ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

І. Г. Крикун

Явище Пеано для стохастичних рівнянь з локальним часом

(Представлено академіком НАН України О. М. Ковальовим)

За наявності в початковій точці явища Пеано для відповідної задачі Коші отримано умови слабкої збіжності мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом, до міри, зосередженої на екстремальних розв'язках відповідної задачі Коші у випадку, коли коефіцієнт дифузії прямує до 0.

У роботі розглядається стохастичне рівняння з локальним часом та малою дифузією

$$\xi_\varepsilon(t) = \beta L^{\xi_\varepsilon}(t,0) + \int_0^t b(\xi_\varepsilon(s))\,ds + \varepsilon\int_0^t \sigma(\xi_\varepsilon(s))\,dw(s), \qquad t \in [0,1], \tag{1}$$

і досліджується слабка збіжність при $\varepsilon \to 0$ мір, породжених розв'язками цього рівняння. Встановлено, що граничною мірою є міра, зосереджена з певними вагами на екстремальних розв'язках задачі Коші

$$\dot{y}(t) = b(y(t)), \qquad y(0) = 0, \tag{2}$$

і отримані формули для обчислення цих ваг. Питання про збіжність мір, породжених розв'язками стохастичних рівнянь Іто з малою дифузією виду

$$x_\varepsilon(t) = \int_0^t b(x_\varepsilon(s))\,ds + \varepsilon w(t),$$

при $\varepsilon \to 0$ до міри, що зосереджена на розв'язку задачі (2), за умови єдиності цього розв'язку, розглянуто в кількох роботах, серед яких згадаємо [1, 2]. Також розглядався випадок неєдиності розв'язку задачі (2) (так зване явище Пеано) [3–7].

Введемо такі позначення: $I_A(x)$ — індикатор множини A; $a^+ = \max(a, 0)$; $C[0, \infty)$ — простір неперервних функцій $f(t)$, $t \in [0, \infty)$ з метрикою рівномірної збіжності на компактах з $[0, \infty)$:

$$\rho(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \frac{\sup\limits_{t\in[0,N]} |f(t) - g(t)|}{1 + \sup\limits_{t\in[0,N]} |f(t) - g(t)|}.$$

Через $\mathfrak{B}$ позначимо σ-алгебру борелівських множин цього простору. Ймовірнісний простір позначатимемо $(\Omega, \Im, \Im_t, \mathsf{P})$, $\Im_t$ — потік σ-алгебр, $t \geqslant 0$, $(w(t), \Im_t)$ — стандартний одновимірний вінерівський процес. Позначення $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ буде означати асимптотичну еквівалентність функцій $f(x)$ та $g(x)$ при $x \to x_0$, тобто має місце рівність

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Функція $\mathrm{sgn}(x)$ визначається так:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Рівняння (1) має слабкий розв'язок, якщо для даних функцій $b(x)$, $\sigma(x)$ і константи β існує ймовірнісний простір $(\Omega, \Im, \Im_t, \mathsf{P})$ з потоком σ-алгебр $\Im_t$, $t \geqslant 0$, неперервний семімартингал $(\xi(t), \Im_t)$ і стандартний одновимірний вінерівський процес $(w(t), \Im_t)$ такі, що

$$L^{\xi}(t, 0) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{(-\delta,\delta)}(\xi(s))\, ds \tag{3}$$

існує майже напевно і (1) виконується майже напевно.

Рівняння (1) має сильний розв'язок, якщо для даних функцій $b(x)$, $\sigma(x)$ і константи β співвідношення (1) і (3) виконуються майже напевно на даному ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \Im_t, P)$ з потоком σ-алгебр $\Im_t$, $t \geqslant 0$, і даним вінерівським процесом $(w(t), \Im_t)$.

Для коефіцієнтів рівняння (1) введемо таку умову.

Умова (I):

I_1. Функція $b(x)$ неперервна і точка ноль є її єдиним нулем.

I_2. Існує константа Λ така, що

$$b^2(x) + \sigma^2(x) \leqslant \Lambda(1 + x^2), \qquad \sigma^2(x) \geqslant \Lambda^{-1}.$$

I_3. Функція $\sigma(x)$ не змінює знак і є функцією локально обмеженої варіації: для будь-якого $N < \infty$

$$\sup_{-N=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_k=N} \sum_{i=1}^{k} |\sigma(x_i) - \sigma(x_{i-1})| < \infty.$$

I_4. Константа $|\beta| < 1$.

