УДК 539.3

В. В. Чехов

Співвідношення тензорно-матричного вісесиметричного розрахунку великих деформацій методом скінченних елементів

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

Для розв'язання вісесиметричних задач розвинуто тензорно-матричну систему рівнянь МСЕ, що описує великі деформації нестисливого пружного тіла, а також матрицю частинних похідних цієї системи.

На сьогодні найбільш поширеним підходом у розв'язанні задач геометрично нелінійного деформування твердих тіл за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) є інкрементальний підхід з ітераційним уточненням [1, 2]. При цьому у деяких роботах застосовується суто ітераційний підхід [3, 4]. Зокрема, система рівнянь МСЕ [4]

$$\begin{cases} \{\vec{A}(\{\vec{R}\},\{p\})\} = \{\vec{K}(\{\vec{R}\},\{p\})\} + 2([L] + ({}^{[4]}[M]\{\vec{R}\})\cdot\{\vec{R}\})\{\vec{R}\} - \{\vec{f}\} = \{\vec{0}\}, \\ \{B(\{\vec{R}\})\} = \{0\} \end{cases} \tag{1}$$

дозволяє розв'язувати задачі статичного навантаження тіл з нестисливих матеріалів з урахуванням великих деформацій. Тут $\{\vec{f}\}$ — стовпець вузлових навантажень; $\{\vec{R}\}$ і $\{p\}$ — невідомі (стовпці, відповідно, вузлових радіус-векторів деформованої конфігурації і величин середнього тиску в скінченних елементах (СЕ) згідно з умовою нестисливості); $\{\vec{K}\}$, $[L]$, ${}^{[4]}[M]$ та $\{B\}$ — векторні та матричні величини, що мають такі компоненти:

$$\vec{K}_{[\alpha i]} = -p_{[\alpha]} \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} \left(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}\right)^{-1} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\, d\overset{0}{v}, \qquad L_{[\alpha ij]} = \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} {}_1\Psi \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\, d\overset{0}{v},$$

$$M_{[\alpha ijkl]} = \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} {}_2\Psi \left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]}\right)\left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha l]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\right) d\overset{0}{v}, \tag{2}$$

$$B_{[\alpha]} = \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} \left(III\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}\right) - 1\right) d\overset{0}{v},$$

де α — номер СЕ; i, j, k, l — номери вузлів скінченноелементної сітки; $\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}$ — градієнт місця [5]; $N_{[\alpha i]}$ — функція форми, що належить до α-го СЕ й i-го вузла; ${}_1\Psi$ і ${}_2\Psi$ — функції від інваріантів міри деформації з рівняння стану матеріалу α-го СЕ у формі Фінгера [5]; III — кубічний інваріант. Для системи (1) у роботі [4] аналітично одержано матрицю частинних похідних, що необхідна для ефективного відшукання її розв'язків. Ці результати є застосовними до загального тривимірного випадку, а також до випадку плоскої деформації. У даній роботі наведено результати, які розширюють дію системи (1) на випадок розв'язання вісесиметричних задач.

Розглянемо формулювання задачі деформування, коли як матеріальні координати $\{q^1, q^2, q^3\}$ використовуються циліндричні координати $\left\{\overset{0}{\rho}, \overset{0}{\varphi}, \overset{0}{z}\right\}$ (нуликом згори позначено величини, що належать до відлікової конфігурації тіла). Через них радіус-вектор $\overset{0}{\vec{r}}$ та базисні вектори $\overset{0}{\vec{e}}_i = \partial \overset{0}{\vec{r}}/\partial q^i$ відлікової конфігурації виражаються так:

$$\overset{0}{\vec{r}}\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{\varphi}, \overset{0}{z}\right) = \vec{i}_1 \overset{0}{\rho} \cos \overset{0}{\varphi} + \vec{i}_2 \overset{0}{\rho} \sin \overset{0}{\varphi} + \vec{i}_3 \overset{0}{z},$$

$$\overset{0}{\vec{e}}_\rho = \vec{i}_1 \cos \overset{0}{\varphi} + \vec{i}_2 \sin \overset{0}{\varphi}, \qquad \overset{0}{\vec{e}}_\varphi = \overset{0}{\rho}\left(-\vec{i}_1 \sin \overset{0}{\varphi} + \vec{i}_2 \cos \overset{0}{\varphi}\right), \qquad \overset{0}{\vec{e}}_z = \vec{i}_3,$$

