УДК 517.9

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Моделирование потенциально-вихревого течения со свободной границей с применением нечеткой логики

Доказана разрешимость краевой задачи со свободной границей. Построено приближенное решение методом Ритца. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению в метрике C и W_2^1.

Постановка задачи. Обозначим через D область, ограниченную снизу отрезком $A = (0 \leqslant \leqslant x \leqslant a, y = 0)$, сверху кривой $P\colon y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, где $g(0) = b_1$, $g(a) = b_2$, $b_1 \leqslant b_2$, а $g(x)$ — аналитическая, монотонно возрастающая функция при $x \in [o, a]$, причем $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$. Боковую часть границы области D, состоящую из вертикалей, обозначим через $Q_1 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b_1)$ и $Q_2 = (x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b_2)$. Пусть γ — жорданова дуга в D, концы которой лежат на вертикалях Q_1 и Q_2, причем все точки γ, включая и концы, расположены ниже кривой P. Кривая γ разбивает область D на две односвязные области G_γ, находящиеся выше γ и Ω_γ. Такие дуги будем называть допустимыми. Концы γ разбивают вертикали Q_1 и Q_2 на два открытых множества R_1 — боковую часть границы области G_γ и R_2 — боковую часть границы области Ω_γ.

Рассматривается задача: определить функции тока $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ и свободную границу γ по условиям

$$\Delta\psi_1 = \omega, \qquad (x, y) \in G_\gamma, \tag{1}$$

$$\psi_{1x} = 0, \qquad (x, y) \in R_1; \qquad \psi_1 = C, \qquad (x, y) \in P; \qquad \psi_1 = 1, \qquad (x, y) \in \gamma, \tag{2}$$

$$\Delta\psi_2 = 0, \qquad (x, y) \in \Omega_\gamma, \tag{3}$$

$$\psi_{2x} = 0, \qquad (x, y) \in R_2; \qquad \psi_2 = 0, \qquad (x, y) \in A; \qquad \psi_2 = 1, \qquad (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

$$|\nabla\psi_1| = |\nabla\psi_2|, \qquad (x, y) \in \gamma. \tag{5}$$

Здесь $\omega = \mathrm{const} > 0$, а $C = \mathrm{const} > 1$. Ранее, в работах [1–3] отдельно изучались случаи потенциального и вихревого течения, когда на свободной границе задавалось условие Бернулли в виде неравенства.

Вариационная постановка задачи. Рассмотрим функционал

$$I(\psi_1, \psi_2, \gamma) = \iint\limits_{G_\gamma} [|\nabla\psi_1|^2 + 2\omega(\psi_1 - 1)]\, dxdy + \iint\limits_{\Omega_\gamma} |\nabla\psi_2|^2 dxdy \tag{6}$$

на множестве Vдопустимых троек (ψ_1, ψ_2, γ), обладающих следующими свойствами: γ — допустимая дуга; функция $\psi_1(x, y)$ определена и непрерывна в замыкании области G_γ, кусочно-непрерывно дифференцируема в G_γ, равна единице на γ и постоянной C при

$(x, y) \in P$; функция $\psi_2(x, y)$ определена и непрерывна в замыкании области Ω_γ, кусочно-непрерывно дифференцируема в Ω_γ, равна единице на γ и нулю при $(x, y) \in A$, причем $Y(\psi_1, \psi_2, \gamma) < \infty$.

Лемма 1. *Пусть тройка* (ψ_1, ψ_2, γ) *является классическим решением задачи* (1)–(5). *Тогда эта тройка будет стационарной для функционала* (6) *на множестве* V. *Обратно, каждая стационарная тройка* (ψ_1, ψ_2, γ) *функционала* (6) *на множестве* V, *где* γ — *достаточно гладкая кривая, является решением задачи* (1)–(5).

Лемма 1 позволяет свести разрешимость нелинейной задачи (1)–(5) к проблеме минимума функционала (6) на множестве V.

Симметризация областей G_γ и Ω_γ. Пусть V_γ — подмножество множества V, состоящее из всех троек (ψ_1, ψ_2, γ), где γ — фиксированная допустимая кривая. С помощью вариационного подхода доказывается лемма.

