УДК 531.36

Ю. А. Мартынюк-Черниенко, Л. Н. Чернецкая

О практической устойчивости движения при интервальных начальных условиях

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Предложено обобщение понятия практической устойчивости для нелинейных систем с интервальными начальными условиями. Установлен вариант теорем прямого метода Ляпунова для данной задачи. В качестве примера рассматривается линейная неавтономная система.

Целью данной работы является получение достаточных условий практической устойчивости движения при интервальных начальных условиях. При этом предполагается, что уравнения возмущенного движения остаются неизменными во все время движения и множество траекторий порождается интервальными начальными условиями. Для решения задачи применяется прямой метод Ляпунова для скалярной вспомогательной функции. Возможной областью применения полученных результатов может быть физика пучков заряженных частиц (см. [1] и библиографию там).

Рассматривается система уравнений возмущенного движения в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \tag{2}$$

где $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ — интервал начальных значений, $f(t, x) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $f(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Предполагается, что движения системы, описываемые системой (1) при начальных условиях (2), определены при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $X(t)$ — множество траекторий системы (1), генерируемых интервальными начальными значениями (2), т. е.

$$X(t) = \left\{x(t)\colon \frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0,\ x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0],\ t_0 \in [0, \infty)\right\}. \tag{3}$$

Для интервального вектора $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ векторная норма вводится формулой

$$\|Y\| = \max(|Y_1|, \ldots, |Y_n|),$$

где $|Y_i| = \max(|\underline{y}_i|, |\overline{y}_i|)$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Принимая во внимание результаты монографий [2, 3], сформулируем следующее определение.

Определение 1. При заданных оценках величин λ и A, $0 < \lambda < A$, решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) практически устойчиво при интервальных начальных условиях, если при любом $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \lambda)$ решение $(x(t) \in X(t)) \bigcap (\|x(t)\| < A)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Во многих технических системах анализ траекторий системы (1) достаточно проводить на конечном интервале $[t_0, t_0 + T]$, $T = \mathrm{const} > 0$ (см. [4, 5]). Поэтому имеет смысл рассматривать следующее свойство решений $x(t) \in X(t)$.

Определение 2. При заданных оценках величин λ и A, $0 < \lambda < A$, решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) интервально устойчиво на конечном интервале, если при любом $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap \bigcap (\|x_0\| < \lambda)$ имеет место оценка $(x(t) \in X(t)) \bigcap (\|x(t)\| < A)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Для решения рассматриваемой задачи применяются локально большие функции Ляпунова. Это связано с тем, что при рассмотрении практической интервальной устойчивости начальные возмущения (2) могут быть сколь угодно большими.

Определение 3 (см. [2]). Функция $V(t, x)$ называется локально большой, если для любого $c > 0$ и $t_0 \geqslant 0$ существует $\Delta = \Delta(t_0, c)$ такое, что вне сферы

$$G_\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < \Delta\} \tag{4}$$

выполняется неравенство $V(t, x) > c$ при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 4. Локально большая функция $V(t, x)$ называется определенно положительной, если она удовлетворяет условиям определения 3 и оценке $V(t, x) \geqslant W(x)$, где $W(x)$ — определенно положительная функция в смысле Ляпунова.

Пусть для системы (1) построена вспомогательная функция $V(t, x)$, $V \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, для которой определена полная производная

$$D^+V(t, x) = \limsup\{[V(t + h, x + hf(t, x)) - V(t, x)]h^{-1} \colon h \to 0^+\} \tag{5}$$

вдоль любого решения $x(t) \in X(t)$ задачи (1), (2).

Далее применяются следующие обозначения:

$$S(a) = \{x \in [\underline{x}, \overline{x}] \colon \|x\| < a\},$$

$$\overline{S}(a) = \{x \in [\underline{x}, \overline{x}] \colon \|x\| \leqslant a\}.$$

В областях $S(a)$ и $\overline{S}(a)$ рассматриваются экстремальные значения вспомогательной функции $V(t, x)$ согласно формулам

$$V_m^a(t) = \inf(V(t, x) \text{ при } x \in S(a)),$$

$$V_M^a(t) = \max(V(t, x) \text{ при } x \in \overline{S}(a)).$$

Укажем условия практической устойчивости движения при интервальных начальных условиях и интервальных последующих возмущениях.