де $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ — орти допоміжної декартової системи координат, які звідси можна виразити таким чином:

$$\vec{i}_1 = \overset{0}{\vec{e}}_\rho \cos \overset{0}{\varphi} - \overset{0}{\vec{e}}_\varphi \frac{1}{\overset{0}{\rho}} \sin \overset{0}{\varphi}, \qquad \vec{i}_2 = \overset{0}{\vec{e}}_\rho \sin \overset{0}{\varphi} + \overset{0}{\vec{e}}_\varphi \frac{1}{\overset{0}{\rho}} \cos \overset{0}{\varphi}, \qquad \vec{i}_3 = \overset{0}{\vec{e}}_z \,. \tag{3}$$

Взаємний базис у циліндричній системі: $\overset{0}{\vec{e}}{}^\rho = \overset{0}{\vec{e}}_\rho$, $\overset{0}{\vec{e}}{}^\varphi = \overset{0}{\vec{e}}_\varphi / \overset{0}{\rho}{}^2$, $\overset{0}{\vec{e}}{}^z = \overset{0}{\vec{e}}_z$.

Радіус-вектор деформованої конфігурації наведемо з урахуванням того, що у випадку осьової симетрії переміщення не залежить від кутової координати:

$$\vec{r}\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{\varphi}, \overset{0}{z}, t\right) = \overset{0}{\vec{r}}\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{\varphi}, \overset{0}{z}\right) + \vec{u}\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{z}, t\right) = \left(\overset{0}{\rho} + u\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{z}, t\right)\right)\vec{i}_1 \cos\left(\overset{0}{\varphi} + v\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{z}, t\right)\right) +$$
$$+ \left(\overset{0}{\rho} + u\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{z}, t\right)\right)\vec{i}_2 \sin\left(\overset{0}{\varphi} + v\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{z}, t\right)\right) + \left(\overset{0}{z} + w\left(\overset{0}{\rho}, \overset{0}{z}, t\right)\right)\vec{i}_3,$$

де u, v та w — компоненти переміщення $\vec{u}$ в циліндричних координатах. З цього, з підставленням (3), випливають вирази для базисних векторів $\vec{e}_i = \partial\vec{r}/\partial q^i$ деформованої конфігурації (другий вираз відповідає як $\vec{e}_\rho$, так і $\vec{e}_z$):

$$\vec{e}_\varphi = -\rho \sin v \, \overset{0}{\vec{e}}_\rho + \frac{\rho}{\overset{0}{\rho}} \cos v \, \overset{0}{\vec{e}}_\varphi, \qquad \vec{e}_i = \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial q^i} \overset{0}{\vec{e}}_\rho + \frac{1}{\overset{0}{\rho}} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial q^i} \overset{0}{\vec{e}}_\varphi + \frac{\partial z}{\partial q^i} \overset{0}{\vec{e}}_z \,.$$

