

## Плоская задача о растяжении тела с трещиной для материала с нисходящей ветвью диаграммы деформирования

*Рассмотрена плоская задача о растяжении тела с трещиной для материала с нисходящей ветвью диаграммы деформирования. Задача сведена к системе нелинейных алгебраических уравнений при помощи метода интегральных преобразований Фурье. Проведена дискретизация полученной системы. На основании численного решения задачи исследовано распределение напряжений для плоского деформированного и плоского напряженного состояний.*

Учет реальной нелинейной диаграммы деформирования материалов приводит к значительным трудностям вычислительного характера для задачи о трещине. Однако различные упрощающие предположения для избежания этих трудностей [1–4] приводят к возникновению неограниченных напряжений в вершине трещины, что противоречит физическим соображениям. В работах [6, 7] построены решения и алгоритмы, позволяющие точно решать задачи о трещине для идеально упруго-пластического и линейно-упрочняющегося материалов в случае плоского напряженного и плоского деформируемого состояний.

В настоящей работе рассматривается плоская задача о растяжении тела с трещиной для материала с нисходящей диаграммой деформирования материала при постоянном коэффициенте Пуассона. На основе интегрального преобразования Фурье задача сведена к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и проведена их дискретизация для применения численных методов. Исследовано распределение напряжений в окрестности трещины.

**Основные уравнения и соотношения.** Зависимости между напряжениями и деформациями при постоянном коэффициенте Пуассона  $\nu$  можно представить в виде [6]

$$\sigma_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon) \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right), \quad J_\varepsilon = (\varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij})^{1/2} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где модуль сдвига  $\mu(J_\varepsilon)$  определяется выражением

$$\mu(J_\varepsilon) = \begin{cases} \mu_0, & J_\varepsilon < \frac{k}{2\mu_0}, \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{k}{2J_\varepsilon}, & J_\varepsilon \geq \frac{k}{2\mu_0}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\mu_0$ ,  $\mu'$ ,  $k = \sigma_0 \sqrt{2/3}$  — постоянные материала ( $\sigma_0$  — предел текучести материала), причем значения  $\mu' = 0$ ,  $\mu' > 0$ ,  $\mu' < 0$  соответствуют идеально упруго-пластическому материалу, линейно упрочняющемуся материалу и материалу с нисходящей ветвью диаграммы деформирования материала.

Введем замену

$$\sigma_{ij} = \bar{\mu} \hat{\sigma}_{ij}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение равновесия, относительно модифицированных напряжений будем иметь

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + \hat{f}_i = 0, \quad \hat{f}_i = \frac{1}{\bar{\mu}} (\hat{\sigma}_{ij} \bar{\mu}_{,j} + F_i), \quad (4)$$

где  $F_i$  — объемные силы.

Решение дифференциальных уравнений (4) будем искать в виде суммы  $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^0 + \hat{\sigma}_{ij}^*$ , где  $\hat{\sigma}_{ij}^0$  — решение однородных уравнений (4);  $\hat{\sigma}_{ij}^*$  — частное решение. Для решения однородных уравнений (4) используем функцию напряжений

$$\hat{\sigma}_{11}^0 = \varphi_{,22}; \quad \hat{\sigma}_{22}^0 = \varphi_{,11}; \quad \hat{\sigma}_{12}^0 = -\varphi_{,12}, \quad (5)$$

удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\varphi_{,iijj} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (6)$$

Частное решение неоднородных уравнений (4), которое можно построить методом преобразований Фурье для бесконечной области [1], представляется через интегралы по области  $D$  тела

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^* + \hat{\sigma}_{22}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r)}{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} d\xi_1 d\xi_2; \\ \hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}_{22}^* &= \frac{1-2\hat{\nu}}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) e_{ij} (x_i - \xi_i) \hat{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} (x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2; \\ \hat{\sigma}_{12}^* &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} e_{ij} (x_i - \xi_i) \hat{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (i, j, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $e_{11} = e_{22} = 0$ ,  $e_{12} = -e_{21} = 1$ . В результате приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно модифицированных напряжений  $\hat{\sigma}_{11}$ ,  $\hat{\sigma}_{22}$ ,  $\hat{\sigma}_{12}$ .

