F(T) = \{x \in H\colon x = Tx\} \neq \varnothing$;

2) $\|Tx - y\| \leqslant \|x - y\|\ \forall\, x \in H\ \forall\, y \in F(T)$.

Замечание 1. Для фейеровского оператора T множество неподвижных точек $F(T)$ замкнутое и выпуклое.

Для операторов $A\colon H \to H$ и множеств $M \subseteq H$ обозначим

$$VI(A, M) = \{x \in M\colon (Ax, y - x) \geqslant 0\ \forall\, y \in M\}.$$

Рассмотрим абстрактную задачу:

$$\text{найти} \quad x \in VI\left(A, \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)\right). \tag{1}$$

Будем предполагать выполненными следующие условия: $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счетное множество фейеровских операторов, действующих в H; $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \varnothing$; $A\colon H \to H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$ соответственно.

Замечание 2. Решение вариационного неравенства (1) существует и единственно.

Замечание 3. При $\lambda \in (0, 2l/L^2)$ оператор $I - \lambda A$ является сжимающим.

Для произвольной пары элементов x, $y \in H$ определим множество

$$H(x,y) = \{z \in H\colon \|z-y\| \leqslant \|z-x\|\} = \{z \in H\colon 2(x-y,z) \leqslant \|x\|^2 - \|y\|^2\}.$$

Множество $H(x,y)$ является замкнутым полупространством (совпадающим с H в случае $x = y$).

Для аппроксимации решения вариационного неравенства (1) предлагаем

Алгоритм 1. Строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in H, \qquad C_1 = H, \\ C_{n+1} = C_n \bigcap H(x_n, T_n x_n), \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(I - \lambda_n A)x_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n > 0$.

Замечание 4. Алгоритм 1 — обобщение "гибридного метода" аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов [8]. В работах [9, 11] подобные схемы были использованы для поиска неподвижных точек многозначных фейеровских операторов и решения задач равновесного программирования.

Предположим, что $C_n \neq \varnothing$ и $F \subseteq C_n$. Имеем

$$\|T_n x_n - z\| \leqslant \|x_n - z\| \qquad \forall\, z \in F \subseteq F(T_n).$$

Следовательно, $F \subseteq H(x_n, T_n x_n)$. Таким образом, $F \subseteq C_{n+1}$. Получили цепочку вложений

$$H = C_1 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \cdots \supseteq F \neq \varnothing$$

и корректность определения последовательности (x_n).

Для доказательства основных результатов нам необходимы

Утверждение 1 [7]. *Если C_n — замкнутые выпуклые подмножества гильбертова пространства H, $C_n \supseteq C_{n+1}$ и $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing$, то*

$$P_{C_n}x \to P_C x \qquad \textit{для всех} \qquad x \in H.$$

Определение 2. Семейство операторов $\{T_n\colon H \to H\}$ назовем *предельно замкнутым*, если

1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \varnothing$;

2) для любой последовательности (x_n) имеем

$$\left.\begin{aligned} &x_n \to x, \\ &x_n - T_n x_n \to 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

Замечание 5. Если $T_n \equiv T$ и оператор T замкнут, то семейство $\{T_n\}$ предельно замкнуто. Имеет место

Теорема 1. *Пусть $A\colon H \to H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$ соответственно; $\{T_n\colon H \to H\}$ — счетное предельно замкнутое семейство фейеровских операторов. Предположим, что $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subseteq (0, 2l/L^2)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_n \to \lambda$. Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность (x_n) сильно сходится к единственному решению вариационного неравенства* (1).

Доказательство. Существует единственный элемент $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, такой, что

$$y = P_{\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n}(I - \lambda A)y.$$

Покажем, что $x_n \to y$ при $n \to \infty$. Рассмотрим вспомогательную последовательность элементов $y_n = P_{C_n}(I - \lambda A)y$. Известно, что $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Имеет место оценка

$$\|x_{n+1} - y_{n+1}\| \leqslant \|(I - \lambda_n A)x_n - (I - \lambda A)y\| \leqslant q\|x_n - y_n\| + q\|y_n - y\| + |\lambda_n - \lambda|\|Ax_n\|,$$

где $q \in (0,1)$. Предположим, что (x_n) не сходится к y. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| > 0.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|x_{n+1} - y_{n+1}\| \leqslant q \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|,$$

что абсурдно. Таким образом, $\|x_n - y\| \to 0$.

Покажем, что y — решение вариационного неравенства (1). Поскольку $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(I - \lambda_n A)x_n$, то

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda_n A x_n, z - x_{n+1}) \geqslant 0 \qquad \forall\, z \in C_{n+1}.$$

Принимая во внимание вложение $F \subseteq C_{n+1}$, получим,

$$(x_{n+1} - x_n + \lambda_n A x_n, z - x_{n+1}) \geqslant 0 \qquad \forall\, z \in F \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Совершив предельный переход, имеем

$$(Ay, z - y) \geqslant 0 \qquad \forall\, z \in F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n).$$

Осталось доказать включение $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(T_n)$. Поскольку $x_{n+1} \in C_{n+1}$, то

$$\|T_n x_n - x_{n+1}\| \leqslant \|x_n - x_{n+1}\|,$$

откуда

$$\|T_n x_n - x_n\| \leqslant \|T_n x_n - x_{n+1}\| + \|x_n - x_{n+1}\| \leqslant 2\|x_n - x_{n+1}\|.$$

Следовательно, $x_n - T_n x_n \to 0$. Учтя предельную замкнутость семейства операторов $\{T_n\}$, получим $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(T_n)$.

Уточним предыдущий результат для вариационного неравенства с не более чем счетным семейством операторов $\{T_n\}_{n\in\mathcal{I}}$:

$$\text{найти} \quad x \in VI\left(A, \bigcap_{i\in\mathcal{I}} F(T_i)\right), \tag{2}$$

где $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$.