Побудовані співвідношення дозволяють визначити градієнт місця:

$$\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r} = \overset{0}{\vec{e}}{}^s \vec{e}_s = \overset{0}{\vec{e}}_\rho \vec{e}_\rho + \frac{1}{\overset{0}{\rho}{}^2} \overset{0}{\vec{e}}_\varphi \vec{e}_\varphi + \overset{0}{\vec{e}}_z \vec{e}_z = \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial \overset{0}{\rho}} \overset{0}{\vec{e}}_\rho \overset{0}{\vec{e}}_\rho + \frac{1}{\overset{0}{\rho}} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial \overset{0}{\rho}} \overset{0}{\vec{e}}_\rho \overset{0}{\vec{e}}_\varphi +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial \overset{0}{\rho}} \overset{0}{\vec{e}}_\rho \overset{0}{\vec{e}}_z - \frac{\rho}{\overset{0}{\rho}{}^2} \sin v \, \overset{0}{\vec{e}}_\varphi \overset{0}{\vec{e}}_\rho + \frac{\rho}{\overset{0}{\rho}{}^3} \cos v \, \overset{0}{\vec{e}}_\varphi \overset{0}{\vec{e}}_\varphi + \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial \overset{0}{z}} \overset{0}{\vec{e}}_z \overset{0}{\vec{e}}_\rho + \frac{1}{\overset{0}{\rho}} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial \overset{0}{z}} \overset{0}{\vec{e}}_z \overset{0}{\vec{e}}_\varphi +$$
$$+ \frac{\partial z}{\partial \overset{0}{z}} \overset{0}{\vec{e}}_z \overset{0}{\vec{e}}_z \,.$$

Зведемо задачу до двовимірної, заради чого задамо відповідність координат $q^1 \equiv \overset{0}{\rho}$, $q^2 \equiv \overset{0}{z}$, $q^3 \equiv \overset{0}{\varphi}$ й виключимо з розгляду деформацію кручення:

$$\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}\Big|_{\varphi=\overset{0}{\varphi}=\text{const}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial\overset{0}{\rho}} & \dfrac{\partial z}{\partial\overset{0}{\rho}} & 0 \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial\overset{0}{z}} & \dfrac{\partial z}{\partial\overset{0}{z}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\rho}{\overset{0}{\rho}{}^3} \end{bmatrix} \overset{0}{\vec{e}}_s \overset{0}{\vec{e}}_t = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial\overset{0}{\rho}} & \dfrac{\partial z}{\partial\overset{0}{\rho}} & 0 \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial\overset{0}{z}} & \dfrac{\partial z}{\partial\overset{0}{z}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\rho}{\overset{0}{\rho}} \end{bmatrix} \overset{0}{\vec{e}}_s \overset{0}{\vec{e}}{}^t.$$

При переході до скінченноелементної апроксимації в площині двовимірного СЕ компоненти деформованого радіус-вектора виражаються за допомогою базисних функцій через свої вузлові значення: $\vec{r}_{[\alpha]} = \sum\limits_i N_{[\alpha i]}\vec{R}_{[i]}$, де α — номер СЕ, $\vec{R}_{[i]}$ — радіус-вектор деформованого стану i-го вузла скінченноелементної сітки. Через це МСЕ-апроксимація градієнта місця має такий вигляд:

$$\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}_{[\alpha]} = \sum_i \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\vec{R}_{[i]} + \underline{\frac{\rho}{\overset{0}{\rho}}\overset{0}{\vec{e}}{}^3\,\overset{0}{\vec{e}}_3}\,. \tag{4}$$

Оскільки градієнт місця присутній в усіх співвідношеннях (2), то застосування одержаного виразу (4) дозволяє використовувати систему рівнянь МСЕ (1) для вісесиметричних обрахунків. Зазначимо, що за винятком підкресленого множника вираз (4) збігається з аналогічним для випадку плоскої деформації [4]. Вкажемо також й інші моменти, які треба враховувати при застосуванні системи (1) у вісесиметричному розрахунку, — теж з підкресленням відмінностей від випадку плоскої деформації, що є зручним для реалізації обох цих випадків в одному спільному доданку.