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1) *существуют локально большая и локально Липшицева функция* $V(t, x)$ *и неубывающая функция* $\eta(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *такие, что*

1) $V \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$*;*

2) $D^+V(t, x) < D^+\eta(t)$ *при любом* $x \in \overline{S}(A) \setminus S(\lambda)$ *и при всех* $t \in \mathbb{R}_+$*;*

3) $\eta(t_1) \leqslant V_M^\lambda(t_1)$ *для некоторого* $t_1 \in \mathbb{R}_+$*;*

4) $\eta(t) \leqslant V_m^A(t)$ *при* $t \geqslant t_1$.

Тогда нулевое решение системы (1) *практически устойчиво при интервальных начальных условиях.*

Доказательство. Пусть $x(t) \in X(t)$ — некоторая траектория системы (1), которая при $t = t_0$ начинается в области $\|x(t_0)\| < \lambda$. Предположим, что при выполнении условий *1–4* нулевое решение системы (1) практически неустойчиво. В этом случае найдутся моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$ и решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, где $x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0] \bigcap (\|x_0\| < \lambda)$, такое, что $\|x(t_1)\| = \lambda$ и $\|x(t_2)\| = A$.

Из условия *2* следует оценка

$$V(t_2, x(t_2)) < V(t_1, x(t_1)) + \eta(t_2) - \eta(t_1). \tag{6}$$

Так как функция $V(t, x)$ локально большая, то поверхности уровня для функции $V(t, x)$ ограничены и замкнуты, и, согласно условию *3* теоремы 1, из неравенства (6) следует

$$V(t_2, x(t_2)) < \eta(t_2). \tag{7}$$

Отсюда из условия *4* теоремы 1 следует

$$V(t_2, x(t_2)) < V_m^A(t_2). \tag{8}$$

Из неравенства (8) следует, что $\|x(t_2)\| \neq A$, что противоречит принятому предположению. Так как это утверждение верно для любой траектории $(x(t) \in X) \bigcap (\|x_0\| < \lambda)$, то имеет место практическая устойчивость нулевого решения системы (1) при интервальных начальных условиях.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существуют функции* $V(t, x)$ *и* $\eta(t)$, *указанные в теореме 1. Если выполняются условия*

1) $D^+V(t, x) < D^+\eta(t)$ *при* $x \in S(A) \setminus \overline{S}(\lambda)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$;

2) для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_2 > t_1$, *выполняется неравенство*

$$\eta(t_2) - \eta(t_1) \leqslant V_m^A(t_2) - V_M^\lambda(t_1),$$

тогда нулевое решение системы (1) *практически устойчиво равномерно по* t_0 *при интервальных начальных условиях.*

Доказательство. Пусть $x(t) \in X(t)$ и для некоторого решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ при $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \lambda)$ существуют $t_2 > t_1 > t_0$, для которых $\|x(t_1)\| = \lambda$ и $\|x(t_2)\| = A$. Ясно, что при $t \in (t_1, t_2)$ решение $(x(t) \in X(t)) \bigcap (S(a) \setminus \overline{S}(\lambda))$, поэтому из условия 1 теоремы 2 получим

$$V(t_2, x(t_2)) < V(t_1, x(t_1)) + \eta(t_2) - \eta(t_1). \tag{9}$$

Согласно условию *2* теоремы 2, из оценки (9) следует

$$V(t_2, x(t_2)) < V(t_1, x(t_1)) + V_m^A(t_2) - V_M^\lambda(t_1)$$

и, так как функция $V(t, x)$ локально большая, то $V(t_2, x(t_2)) < V_m^A(t_2)$, образует замкнутую поверхность и показывает, что $\|x(t_2)\| \neq A$. Так как t_1, $t_2 \in \mathbb{R}_+$ выбираются произвольно, утверждение теоремы 2 доказано.

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *существуют функции* $V(t, x)$ *и* $\eta(t)$, *указанные в теореме 1, и выполняются условия:*

1) $D^+V(t, x) < D^+\eta(t)$ *при всех* $x \in \overline{S}(\lambda) \setminus S(\mu)$, $\mu < \lambda$, $t \in \mathbb{R}_+$;

2) для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_2 > t_1$, выполняется неравенство

$$\eta(t_2) - \eta(t_1) \leqslant V_m^{\lambda}(t_2) - V_M^{\mu}(t_1)$$

для некоторого $\mu < \lambda$.