Лемма 2. *Существует единственная тройка* $(\psi_1, \psi_2, \gamma) \in V_\gamma$, *на которой функционал* (6) *достигает своего наименьшего значения. При этом функции* $\psi_1(x, y)$ *и* $\psi_2(x, y)$ *являются единственными решениями соответственно задач* (1), (2) *и* (3), (4).

Пусть теперь γ — произвольная допустимая кривая, $\psi_1(x, y)$ — решение задачи (1), (2) в заданной области G_γ, а $\psi_2(x, y)$ — решение задачи (3), (4) в Ω_γ. Введем в рассмотрение множества

$$G_1 = \{(x, y) \in G_\gamma \colon \psi_1(x, y) < 1\}, \qquad L_1 = \{(x, y) \in R_1 \colon \psi_1(x, y) < 1\},$$

$$G_2 = \{(x, y) \in G_\gamma \colon \psi_1(x, y) > 1\}, \qquad L_2 = \{(x, y) \in R_1 \colon \psi_1(x, y) > 1\}.$$

Лемма 3. *Пусть* (ψ_1, ψ_2, γ) — *допустимая тройка, причем* $\psi_1(x, y)$ — *решение задачи* (1), (2), *а* $\psi_2(x, y)$ — *решение задачи* (3), (4). *Просимметризуем область* G_2 *относительно осей координат. Полученную область обозначим через* G^*, *а ее свободную границу через* γ^*. *Пусть* $\psi_1^*(x, y)$ — *решение задачи* (1), (2) *в* G^*, *а* $\psi_2^*(x, y)$ — *решение задачи* (3), (4) *в* $\Omega^* = \operatorname{int}(D \setminus G^*)$. *Тогда* $I(\psi_1^*, \psi_2^*, \gamma^*) \leqslant I(\psi_1, \psi_2, \gamma)$, *причем* $\psi_{1y}^* > 0$ *в* G^*, *а* $\psi_{2y}^* > 0$ *в* Ω^* *и* γ^* *задается уравнением*

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

где $x(t)$ *и* $y(t)$ — *неубывающие функции параметра* t.

Теорема существования. Пусть d — точная нижняя грань функционала (6) на множестве V и $(\psi_{1n}, \psi_{2n}, G_n, \Omega_n)$ — минимизирующая последовательность. На основании леммы 3 можно считать, что G_n и Ω_n имеют свободную границу γ_n, заданную уравнениями типа (7). В силу леммы 2 в качестве функций ψ_{1n} и ψ_{2n} можно брать решения задач (1), (2) и (3), (4) соответственно в областях G_n и Ω_n. Применяя затем метод внутренних вариаций Шиффера и симметризацию Штейнера [1], докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть функция* $g(x)$ *монотонно возрастает в* $[0, a]$, *является аналитической функцией переменной* x *при* $0 \leqslant x \leqslant a$ *и, кроме того,* $g'(0) = 0$, $g'(a) = a$. *И пусть также выполнено условие* $1 - \omega b_2^2/2 > 0$. *Тогда существует единственное решение* (ψ_1, ψ_2, γ) *задачи* (1)–(5), *удовлетворяющее условиям* $\psi_{1y} > 0$ *в* G_γ, *а* $\psi_{2y} > 0$ *в* Ω_γ. *При этом* γ *является монотонно-возрастающей дугой, аналитической в окрестности каждой своей внутренней точки, причем* γ *не имеет общих точек с кривой* P *и отрезком* A. *Функции* $\psi_1(x, y)$ *и* $\psi_2(x, y)$ *непрерывны в* $\overline{G_\gamma}$ *и* $\overline{\Omega_\gamma}$, *непрерывно дифференцируемы вплоть до границы всюду, за исключением концевых точек* γ.