Інтегрування по об'єму α-го СЕ зводиться до інтегрування по його площі перерізу s в локальних координатах елемента:

$$\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} d\overset{0}{v} = \underline{2\pi}\iint\limits_{\overset{0}{s}_{[\alpha]}} \underline{\overset{0}{\rho}}\, d\overset{0}{s} = \underline{2\pi}\iint\limits_{\overset{\alpha}{s}_{[\alpha]}} \underline{\overset{0}{\rho}}\,\frac{d\overset{0}{s}}{\overset{\alpha}{s}}\, d\overset{\alpha}{s}.$$

Міра деформації Фінгера та її перший інваріант ($\mathbf{1}$ — метричний тензор):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{[\alpha]} &= \Big(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}\Big)^T_{[\alpha]} \cdot \Big(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}\Big)_{[\alpha]} = \sum_i \sum_k \Big(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]}\Big)\vec{R}_{[i]}\vec{R}_{[k]} + \underline{\left(\frac{\rho}{\overset{0}{\rho}}\right)^2 \overset{0}{\vec{e}}_3\,\overset{0}{\vec{e}}{}^3}, \\ I(\mathbf{b}_{[\alpha]}) &= \mathbf{1}\cdot\cdot\,\mathbf{b}_{[\alpha]} = \sum_i \sum_k \Big(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]}\Big)\big(\vec{R}_{[i]}\cdot\vec{R}_{[k]}\big) + \underline{\left(\frac{\rho}{\overset{0}{\rho}}\right)^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для вісесиметричного випадку мають бути знову отримані також компоненти матриці частинних похідних системи (1). Диференціювання додаткового члена $\frac{\rho}{\overset{0}{\rho}}\overset{0}{\vec{e}}{}^3\,\overset{0}{\vec{e}}_3$, наявного у виразі (4), проведемо з урахуванням апроксимації МСЕ $\rho = \sum\limits_i N_{[\alpha i]}\rho_{[i]}$, де $\rho_{[i]}$ — вузлові ρ-компоненти радіус-вектора:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\vec{R}_{[n]}} = \sum_i N_{[\alpha i]}\frac{\partial(\rho_{[i]})}{\partial\vec{R}_{[n]}} = N_{[\alpha n]}\frac{\partial(\rho_{[n]})}{\partial\vec{R}_{[n]}} = N_{[\alpha n]} \overset{0}{\vec{e}}{}^{s}\frac{\partial\rho_{[n]}}{\partial R^s_{[n]}} = N_{[\alpha n]} \overset{0}{\vec{e}}{}^{s}\delta^1_s = N_{[\alpha n]} \overset{0}{\vec{e}}{}^{1}.$$

Звідси

$$\frac{\partial\left(\frac{\rho}{\overset{0}{\rho}}\overset{0}{\vec{e}}{}^{3}\overset{0}{\vec{e}}_3\right)}{\partial\vec{R}_{[n]}} = \overset{0}{\vec{e}}{}^{3}\frac{1}{\overset{0}{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial\vec{R}_{[n]}}\cdot\overset{0}{\vec{e}}{}^{s}\overset{0}{\vec{e}}_3\overset{0}{\vec{e}}_s = \overset{0}{\vec{e}}{}^{3}\frac{1}{\overset{0}{\rho}}N_{[\alpha n]}\overset{0}{\vec{e}}{}^{1}\cdot\overset{0}{\vec{e}}{}^{s}\overset{0}{\vec{e}}_3\overset{0}{\vec{e}}_s = \frac{N_{[\alpha n]}}{\overset{0}{\rho}}\overset{0}{\vec{e}}{}^{3}\overset{0}{\vec{e}}_3\overset{0}{\vec{e}}{}^{1}. \tag{6}$$

Матриця частинних похідних системи (1) складається з чотирьох блоків [4]

$$\left[\frac{\partial(\vec{A},B)}{\partial(\vec{R},p)}\right] = \begin{bmatrix}\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{R}}\right] & \left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial p}\right]\\ \left[\frac{\partial B}{\partial\vec{R}}\right] & [0]\end{bmatrix}, \tag{7}$$