Тогда нулевое решение системы (1) *практически устойчиво при интервальных начальных условиях относительно величин* (μ, λ).

Доказательство. Рассмотрим поведение траектории $x(t) \in X(t)$ с начальными значениями $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \mu)$. Из непрерывности $x(t, t_0, x_0)$ следует, что существуют t_1, t_2, $t_2 > t_1$, такие, что $\|x(t_1)\| = \mu$, $\mu < \lambda$ и $\|x(t_2)\| = \lambda$.

Из соотношения

$$V(t, x(t)) = V(t_0, x(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} D^+V(s, x(s))\, ds$$

получаем оценку

$$V(t_2, x(t_2)) < V(t_1, x(t_1)) + \eta(t_2) - \eta(t_1). \tag{10}$$

Отсюда в силу условия *2* теоремы 3 получим

$$V(t_2, x(t_2)) < V_m^{\lambda}(t_2). \tag{11}$$

Так как функция $V(t, x)$ локально большая, поверхности уровня для оценки (11) замкнуты и $\|x(t_2)\| \neq \lambda$. Отсюда следует, что $\|x(t)\| < \lambda$ при всех $t \geqslant t_0$ и при интервальных начальных условиях.

Далее исследуем неустойчивость нулевого решения системы (1) при условиях *2*. Для этого введем обозначения

$$S_1(\alpha) \subset S(\lambda) \qquad \text{при} \qquad \alpha < \lambda \qquad \text{и} \qquad \partial S_1 \bigcap \partial S = \varnothing.$$

Предположим, что множество $H(t) = \Omega \bigcap P(t)$ не пустое и связное при всех $t \in \mathbb{R}_+$, где $\Omega = \overline{S}(A) \setminus S_1(\alpha)$, $P(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon V(t, x) > V_M^{S_1(\alpha)}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+\}$.

Кроме того, предположим, что множество $\Omega(t + \tau_1) \bigcap \partial S(A) \neq \varnothing$ для некоторого $t_1 \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 4. *Пусть для системы* (1) *существуют функции $V(t, x)$ и $\eta(t)$, указанные в условии теоремы 1, и выполняются условия:*

1) $D^+V(t, x) > D^+\eta(t)$ при всех $x \in \Omega(t)$ и $t \in \mathbb{R}_+$;

2) $\eta(t_0) \leqslant V_m^{\lambda}(t_0)$, $\eta(t_1) \geqslant V_M^{\lambda}(t_1)$ для любого значения $t_1 \in [t_0, t_0 + \tau_1]$;

3) $\eta(t_0 + \tau_1) \geqslant V_M^{\partial S(A)}(t_0 + \tau_1)$ и $V(t_0 + \tau_1, x) \leqslant V_M^{\partial S(A)}(t_0 + \tau_1)$ при всех $x \in \Omega(t_0 + \tau_1)$, где $\tau_1 \in \mathbb{R}_+$.

Тогда нулевое решение системы (1) *практически неустойчиво при интервальных начальных условиях 2.*

Доказательство. Рассмотрим траекторию $x(t) \in X(t)$ с начальным условием $(x^* \in \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap \Omega(t_0) \bigcap (S(\lambda) \setminus S_1(\alpha))$. Пусть для некоторого $\tau_1 \in [t_0, \infty)$ существует $t^* \in [t_0, t_0 + + \tau_1]$, для которого $V(t^*, x(t^*)) = V_M^{\partial S_1}(t^*)$.

Из условия *1* теоремы 4 следует, что

$$V(t^*, x(t^*)) > V_M^{S_1}(t_0) + \eta(t^*) - \eta(t_0).$$

Отсюда, учитывая условие *2* теоремы 4, получим $V(t^*, x(t^*)) > V_M^{S_1}(t^*)$. Это противоречие доказывает, что $t^* \overline{\in} [t_0, t_0 + \tau_1]$.