Решение задачи (1)–(5) методом Ритца. Функционал (6) в классе функций $\psi_{1y} > 0$ в $\overline{G_\gamma}$ и $\psi_{2y} > 0$ в $\overline{\Omega_\gamma}$ представим следующим образом:

$$I_1(z_1, z_2) = \iint\limits_{\Delta_1} \left[\left(z_{1x} + \frac{g_x}{g} z_1 \right)^2 + \frac{1}{g^2} + 2\omega(\varphi - 1) z_{1\varphi}^2 \right] \frac{g}{z_{1\varphi}} dx d\varphi +$$

$$+ \iint\limits_{\Delta_2} \left[\left(z_{2x} + \frac{g_x}{g} z_2 \right)^2 + \frac{1}{g^2} \right] \frac{g}{z_{2\varphi}} dx d\varphi, \tag{8}$$

где $\Delta_1 = (0 < x < a, 1 < \varphi < C)$, $\Delta_2 = (0 < x < a,\ 0 < \varphi < 1)$, $z_1(x,\varphi)$ и $z_2(x,\varphi)$ — функции, определенные, соответственно, в $\overline{\Delta_1}$ и $\overline{\Delta_2}$ и являющиеся решениями уравнений: $\varphi_1(x,z) - \varphi_1 = 0$, $\varphi_2(x,z) - \varphi_2 = 0$, $\psi_1(x, zg(x)) = \varphi_1(x,z)$, $\psi_2(x, zg(x)) = \varphi$. Функционал (8) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$G_z = \big\{ (z_1, z_2) \colon z_1 \in C^1(\overline{\Delta_1}),\ z_2 \in C^1(\overline{\Delta_2}),\ z_2(x,0) = 0,\ z_1(x,c) = 1;$$
$$z_1(x,1) = z_2(x,1),\ \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_1}} z_{1\varphi} > 0,\ \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_2}} z_{2\varphi} > 0 \big\}. \tag{9}$$

Обозначим через $w_1(x,\varphi)$, $w_2(x,\varphi)$ функции, соответствующие классическому решению (ψ_1, ψ_2, γ) задачи (1)–(4) и можно считать, что $(w_1, w_2) \in G_z$. Применим теперь формулу Фридрихса [1]

$$I_1(z_z, z_2) = I_1(w_1, w_2) + \frac{d}{d\varepsilon} I_1(z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}) \Big|_{\varepsilon=0} + \int\limits_0^1 (1-\varepsilon) \frac{d^2}{d\varepsilon^2} I_1(z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}) d\varepsilon, \tag{10}$$

$$\frac{d^2 I_1}{d\varepsilon^2}(z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}) = 2 \iint\limits_{\Delta_1} \left\{ \left[z_{1\varepsilon} \left(\delta z_{1x} + \frac{g_x}{g} \delta z_1 \right) - \delta z_{1\varphi} \left(z_{1x\varepsilon} + \frac{g_x}{g} z_{1\varepsilon} \right) \right]^2 + \frac{\delta z_{1\varphi}^2}{g^2} \right\} \frac{g}{z_{1\varphi\varepsilon}^3} dx d\varphi +$$

$$+ 2 \iint\limits_{\Delta_2} \left\{ \left[z_{2\varepsilon} \left(\delta z_{2x} + \frac{g_x}{g} \delta z_{21} \right) - \delta z_{2\varphi} \left(z_{2x\varepsilon} + \frac{g_x}{g} z_{2\varepsilon} \right) \right]^2 + \frac{\delta z_{2\varphi}^2}{g^2} \right\} \frac{g}{z_{2\varphi\varepsilon}^3} dx d\varphi, \tag{11}$$

где $z_{1\varepsilon} = w_1 + \varepsilon(z_1 - w_1)$, $z_{2\varepsilon} = w_2 + \varepsilon(z_2 - w_2)$, $\delta z_1 = z_1 - w_1$, $\delta z_2 = z_2 - w_2$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, z_1, z_2 — произвольная пара из G_z. Тогда получим $I_1(w_1, w_2) \leqslant I_1(z_1, z_2)$.

Лемма 4. *Пара* $(w_1, w_2) \in G_z$, *соответствующая решению задачи* (1)–(5), *доставляет наименьшее значение функционалу* (8) *на множестве* (9).

