УДК 517.938.5

Член-корреспондент НАН Украины **В. В. Шарко**

Топологическая классификация функций

Рассмотрен вопрос о топологической классификации функций, в частности гармонических функций. С использованием графа Кронрода–Риба дано необходимое и достаточное условие, когда два гармонических полинома общего положения будут топологически эквивалентными.

Пусть X и Y — топологические пространства, а f и g — непрерывные отображения из X в Y.

Определение 1. Непрерывные отображения f и g называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $h\colon X \to X$ и $k\colon Y \to Y$ такие, что $k \cdot f = g \cdot h$.

Очевидно, что это *отношение эквивалентности* на множестве непрерывных отображений из X в Y. Заметим, что выбор гомеоморфизмов h и k не является однозначным. Таким образом, если зафиксировать топологические пространства X и Y, то естественно возникает две задачи: описать множество классов непрерывных отображений из X в Y относительно введенного отношения эквивалентности; указать необходимые и достаточные условия, когда два непрерывных отображения f и g из X в Y будут топологически эквивалентными.

Эти задачи сложны и ответ не известен даже, когда $X = Y = R^1$.

Лемма 1. *Существует непрерывная функция $f\colon [0,1] \to [0,1]$, которая не является топологически эквивалентной никакой гладкой функции $g\colon [0,1] \to [0,1]$.*

Доказательство. Пусть $g\colon [0,1] \to [0,1]$ — гладкая функция. По теореме Сарда мера образа множества критических точек функции g равна нулю. Следовательно, найдется отрезок $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$, на который не отображаются критические точки. Обозначим через Γ множество $g^{-1}[\alpha,\beta]$. Рассмотрим ту компоненту связности $\Delta = [a,b]$ множества Γ, которая отображается на отрезок $[\alpha,\beta]$. Очевидно, что сужение функции g на отрезок $[a,b]$ есть строго монотонная функция. Таким образом, у гладкой функции g существует отрезок, где она строго монотонная и этим свойством должна обладать любая непрерывная функция $f\colon [0,1] \to [0,1]$, топологически эквивалентная функции g. Однако существуют непрерывные функции, которые не обладают этим свойством. В качестве примера можна взять функцию из [1, пример 21].

Сделаем несколько замечаний. В дальнейшем мы предполагаем, что гомеоморфизм $k\colon R^1 \to R^1$ из определения 1 *сохраняет ориентацию*, т. е. задается строго монотонно возрастающей функцией. Очевидно, что если функции $f\colon X \to R^1$ и $g\colon X \to R^1$ топологически эквивалентны и точка $x_0 \in X$ является точкой локального максимума (минимума) функции f, то точка $h(x_0) \in X$ будет точкой локального максимума (минимума) функции g. Если f — строго монотонно возрастающая (убывающая) непрерывная функция, то она топологически эквивалентна линейной возрастающей (убывающей) функции l.

Лемма 2. *Пусть $f\colon [a,b] \to R^1$ — непрерывная функция с конечным числом локальных экстремумов такая, что если:*

1) $a = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ или $-\infty$;

2) $b = \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ или $-\infty$;

---

3) $a = -\infty$ и $b = \infty$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ или $-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ или $-\infty$, то f топологически эквивалентна кусочно-линейной функции.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки локальных экстремумов функции f. На интервалах (x_i, x_{i+1}) функция f строго монотонно возрастает или убывает. Следовательно, сужения функции f на эти интервалы топологически эквивалентны линейным функциям.

Следствие 1. *Пусть f — полином, тогда он топологически эквивалентен кусочно-линейной функции.*

Теорема 1. *Для каждой кусочно-линейной функции f, заданной на R^1 и имеющей m локальных экстремумов, существует полином степени $m+1$, который топологически эквивалентен функции f.*

Доказательство следует из результата, содержащегося в работе [2].

Известно [3], что существует конечное число топологически неэквивалентных полиномов степени $n > 1$ от $k > 0$ переменных, однако неизвестно их число и нет условий, дающих возможность установить, когда два полинома топологически эквивалентны. Существуют полиномы разных степеней от двух переменных, которые топологически эквивалентные.

Полиномы, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. Для гармонического полинома $P = P(x, y)$ существует комплексный полином $\mathbf{P}(z)$ такой, что $P(x, y) = \operatorname{Re}\mathbf{P}(z)$. Если $P(x, y) = \operatorname{Re}\mathbf{P}(z)$ а $Q(x, y) = \operatorname{Im}\mathbf{P}(z)$, то критические точки $P = P(x, y)$ совпадают с критическими точками $Q(x, y)$ и в окрестностях критических точек $P = P(x, y)$ и $Q(x, y)$ топологически эквивалентные. Однако в $\mathbb{R}^2$ они могут быть топологически неэквивалентными. В качестве примера рассмотрим сопряженные гармонические полиномы $P(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x$ и $Q(x, y) = -y^3 + 3x^2y - 3y$. Они имеют по две невырожденные критические точки, координаты которых $(\pm 1, 0)$. Для $P(x, y)$ эти критические точки лежат на разных линиях уровня, а для $Q(x, y)$ — на одной линии уровня. Следовательно $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ топологически неэквивалентные.