**Плоская задача о растяжении тела с трещиной.** Рассмотрим плоскую задачу о распределении напряжений в бесконечном двумерном теле, ослабленном внутренней трещиной ( $-c \leq x \leq c$ ,  $y = 0$ ), при заданной на бесконечности нормальной равномерно распределенной нагрузке  $p_0$ , действующей вдоль оси  $y$ . В силу симметрии распределения

напряжений относительно осей  $x$  и  $y$  достаточно ограничиться первым квадрантом  $D_1$  области тела  $D$ , учитывая при построении частного решения влияние квадрантов  $D_2, D_3, D_4$ . В результате приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \widehat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \widehat{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \widehat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \widehat{\sigma}_{12}^*(x, y) &= \int_{D_1} S_i(x, y; \xi, \eta) \widehat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \left( \widehat{f}_i = \widehat{\sigma}_{ij} \frac{\bar{\mu}_{,j}}{\mu}; i, j = 1, 2 \right),\end{aligned}\tag{8}$$

где функции влияния определяются формулами

$$\begin{aligned}P_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu})} \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_3} + \frac{\alpha_1}{\beta_4} \right); \\ P_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu})} \left( \frac{\alpha_3}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\beta_2} - \frac{\alpha_4}{\beta_3} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} \right); \\ Q_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\widehat{\nu}}{2\pi(1-\widehat{\nu})} \left( \frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\ Q_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\widehat{\nu}}{2\pi(1-\widehat{\nu})} \left( -\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\ S_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\widehat{\nu}}{4\pi(1-\widehat{\nu})} \left( -\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right); \\ S_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\widehat{\nu}}{4\pi(1-\widehat{\nu})} \left( \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right); \\ \alpha_1 &= x - \xi, \quad \alpha_2 = x + \xi, \quad \alpha_3 = y - \eta, \quad \alpha_4 = y + \eta, \\ \beta_1 &= \alpha_1^2 + \alpha_3^2, \quad \beta_2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad \beta_3 = \alpha_2^2 + \alpha_4^2, \quad \beta_4 = \alpha_1^2 + \alpha_4^2, \\ \gamma_1 &= \alpha_1^2 - \alpha_3^2, \quad \gamma_2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \quad \gamma_3 = \alpha_2^2 - \alpha_4^2, \quad \gamma_4 = \alpha_1^2 - \alpha_4^2.\end{aligned}\tag{9}$$

Нагрузку  $p_0$ , приводящую к образованию нелинейной зоны лишь в окрестности трещины, принимаем меньшей предела текучести  $k$ , так что на бесконечности, согласно (4),

выполняются граничные условия  $\widehat{\sigma}_{22}|_{\infty} = p_0$ ,  $\widehat{\sigma}_{11}|_{\infty} = \widehat{\sigma}_{12}|_{\infty} = 0$ . На оси  $y = 0$  граничные условия формулируются в виде  $\widehat{\sigma}_{22}(x, 0) = 0$  для  $|x| \leq c$ ,  $u_2(x, 0) = 0$  для  $|x| \geq c$ ,  $\widehat{\sigma}_{12}(x, 0) = 0$  для  $L_r(i, j, k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1}$ , где  $u_2(x, 0)$  — перемещение вдоль оси  $y$ .