Алгоритм 2. Строим последовательность (x_n) по схеме

$$\begin{cases} x_1 \in H, \qquad C_1 = H, \\ C_{n+1} = C_n \bigcap H(x_n, T_{p(n)} x_n), \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(I - \lambda_n A) x_n, \end{cases}$$

где $p\colon \mathbb{N} \to \mathcal{I}$, $\lambda_n > 0$.

Будем предполагать, что отображение $p\colon \mathbb{N} \to \mathcal{I}$ сюръективно и в случае счетного $\mathcal{I}$ "достаточно часто" принимает каждое свое значение. А именно, для произвольного индекса $i \in \mathcal{I}$ множество $p^{-1}(i) = \{k \in \mathbb{N}\colon p(k) = i\}$ бесконечно.

Замечание 6. Если $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, N\}$, то можно положить $p(n) = (n-1) \mod N + 1$ (циклическая стратегия).

Теорема 2. *Пусть $A\colon H \to H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор с константами $l > 0$, $L > 0$ соответственно; $\{T_n\colon H \to H\}_{n\in\mathcal{I}}$ — не более чем счетное семейство замкнутых фейеровских операторов, $\bigcap\limits_{n\in\mathcal{I}} F(T_n) \neq \varnothing$. Предположим, что $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subseteq (0, 2l/L^2)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \to \lambda$, для произвольного индекса $i \in \mathcal{I}$ множество $p^{-1}(i) = \{k \in \mathbb{N}\colon p(k) = i\}$ бесконечно. Тогда порожденная алгоритмом 2 последовательность (x_n) сильно сходится к единственному решению вариационного неравенства* (2).

Доказательство. Необходимо лишь доказать утверждение:

$$\left.\begin{aligned} & x_n \to x, \\ & x_n - T_{p(n)} x_n \to 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} F(T_i).$$

Возьмем произвольный индекс $i \in \mathcal{I}$. Существует возрастающая последовательность (n_k), такая, что $p(n_k) = i$. Имеем

$$x_{n_k} \to x, \qquad x_{n_k} - T_{p(n_k)} x_{n_k} = x_{n_k} - T_i x_{n_k} \to 0.$$

Замкнутость оператора T_i влечет $x \in F(T_i)$. В силу произвольности $i \in \mathcal{I}$ получаем, что $x \in \bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} F(T_i)$.

Замечание 7. Аналогичные теореме 2 результаты имеют место для схем

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = T_{p(n)} x_n, \\ C_1 = \{z \in H \colon \|y_1 - z\| \leqslant \|x_1 - z\|\}, \qquad Q_1 = H, \\ C_n = C_{n-1} \bigcap Q_{n-1} \cap \{z \in H \colon \|y_n - z\| \leqslant \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = C_{n-1} \bigcap Q_{n-1} \bigcap \{z \in H \colon ((I - \lambda_{n-1} A) x_{n-1} - x_n, x_n - z) \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} (I - \lambda_n A) x_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \in H, \qquad Q_1 = H, \\ y_n = T_{p(n)} x_n, \\ C_n = \{z \in H \colon \|y_n - z\| \leqslant \|x_n - z\|\}, \\ Q_n = Q_{n-1} \bigcap \{z \in H \colon ((I - \lambda_{n-1} A) x_{n-1} - x_n, x_n - z) \geqslant 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} (I - \lambda_n A) x_n, \end{cases}$$

где $p \colon \mathbb{N} \to \mathcal{I}$, $\lambda_n > 0$.

Работа В. В. Семенова выполнена при финансовой поддержке Верховной Рады Украины (Именная стипендия ВР Украины для молодых ученых в 2013 году).

1. *Васин В. В., Еремин И. И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения). – Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 200 с.
2. *Нурминский Е. А.* Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2008. – **48**, № 12. – С. 2121–2128.
3. *Yamada I.* The hybrid steepest descent method for the variational inequality over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings // D. Butnariu, Y. Censor, S. Reich (eds.), Inherently Parallel Algorithm for Feasibility and Optimization and Their Applications. – Amsterdam: Elsevier, 2001. – P. 473–504.
4. *Маліцький Ю. В., Семенов В. В.* Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 2010. – № 3(102). – С. 79–88.
5. *Маліцький Ю. В.* Пошук нерухомої точки ліпшицевої напівгрупи нерозтягуючих операторів // Там само. – 2012. – № 1(107). – С. 35–39.
6. *Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В.* Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доп. НАН України. – 2012. – № 2. – С. 56–62.
7. *Bauschke H. H., Combettes P. L.* Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. – New York: Springer, 2011. – xvi + 468 p.
8. *Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R.* Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **341**. – P. 276–286.
9. *Семенов В. В.* Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейєрівського оператора // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 2010. – № 4(103). – С. 89–93.
10. *Bauschke H. H., Chen J., Wang X.* A projection method for approximating fixed points of quasi nonexpansive mappings without the usual demiclosedness condition. – arXiv:1211.1639.
11. *Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В.* Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 2011. – № 1(104). – С. 10–23.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 04.02.2013

Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов

Схема зовнішніх апроксимацій для варіаційних нерівностей на множині нерухомих точок фейєрівських операторів

Запропоновано новий метод розв'язання варіаційних нерівностей на множині нерухомих точок не більш ніж зліченної сім'ї фейєрівських операторів, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Доведено теореми сильної збіжності.

Yu. V. Malitsky, V. V. Semenov

A scheme of outer approximations for variational inequalities over a fixed point set of Fejer operators

A new method for solving variational inequalities over the set of fixed points of a countable family of Fejer operators, which act in the infinite-dimensional Hilbert space, is proposed. Strong convergence theorems are proved.