Будемо вважати, що в роботі для функції $b(x)$ задачі (2) завжди мають місце умови I_1 та I_2. Тоді задача (2) має принаймні один — нульовий — розв'язок і всі розв'язки цієї задачі проходять через точку $(0; 0)$. З існування двох різних розв'язків випливає, що їх нескінченно багато. Множину інтегральних кривих — інтегральну воронку — позначимо через $\mathfrak{R}$. Кожен розв'язок з інтегральної воронки можна розташувати між двома спеціальними розв'язками, які будемо називати екстремальними, — верхнім $\overline{y}(t)$ і нижнім $\underline{y}(t)$, де $\overline{y}(t) = \sup\{y(t), y(t) \in \in \mathfrak{R}\}$, $\underline{y}(t) = \inf\{y(t), y(t) \in \mathfrak{R}\}$.

Відзначимо, що якщо $b(x)x < 0$ для $x \neq 0$, то задача (2) має лише нульовий розв'язок.

Для існування ненульового розв'язку (2) необхідна збіжність хоча б одного з інтегралів

$$\int\limits_0^\delta \frac{1}{b(y)}dy, \qquad \int\limits_{-\delta}^0 \frac{1}{b(y)}dy. \tag{4}$$

Отже, ненульові розв'язки (2) існують у таких випадках:

A_1. Функція $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і обидва інтеграли в (4) збіжні.

A_2. Функція $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і перший інтеграл в (4) збіжний, а другий — розбіжний.

A_3. Функція $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$ і перший інтеграл в (4) розбіжний, а другий — збіжний.

A_4. Функція $b(x) > 0$ при $x \neq 0$ і перший з інтегралів в (4) збіжний.

A_5. Функція $b(x) < 0$ при $x \neq 0$ і другий з інтегралів в (4) збіжний.

Позначимо $H(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{b(y)}dy$ для $x \geqslant 0$ і $K(x) = \int\limits_x^0 \frac{1}{b(y)}dy$ для $x \leqslant 0$. За умови I_1 дані функції строго монотонні. Позначимо через $H^{-1}(x)$, $K^{-1}(x)$ обернені до них функції.

Лема 1. *1. У випадку A_1 всі ненульові розв'язки задачі* (2) *мають вигляд*

$$y_\lambda(t) = H^{-1}((t-\lambda)^+), \qquad \lambda \geqslant 0, \tag{5}$$

$$y_\mu(t) = K^{-1}(-(t-\mu)^+), \qquad \mu \geqslant 0. \tag{6}$$

При цьому екстремальними розв'язками є $\overline{y}(t) = H^{-1}(t)$, $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$.

2. У випадках A_2 і A_4 всі ненульові розв'язки задачі (2) *мають вигляд* (5). *При цьому екстремальними розв'язками є $\overline{y}(t) = H^{-1}(t)$, $\underline{y}(t) = 0$.*

3. У випадках A_3 і A_5 всі ненульові розв'язки задачі (2) *мають вигляд* (6). *При цьому екстремальними розв'язками є $\overline{y}(t) = 0$, $\underline{y}(t) = K^{-1}(-t)$.*

Доведення. Твердження леми випливають з [10, лема 2.2, лема 2.3].

Дослідження ваг граничної міри приводить до обчислення виразу

$$\Gamma_K = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-A_\varepsilon(-K)}{A_\varepsilon(K) - A_\varepsilon(-K)}, \tag{7}$$

де

$$A_\varepsilon(x) = \int\limits_0^x \exp\left\{-\frac{2}{\varepsilon^2}\int\limits_0^z \frac{(1+\beta\,\mathrm{sgn}(v))b((1+\beta\,\mathrm{sgn}(v))v)}{\sigma^2((1+\beta\,\mathrm{sgn}(v))v)}dv\right\}dz.$$

Для обчислення Γ_K покладемо

$$L(x) = \int\limits_0^x \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}dy.$$