Далее пусть τ_1 — произвольное и $V(t, x(t)) > V_M^{S_1}(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$. Отсюда следует, что если $x(t, t_0, x^*) \in S(A)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$, тогда $x(t, t_0, x^*) \in H(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$. Пусть при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$ решение $x(t, t_0, x^*) \in S(A)$. Тогда из условия 1 теоремы 4 имеем

$$V(t_0 + \tau_1, x(t_0 + \tau_1)) > V_m^{\overline{S}}(t_0) + \eta(t_0 + \tau_1) - \eta(t_0).$$

Согласно условию 3 теоремы 4, получим неравенство

$$V(t_0 + \tau_1, x(t_0 + \tau_1)) > V_M^{\overline{S}}(t_0 + \tau_1).$$

Это указывает на то, что $x(t, t_0, x^*) \overline{\in} S(A)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$. В этом случае найдется $t^* \in [t_0, t_0 + \tau_1]$ такое, что $x(t^*, t_0, x^*) \in \partial S(A)$, т.е. нулевое решение системы (1) будет практически неустойчивым.

Пример (см. [6]). Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0], \tag{12}$$

где $A(t)$ — постоянная $n \times n$-матрица с непрерывными на каждом конечном интервале элементами.

Пусть заданы величины (λ, A, t_0, T) и выполняются условия:

а) при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ и $(x_0 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]) \bigcap (\|x_0\| < \lambda)$ верно матричное неравенство

$$(A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)) - \frac{1}{T} \ln\left(\frac{A}{\lambda}\right) E_n < 0,$$

где E_n — единичная $n \times n$-матрица;

б) существует $t^* \in [t_0, t_0 + T]$ такое, что

$$(A(t^*) + A^{\mathrm{T}}(t^*)) - \frac{1}{t^* - t_0} \ln\left(\frac{A}{\lambda}\right) E_n > 0.$$

Тогда нулевое решение системы (12) практически интервально устойчиво при выполнении условия *а* и неустойчиво при выполнении условия *б*.

Заметим, что задачи об устойчивости при интервальных начальных условиях могут рассматриваться как специальный случай задачи об условной устойчивости в смысле Ляпунова с тем отличием, что интервальные начальные условия могут быть сколь угодно большими. В то время как методы интегрирования уравнений при интервальных начальных условиях развиты достаточно полно, вопросы качественного анализа уравнений остаются открытыми. Работой [7] начато исследование устойчивости движения при интервальных начальных условиях. Представляют интерес задачи о практической устойчивости [2–5] при интервальных начальных условиях и неточных параметрах уравнений возмущенного движения (см. [8, 9]), в том числе для динамических уравнений на временной шкале (см. [10]).

1. *Овсянников Д. А., Егоров Н. В.* Математическое моделирование систем формирования электронных и ионных пучков. – Ст.-Петербург: Изд-во СПб ун-та, 1998. – 275 с.
2. *Мартынюк А. А.* Практическая устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1983. – 247 с.
3. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Practical stability of nonlinear systems. – Singapore: World Scientific, 1990. – 207 p.

4. *Зубов В. И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. – Ленинград: Машиностроение, 1974. – 336 с.
5. *Мартынюк А. А.* Техническая устойчивость в динамике. – Киев: Техника, 1973. – 188 с.
6. *Dorato P., Abdallah C. T., Famularo D.* Robust finite-time stability design via linear matrix inequalities. – Albuquerque: Univ. of New Mexico, 2012. – 2 p.
7. *Мартынюк А. А.* Об устойчивости движения при интервальных начальных условиях // Доп. НАН України. – 2013. – № 1. – С. 47–52.
8. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Неточные динамические системы: устойчивость и управление движением. – Киев: Феникс, 2009. – 320 с.
9. *Martynyuk A. A., Martynyuk-Chernienko Yu. A.* Uncertain dynamical systems. Stability and motion control. – Boca Raton: CRC, 2012. – 296 p.
10. *Мартынюк А. А.* Теория устойчивости решений динамических уравнений на временной шкале. – Киев: Феникс, 2012. – 277 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.10.2012

Ю. А. Мартинюк-Чернієнко, Л. М. Чернецька

Про практичну стійкість руху при інтервальних початкових умовах

Запропоновано узагальнення поняття практичної стійкості для нелінійних систем з інтервальними початковими умовами. Для цієї задачі встановлено варіант теорем прямого методу Ляпунова. Як приклад розглянуто лінійну неавтономну систему.

Yu. A. Martynyuk-Chernienko, L. N. Chernetskaya

On the practical stability of motion under interval initial data

This paper extends the practical stability for nonlinear dynamical systems under interval initial data and develops a variant of the direct Lyapunov method for scalar functions. The example of a linear nonautonomous system is presented.