На основе интегрального преобразования [5] решение сформулированной задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{11}(x, y) &= \widehat{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{p}(\xi)(1 - \xi y)e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi, \\ \widehat{\sigma}_{22}(x, y) &= p_0 + \widehat{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{p}(\xi)(1 + \xi y)e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi, \\ \widehat{\sigma}_{12}(x, y) &= \widehat{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2y}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{p}(\xi)\xi e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi,\end{aligned}\tag{10}$$

где функция  $\widetilde{p}(\xi)$  определяется из дуальных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \widetilde{p}(\xi) \cos \xi x d\xi &= p_0 + \widehat{\sigma}_{22}^*(x, 0), \quad 0 \leq x \leq c, \\ \int_0^{\infty} \widetilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi &= 0, \quad x \geq c,\end{aligned}\tag{11}$$

при этом перемещение берегов трещины находим согласно выражению

$$u_2(x, 0) = \frac{2(1 - \widehat{\nu})}{\pi\mu_0} \int_0^{\infty} \widetilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi, \quad 0 \leq x \leq c.\tag{12}$$

Таким образом, приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (8)–(11) относительно модифицированных напряжений  $\widehat{\sigma}_{11}$ ,  $\widehat{\sigma}_{22}$ ,  $\widehat{\sigma}_{12}$ .

Численное решение системы (8)–(11) связано с необходимостью определения функции  $\widetilde{p}(\xi)$  в пространстве изображений в области  $0 \leq \xi < \infty$ , что существенно усложняет задачу. В связи с этим, учитывая соотношение

$$\widetilde{u}_2(\xi, 0) = \frac{1 - \widehat{\nu}}{\mu_0} \frac{\widetilde{p}(\xi)}{\xi},\tag{13}$$

преобразуем уравнения (10) к виду

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{11}(x, y) &= \widehat{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \widehat{\nu})} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)]u_2(\eta, 0) d\eta, \\ \widehat{\sigma}_{22}(x, y) &= p_0 + \widehat{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \widehat{\nu})} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)]u_2(\eta, 0) d\eta,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\widehat{\sigma}_{12}(x, y) = \widehat{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\widehat{\nu})} \int_0^c R_3(x, y, \eta) u_2(\eta, 0) d\eta,$$

где функция  $u_2(\eta, 0)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$p_0 + \widehat{\sigma}_{22}^*(x, 0) = \frac{2\mu_0}{\pi(1-\widehat{\nu})} \int_0^c R(x, \eta) u_2(\eta, 0) d\eta, \quad 0 \leq x \leq c, \quad (15)$$

а ядра определяются формулами

$$\begin{aligned} R(x, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{x-\eta} \right), \\ R_1(x, y, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{x+\eta}{(x+\eta)^2 + y^2} - \frac{x-\eta}{(x-\eta)^2 + y^2} \right], \\ R_2(x, y, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{y(x+\eta)}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{y(x-\eta)}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}, \\ R_3(x, y, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{(x+\eta)^2 - y^2}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{(x-\eta)^2 - y^2}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Введем безразмерные параметры

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\widehat{\sigma}_{ij}}{k}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^* = \frac{\widehat{\sigma}_{ij}^*}{k}, \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{k}, \quad \bar{u}(\eta, 0) = \frac{2\mu_0 u_2(\eta, 0)}{\pi(1-\widehat{\nu})kc}, \quad (17)$$

где функция  $\bar{u}(\eta, 0)$ , как следует из (15), удовлетворяет интегральному уравнению

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) = c \int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \quad 0 \leq x \leq c. \quad (18)$$

При этом частное решение, согласно (8), определяется интегралами

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) &= \int_{D_1} S_i(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \left( \bar{f}_i = \bar{\sigma}_{ij} \frac{\bar{\mu}_{i,j}}{\bar{\mu}}, \quad i, j = 1, 2 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

**Дискретизация задачи.** Поскольку решить систему интегро-дифференциальных уравнений (14) в аналитическом виде не представляется возможным, воспользуемся численными методами. Для этого необходимо преобразовать (14) из континуальной формы в дискретную. Разобьем интервал  $(0, c)$  на  $N$  частей, представив интеграл в (18) суммой

$$\int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta = \sum_{k=1}^N \bar{u}(x_k, 0) \int_{x_k - a_k}^{x_k + a_k} R(x, \eta) d\eta \quad \left( \sum_{k=1}^N 2a_k = c \right). \quad (20)$$