Лема 2. *Нехай $b(x)x > 0$ при $x \neq 0$, для деяких констант d, γ та $\delta > 0$ при $x \to 0+$ має місце асимптотична еквівалентність*

$$L(x) \ln^{\gamma} L(x) \sim dx^{\delta} \tag{8}$$

та для деяких констант k, θ та $\mu > 0$ при $x \to 0$ — має місце асимптотична еквівалентність

$$L(x) \ln^{\theta} L(x) \sim k|x|^{\mu}. \tag{9}$$

Тоді величина Γ_K не залежить від K і мають місце такі твердження:

1. Якщо $\delta = \mu$ і $\gamma = \theta$, то

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \dfrac{1-\beta}{1+\beta}\left(\dfrac{k}{d}\right)^{1/\delta}}.$$

2. Якщо $\delta < \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma < \theta$, то $\Gamma = 1$.

3. Якщо $\delta > \mu$ або $\delta = \mu$ і $\gamma > \theta$, то $\Gamma = 0$.

Доведення. Твердження леми випливає із формули для $A_{\varepsilon}(x)$, [10, формула (2.9), лема 2.8].

Основні результати. Відомо, що за умов I_2 і I_4 існує єдиний слабкий розв'язок рівняння (1) [8, теорема 4.35]. За допомогою зв'язку між розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом і розв'язками рівнянь Іто [9] доводиться теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови I_2, I_3, I_4. Тоді рівняння* (1) *має єдиний сильний розв'язок.*

Доведення. Твердження теореми випливає із зв'язку між розв'язками стохастичних рівнянь з локальним часом і розв'язками рівнянь Іто [9] та результату [10, теорема 3.2].

Позначимо через $\mu_{\varepsilon}(A)$ міру, породжену процесом $x_{\varepsilon}(\cdot)$ на просторі $(C[0,\infty), \mathfrak{B})$.

Теорема 2. *Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння* (1) *мають місце умови I_1, I_2, I_4, A_1,* (8), (9). *Тоді для мір $\{\mu_{\varepsilon}\}$ і для будь-якого неперервного обмеженого функціонала F, заданого на просторі $C[0,\infty)$, має місце рівність*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{C[0,\infty)} F(f)\mu_{\varepsilon}(df) = \Gamma F(\overline{y}) + (1-\Gamma)F(\underline{y}),$$

де $\overline{y}$, $\underline{y}$ — екстремальні розв'язки задачі (2), а величина Γ визначена лемою 2.

Доведення. Твердження теореми випливає із згаданого результату роботи [9] та результату [10, теорема 4.1].

При дослідженні випадків A_2–A_5 буде застосована теорема порівняння. Тому тут потрібні сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь.

Теорема 3. *Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння* (1) *має місце умова (I). У випадках A_2 і A_4 за умов* (8) *гранична міра для послідовності $\{\mu_{\varepsilon}\}$ зосереджена на верхньому екстремальному розв'язку рівняння* (2).

У випадках A_3 і A_5 за умов (9) *гранична міра для послідовності $\{\mu_{\varepsilon}\}$ зосереджена на нижньому екстремальному розв'язку рівняння* (2).

Доведення. Твердження теореми випливає із згаданого результату роботи [9] та результату [10, теорема 4.3].

П р и к л а д 1. Нехай у рівнянні (1) коефіцієнти мають вигляд

$$b(x) = \begin{cases} x^{\alpha_1}, & x \geqslant 0, \\ -C|x|^{\alpha_2}, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad \sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, & x \geqslant 0, \\ \sigma_2, & x < 0, \end{cases}$$

зі сталими $C > 0$, $\sigma_i > 0$, $0 < \alpha_i \leqslant 1$, $i = 1, 2$.

Якщо $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 = 1$, то перший з інтегралів в (4) збіжний, а другий — розбіжний, тобто маємо випадок A_2 і $\underline{y}(t) = 0$ за лемою 1. Аналогічно, якщо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 < 1$, то маємо випадок A_3 і $\overline{y}(t) = 0$.