де для загального тривимірного розрахунку та випадку плоскої деформації блок $\left[\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial p}\right]$ має компонентами

$$\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial p}\right)_{[i\alpha]} = -\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}\right)^{-1}_{[\alpha]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha i]}\,d\overset{0}{v},$$

а доданки, що складають блок $\left[\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{R}}\right]$, позначені у такий спосіб

$$\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{R}}\right] = \sum_\alpha([\mathbf{DK}]_{[\alpha]} + 2([\mathbf{DL}]_{[\alpha]} + [\mathbf{DM}]_{[\alpha]})),$$

мають такі компоненти:

$$\mathbf{DK}_{[\alpha i n]} = p_{[\alpha]}\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}\right)^{-1}_{[\alpha]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha n]}\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}\right)^{-1}_{[\alpha]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha i]}\,d\overset{0}{v},$$

$$\mathbf{DL}_{[\alpha i n]} = \sum_j\vec{R}_{[j]}\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha j]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha i]}\right)\frac{\partial_1\Psi}{\partial\vec{R}_{[n]}}\,d\overset{0}{v} + \mathbf{1}L_{[\alpha i n]},$$

$$\mathbf{DM}_{[\alpha i n]} = \sum_k\sum_j\Bigg(\left(\vec{R}_{[k]}\cdot\vec{R}_{[j]}\right)\Bigg(\Bigg\langle\sum_l\vec{R}_{[l]}\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha l]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha k]}\right)$$

$$\left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\right) \frac{\partial_2 \Psi}{\partial \vec{R}_{[n]}} d\overset{0}{v} \Bigg\rangle + \mathbf{1} \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} {}_2\Psi \left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]}\right)\left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\right) d\overset{0}{v} \Bigg) +$$

$$+ \vec{R}_{[k]} \vec{R}_{[j]} \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} {}_2\Psi \Bigg(\left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]}\right)\left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\right) +$$

$$+ \left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]}\right)\left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\right)\Bigg) d\overset{0}{v} \Bigg).$$

При уточненні компонент матриці (7) для вісесиметричного розрахунку, з урахуванням (6), вирази для $\left[\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial p}\right]$ і $\mathbf{DK}_{[\alpha i n]}$ залишаться без змін. Члени $\mathbf{DL}_{[\alpha i n]}$ та $\mathbf{DM}_{[\alpha i n]}$ для вісесиметричного випадку отримаємо на прикладі матеріалу Муні–Ривліна, у якого ${}_1\Psi = {}_1C + I(\mathbf{b})_2C$, ${}_2\Psi = -{}_2C$. Заради цього, після диференціювання 1-го інваріанта міри деформації Фінгера (5), знайдемо $\dfrac{\partial_1 \Psi}{\partial \vec{R}_{[n]}}$ і в результаті одержуємо

$$\mathbf{DL}_{[\alpha i n]} = 2{}_2C \sum_j \vec{R}_{[j]} \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} \left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\right)\left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]} \cdot (\overset{0}{\vec{\nabla}} \vec{r})_{[\alpha]} \underline{+ \frac{\rho N_{[\alpha n]}}{\overset{0}{\rho}{}^2} \overset{0}{\vec{e}}{}^1}\right) d\overset{0}{v} + \mathbf{1} L_{[\alpha i n]},$$

а у виразі $\mathbf{DM}_{[\alpha i n]}$ очевидно буде відсутнім доданок, взятий у кутові дужки.