Учитывая (16), приведем интегральное уравнение (18) относительно  $\bar{u}(\eta, 0)$  к системе алгебраических уравнений

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik} \bar{u}(x_k, 0) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (21)$$

где матрица  $I_{ik}$  с безразмерными элементами определяется формулой

$$I_{ik} = -\bar{a}_k \left[ \frac{1}{(\bar{x}_i + \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} + \frac{1}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} \right] \left( \bar{x}_i = \frac{x_i}{c}, \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}; i, k = 1, \dots, N \right). \quad (22)$$

Частное решение (19) представляется через двойные суммы по прямоугольным ячейкам области  $D_1$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} [P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) + Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n)] \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n; \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} [P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) - Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n)] \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n; \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n \quad (r = 1, 2) \end{aligned} \quad (23)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) &= cP_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \\ Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) &= cQ_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \\ S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) &= cS_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \\ \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{\bar{\sigma}_{r1}(x_k, y_n)}{\bar{a}_k + \bar{a}_{k+1}} \left[ \frac{\bar{\mu}(x_{k+1}, y_n)}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] + \frac{\bar{\sigma}_{r2}(x_k, y_n)}{\bar{b}_n + \bar{b}_{n+1}} \left[ \frac{\bar{\mu}(x_k, y_{n+1})}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] \right\} \\ &(r = 1, 2). \end{aligned} \quad (24)$$

При этом безразмерные координаты и величины определяются отношениями

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{c}; \quad \bar{y}_j = \frac{y_j}{c}, \quad \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}, \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{c}, \quad (25)$$

где  $a_k, b_n$  — половины размеров прямоугольных ячеек области  $D_1$  с координатами центров  $x_k, y_n$ .

Таким образом, при равномерном разбиении области  $D_1$  на квадратные ячейки задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (21) относительно переменных  $\bar{u}(x_k, 0), \bar{\sigma}_{ij}^*(x_k, y_n), \bar{\sigma}_{ij}^*(x_k, y_n)$ .

**Анализ численных результатов.** В качестве конкретной задачи исследовано напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины для материала с нисходящей ветвью диаграммы деформирования ( $\mu' < 0$ ) с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ . При расчетах половина длины трещины разбивалась на  $N = 200$  одинаковых частей при

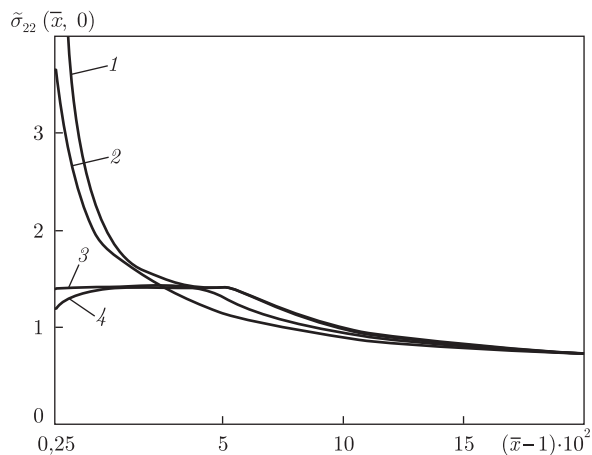


Рис. 1

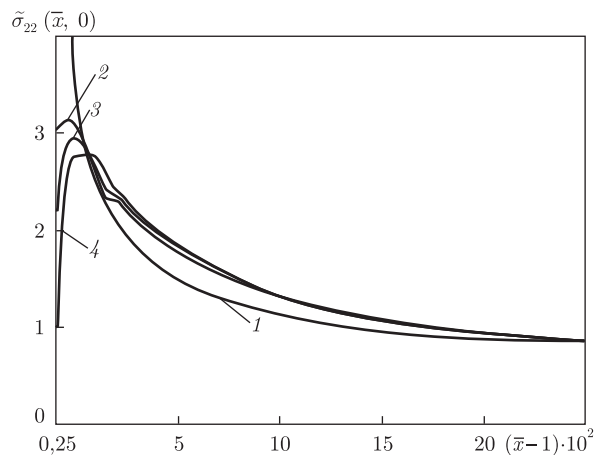


Рис. 2

равномерном разбиении области  $D_1$  с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей, равными  $2a = 1/N = 0,005$  в безразмерных координатах. Нагрузка задавалась в интервале  $0,3 \leq \bar{p}_0 \leq 0,5$ . Для покрытия области нелинейного деформирования задавалось  $30 \times 24$  квадратных ячеек. Нулевым приближением служило решение соответствующей линейной задачи.