Якщо $0 < \alpha_1$, $\alpha_2 < 1$, то має місце випадок A_1 і

$$L(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha_1+1}}{\sigma_1^2(\alpha_1+1)}, & x \geqslant 0, \\ -\dfrac{C|x|^{\alpha_2+1}}{\sigma_2^2(\alpha_2+1)}, & x < 0. \end{cases}$$

Тобто мають місце умови (8) і (9) з константами $\gamma = 0$, $d = 1/(\sigma_1^2(\alpha_1+1))$, $\delta = \alpha_1 + 1$; $\theta = 0$, $k = C/(\sigma_2^2(\alpha_2+1))$, $\mu = \alpha_2 + 1$, а значить, виконуються умови теореми 2.

Отже, маємо:

1) якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha < 1$, то

$$\Gamma = \frac{1}{1 + \dfrac{1-\beta}{1+\beta}\left(\dfrac{C\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)^{1/(\alpha+1)}};$$

2) якщо $\alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 1$, то $\Gamma = 1$;

3) якщо $\alpha_2 < \alpha_1 \leqslant 1$, то $\Gamma = 0$.

З теорем 2, 3 маємо, що гранична міра зосереджена з вагою Γ на верхньому екстремальному розв'язку і з вагою $1 - \Gamma$ на нижньому екстремальному розв'язку відповідної задачі Коші (2).

П р и к л а д 2. Нехай у рівнянні (1) $\sigma(x)$ має вигляд, як в прикладі 1, а коефіцієнт зносу дорівнює

$$b(x) = \begin{cases} x^{\alpha}(|\ln x| + 1), & x > 0, \\ -|x|^{\alpha}, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Тоді має місце умова A_1 і умови теореми 2. Границю (7) можна обчислити за допомогою леми 2, оскільки мають місце умови (8) і (9) з константами $\gamma = -1$, $d = 1/(\sigma_1^2(\alpha+1))$, $\delta = \alpha + 1$; $\theta = 0$, $k = 1/(\sigma_2^2(\alpha+1))$, $\mu = \alpha + 1$.

Згідно з лемою 2 маємо $\Gamma = 1$. Отже, за теоремою 2, гранична міра зосереджена на верхньому екстремальному розв'язку задачі Коші (2).

1. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – Москва: Наука, 1979. – 424 с.
2. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes. – Berlin: Springer, 1979. – 338 p.
3. *Baldi P.* Petites perturbations d'un phenomene Peano // Ann. sci. Univ. Clermont-Ferrand 2. – 1982. – **71**, No 20. – P. 41–52.
4. *Baldi P., Bafico R.* Small random perturbations of Peano phenomena // Stochastics. – 1982. – **6**. – P. 279–292.
5. *Buckdahn R., Quincampoix M., Ouknine Y.* On limiting values of stochastic differential equations with small noise intensity tending to zero // Bull. Sci. Math. – 2009. – **133**. – P. 229–237.
6. *Веретенников А. Ю.* О приближении обыкновенных дифференциальных уравнений стохастическими // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 6. – P. 929–932.
7. *Gradinaru M., Herrmann S., Roynette B.* A singular large deviations phenomenon // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. – 2001. – **37**, No 5. – P. 555–580.
8. *Engelbert H. J., Schmidt W.* Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, III // Math. Nachr. – 1991. – **151**, iss. 1. – P. 149–197.

9. *Махно С. Я.* Предельная теорема для стохастических уравнений с локальным временем // Теория вероятностей и мат. статистика. – 2001. – **64**. – P. 106–109.
10. *Крыкун И. Г., Махно С. Я.* Явление Пеано для уравнений Ито // Укр. мат. вісн. – 2013. – **10**, № 1. – P. 87–109.

Інститут прикладної математики
і механіки НАН України, Донецьк

Надійшло до редакції 04.12.2012

И. Г. Крыкун

Явление Пеано для стохастических уравнений с локальным временем

При наличии в начальной точке явления Пеано для соответствующей задачи Коши получены условия слабой сходимости мер, порожденных решениями стохастических уравнений с локальным временем, к мере, сосредоточенной на экстремальных решениях соответствующей задачи Коши в случае, когда коэффициент диффузии стремится к 0.

I. H. Krykun

Peano phenomenon for stochastic equations with local time

We consider measures generated by solutions of stochastic equations with local time and small diffusion. The conditions of weak convergence of these measures to the measure generated by extreme solutions of the corresponding Cauchy problem, when the diffusion coefficient tends to 0, are obtained, if the Peano phenomenon for the corresponding Cauchy problem holds.