Щоб отримати компоненти блоку $\left[\dfrac{\partial B}{\partial \vec{R}}\right]$, перепишемо (4) у вигляді

$$\overset{0}{\vec{\nabla}} \vec{r} = S^{\overline{q}}_{\overline{p}} \overset{0}{\vec{e}}{}^{\overline{p}} \overset{0}{\vec{e}}_{\overline{q}} + \frac{\rho}{\underline{\overset{0}{\rho}}} \overset{0}{\vec{e}}{}^3 \overset{0}{\vec{e}}_3 \qquad \text{(за індексами з рискою підсумовувати до 2)},$$

де позначено $S^q_p = \sum\limits_i \overset{0}{\nabla}_p N_{[\alpha i]} R^q_{[i]}$. З цього $III(\overset{0}{\vec{\nabla}} \vec{r}) = \dfrac{\rho}{\underline{\overset{0}{\rho}}}(S^1_1 S^2_2 - S^2_1 S^1_2)$. З урахуванням того, що $\dfrac{\partial S^q_p}{\partial \vec{R}_{[n]}} = \overset{0}{\nabla}_p N_{[\alpha n]} \overset{0}{\vec{e}}{}^q$, одержуємо:

$$\frac{\partial\left(III\left(\overset{0}{\vec{\nabla}} \vec{r}\right)\right)}{\partial \vec{R}_{[n]}} = \frac{\rho}{\underline{\overset{0}{\rho}}} \sum_i \left(\overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha n]} \overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha i]} - \overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha n]} \overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha i]}\right)\left(R^2_{[i]} \overset{0}{\vec{e}}{}^1 - R^1_{[i]} \overset{0}{\vec{e}}{}^2\right) +$$

$$+ \underline{\frac{N_{[\alpha n]}}{\overset{0}{\rho}} \overset{0}{\vec{e}}{}^1 (S^1_1 S^2_2 - S^2_1 S^1_2)}.$$

Через це

$$\left[\frac{\partial B}{\partial \vec{R}}\right]_{[\alpha n]} = \frac{\partial (B_{[\alpha]})}{\partial \vec{R}_{[n]}} = \sum_i \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} \frac{\rho}{\underline{\overset{0}{\rho}}} \left(\overset{0}{\vec{\nabla}}_{[\alpha n]} \times \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\right)_3 d\overset{0}{v} \left(R^2_{[i]} \overset{0}{\vec{e}}{}^1 - R^1_{[i]} \overset{0}{\vec{e}}{}^2\right) +$$

$$+\overset{0}{\vec{e}}{}^1 \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} \frac{N_{[\alpha n]}}{\overset{0}{\rho}} (S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1)\, d\overset{0}{v}.$$

Таким чином, отримано розвиток системи рівнянь МСЕ (1) та аналітичних виразів компонент матриці її частинних похідних, який дозволяє розв'язувати задачі геометрично нелінійного деформування вісесиметричних тіл.

1. *Гузь А. Н., Сторожук Е. А., Чернышенко И. С.* Нелинейные двумерные задачи статики тонких оболочек с подкрепленными криволинейными отверстиями // Прикл. механика – 2009. – **45**, № 12. – С. 4–42.
2. *Bauer S., Schafer M., Grammenoudis P., Tsakmakis Ch.* Three-dimensional finite elements for large deformation micropolar elasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2010. – **199**. – P. 2643–2654.
3. *Korelc J.* Semi-analytical solution of path-independent nonlinear finite element models // Finite Elements in Analysis and Design. – 2011. – **47**, No 3. – P. 281–287.
4. *Чехов В. В.* Диференціювання рівняння МСЕ для великих деформацій у тензорно-матричній формі // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 72–77.
5. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 17.09.2012

В. В. Чехов

Соотношения тензорно-матричного осесимметричного расчета больших деформаций методом конечных элементов

Для решения осесимметричных задач развита тензорно-матричная система уравнений МКЭ, описывающая большие деформации несжимаемого упругого тела, а также получена матрица частных производных этой системы.

V. V. Chekhov

Relations for the tensor-matrix axisymmetric analysis of large strains by the finite element method

A system of tensor-matrix equations describing the large strains of an incompressible elastic body and its Jacobian matrix of partial derivatives of this system have been obtained to solve axisymmetric problems.