На рис. 1 представлены зависимости нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0) = (1/k)\sigma_{22}(\bar{x}, 0)$  в окрестности трещины от расстояния  $\bar{x} - 1$  до ее вершины для нагрузки  $\bar{p}_0 = 0,3$  плоского напряженного состояния. Кривая 1 соответствует линейно-упругой задаче, кривая 2 —  $\mu' = 0,03$ , кривая 3 значению  $\mu' = 0$ , кривая 4 —  $\mu' = -0,01$ . Как видно из рисунка, напряжения имеют ограниченное значение и для материала с нисходящей ветвью деформирования. При удалении от вершины трещины напряжения  $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$  приближаются к соответствующим значениям напряжений для линейной задачи, равным  $\bar{p}_0$  на бесконечности.

Зависимости нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0) = (1/k)\sigma_{22}(\bar{x}, 0)$  для плоского деформированного состояния при различных значениях  $\mu'$  приведены на рис. 2 (кривая 1 отвечает линейно-упругой задаче, кривая 2 —  $\mu' = 0,03$ , кривая 3 соответствует значению  $\mu' = 0$ , кривая 4 —  $\mu' = -0,03$ ) и нагрузке  $\bar{p}_0 = 0,5$ . Как видно, из рисунка напряжения также имеют ограниченное значение и уменьшаются по сравнению со значениями нормальных напряжений для линейной задачи в интервале  $0,25 \leq \bar{x} - 1 \leq 0,3$ .

Таким образом, с помощью численного решения задачи установлено распределение нормальных напряжений для трещины в случаях плоского напряженного и плоского деформированного состояний материала с нисходящей ветвью деформирования.

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
2. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. – 1920. – **A221**. – P. 163–198.
3. Hoyson S. F., Sinclair G. B. On the variability of fracture toughness // Int. J. of Fract. – 1993. – **60**. – P. 43–49.
4. Irwin G. P. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // Appl. Mech. – 1957. – **24**, No 4. – P. 361–364.
5. Снеддон И. Н., Бери Д. С. Классическая теория упругости. – Москва: Физматгиз, 1961. – 219 с.
6. Хорошун Л. П. Дискретизация плоской задачи о растяжении тела с трещиной при нелинейном законе деформирования // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 11. – С. 31–48.

7. Хорошун Л. П., Левчук О. И. Плоская задача о растяжении тела с трещиной для линейно-упрочняющегося материала // Доп. НАН України. – 2012. – № 12. – С. 61–69.

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.12.2012

Член-корреспондент НАН України Л. П. Хорошун, О. І. Левчук

### **Плоска задача про розтяг тіла з тріщиною для матеріалу з спадною гілкою діаграми деформування**

*Розглянуто плоску задачу про розтяг тіла з тріщиною для матеріалу зі спадною гілкою діаграми деформування. Задача зведена до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є. Проведено дискретизацію отриманої системи. На основі чисельного розв'язку задачі досліджено розподіл напружень для плоского деформованого і плоского напруженого станів.*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine L. P. Khoroshun, O. I. Levchuk

### **The plane problem of tension of a cracked body for a material with descending branch of a deformation diagram**

*The plane problem of tension of the body with a crack for a material with descending branch of a deformation diagram is considered. The problem is reduced to a system of nonlinear algebraic equations by the Fourier integral transformation. The digitization of the obtained system is made. On the basis of the numerical solution, the distributions of stresses for the plane stressed and plane strained states are investigated.*