Будем минимизировать функционал (8) на множестве (9) при помощи сумм

$$z_{1n}(x,\varphi) = 1 + \frac{c-\varphi}{c-1} \sum_{k=0}^{L} \sum_{j=0}^{M_j} b_{kj} x^j \varphi^k, z_{2n}(x,\varphi) = \sum_{k=1}^{L} \sum_{j=0}^{M_j} a_{kj} x^j \varphi^k, \tag{12}$$

где $n = \sup(j + M_j)$ при $0 \leqslant j \leqslant L$. Включение $(z_{1n} z_{2n}) \in G_z$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов a_{kj}, b_{kj} область допустимости G_r, где

$$r = \sum_{k=0}^{L} (1 + 2M_k); \qquad G_2 = G_r^+ \bigcap E_0; \qquad G_r^+ = G_r^1 \oplus G_r^2; \qquad E_0 = E_0^0 \oplus E_1^0 \oplus \cdots \oplus E_L^0;$$

$$G_r^1 = \bigl\{b_{kj}\colon \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_1}} z_{1n\varphi} > 0\bigr\}, \qquad G_r^2 = \{a_{kj}\colon \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_2}} z_{2n\varphi} > 0\};$$

$$E_0^0\colon \sum_{k=1}^{M_0} a_{k0} = \sum_{k=0}^{M_0} b_{k0} + 1; \qquad E_j^0\colon \sum_{k=1}^{M_j} a_{kj} = \sum_{k=0}^{M_j} b_{kj},$$

$$j = 1, 2, \ldots, L; \qquad L = \max_{0\leqslant k\leqslant M} L_k\,.$$

Неизвестные коэффициенты a_{kj}, b_{kj} определяются из нелинейной системы Ритца [4–6]:

Теорема 2. *Функция $I_2(a_{kj}, b_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке множества G_r, лежащей на конечном расстоянии от начала координат. При этом нелинейная система Ритца имеет по крайней мере одно решение на множестве G_r.*

Сходимость приближений Ритца.Решив систему Ритца при каждом фиксированном n, можно затем построить последовательность приближений (12) в виде $z_{1n}(x,\varphi) = z_{1n}^*$, $z_{2n}(x,\varphi) = z_{2n}^*$.

Лемма 5. *Приближения* (12), *построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала* (8) *на множестве* (9).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству сходимости приближений Ритца (12).

Лемма 6. *Пусть $w_1(x,\varphi) \in W_2^l(\Delta_1)$, $w_2(x,\varphi) \in W_2^l(\Delta_2)$, где $l \geqslant 4$. Тогда можно построить допустимые многочлены*

$$u_{1n} = 1 + \frac{c-\varphi}{c-1}\sum_{j=0}^{L}\sum_{k=0}^{M_j} b_{kj}x^j\varphi^k, \qquad u_{2n} = \sum_{j=0}^{L}\sum_{k=1}^{M_j} a_{kj}x^j\varphi^k,$$

такие, что

$$\|w_1 - u_{1n}\|^2_{w_2^1(\Delta_1)} = O\biggl(\frac{1}{n^{2(l-1)}}\biggr), \qquad \|w_2 - u_{2n}\|^2 = O\biggl(\frac{1}{n^{2(l-1)}}\biggr).$$

Доказательство. В основу доказательства положена методика работы [6].

Теорема 3. *Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и леммы 6. Тогда последовательность приближений* (12), *построенных по методу Ритца, сходится к точному решению w_1, w_2 по норме в $C(\overline{\Delta_1})$, $C(\overline{\Delta_2})$.*

Замечание. Предложенный метод исследования задачи может быть применен при изучении морских проливов. В задачах управления свободной границей γ может применяться нечеткая логика.

1. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
2. *Миненко А. С., Шевченко А. И.* Методы исследования нелинейных математических моделей. – Киев: Наук. думка, 2012. – 130 с.
3. *Миненко А. С.* Осесимметричное течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–487.
4. *Friedrich K. O.* Ube rein Minimumproblem für Potential stromungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**, No 1. – P. 60–82.
5. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291–294.

6. *Миненко А. С.* О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1358–1394.

Институт информатики и искусственного интеллекта ДонНТУ, Донецк

Поступило в редакцию 23.11.2012

Член-кореспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко**

Моделювання потенціально-вихрової течії з вільною межею з застосуванням нечіткої логіки

Доведено розв'язність крайової задачі з вільною межею. Побудовано наближений розв'язок методом Рітца. Доведено збіжність наближеного розв'язку до точного розв'язку в метриці C і W_2^1.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

Modeling a potentially rotational current with free boundary with the use of the fuzzy logic

Solvability of a boundary-value problem with free boundary is proved. The approximate solution is constructed, using the Ritz method. The convergence of the approximate solution to the exact one in the metric C and W_2^1 is proved.