Лемма 3. *Гармонические полиномы от двух переменных разных степеней всегда топологически неэквивалентные.*

Известно [4], что критические точки гармонической функции двух переменных $f(x, y)$ всегда изолированные и в окрестности критической точки *непрерывной* заменой координат $f(x, y)$ можно привести к виду $f = \operatorname{Re} z^n + c$ $(n \geqslant 2)$. Если c — критическое значение гармонической функции $f(x, y)$, заданной в $\mathbb{R}^2$, то линия уровня $f(x, y) = c$ гомеоморфна бесконечному дереву, вложенному в $\mathbb{R}^2$. Каждая вершина этого дерева имеет четную валентность и между вершинами дерева и критическими точками $f(x, y)$, лежащими на этой линии уровня, имеется биекция. Число вершин может быть не более чем счетным. Этот факт следует из принципа максимума и локального представления гармонической функции в окрестности критической точки.

Лемма 4. *В $\mathbb{R}^2$ существует гармоническая функция с любым конечным (включая пустое) или бесконечным множеством $\Omega = (m_1, \ldots, m_n, \ldots)$ критических точек, имеющих вырожденности любых порядков.*

У гармонического полинома $P = P(x, y)$ число компонент связности любой линии уровня всегда конечное и линии уровня регулярного значения гомеоморфны числовой прямой. Разбиения плоскости $\mathbb{R}^2$ в объединение линий уровня полинома $P = P(x, y)$ задает слоение с особенностями. Принадлежность точки поверхности компоненте связности является отношением эквивалентности и, введя естественную фактор-топологию в множество компонент связности, получим фактор-множество. Это фактор-множество будет некомпактным графом с конечным множеством вершин конечной валентности, которое обозначим через $\Gamma_{K-R}(P)$ и которое называется графом Кронрода–Риба для полинома $P = P(x, y)$ [5].

Вершинам графа $\Gamma_{K-R}(P)$ соответствуют связные компоненты линий уровня, на которых лежат критические точки полинома.

Лемма 5. *Графы Кронрода–Риба гармонических полиномов разных степеней не изоморфны.*

Гармонический полином $P = P(x, y)$ каноническим образом задает функцию P_{K-R} на ее графе Кронрода–Риба $\Gamma_{K-R}(P)$, которая называется $K-R$ образом полинома $P = P(x, y)$. Значение P_{K-R} в точке $x \in \Gamma_{K-R}(P)$ равно значению $P = P(x, y)$ на соответствующей x компоненте связности линии уровня.

Определение 2. Пусть $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ — гармонические полиномы, а P_{K-R} и Q_{K-R} — их $K-R$ образы на графах $\Gamma_{K-R}(P)$ и $\Gamma_{K-R}(Q)$. Полиномы P и Q называются $K-R$ эквивалентными, если их $K-R$ образы P_{K-R} и Q_{K-R} эквивалентны, т. е. существует изоморфизм $s\colon \Gamma_{K-R}(P) \to \Gamma_{K-R}(Q)$ и гомеоморфизм $t\colon R^1 \to R^1$ такие, что $t \cdot P_{K-R} \cdot s^{-1} = Q_{K-R}$.

Гармонический полином называется гармоническим полиномом общего положения, если на его линии уровня лежит не более одной критической точки.

Теорема 2. *Гармонические полиномы общего положения будут топологически эквивалентными тогда и только тогда, когда они $K-R$ эквивалентные.*

1. *Гелбаум Б., Олмстед Д.* Контрпримеры в анализе. – Москва: Мир, 1967. – 251 с.
2. *Thom R.* L'equivalence d'une fonction differentiable et de'un polynome // Topology. – 1965. – **3**, No 2. – P. 297–307.
3. *Fukuda T.* Types topologiques des polynomes // Publ. math. l'I. H. E. Sci. – 1976. – **46**. – P. 87–106.
4. *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 687–700.
5. *Sharko V. V.* About Kronrod–Reeb graph of function on a manifold // Meth. Funct. Anal. and Topol. – 2006. – **12**, No 4. – P. 389–396.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 28.12.2012

Член-кореспондент НАН України **В. В. Шарко**

Топологічна класифікація функцій

Розглянуто питання про топологічну класифікацію функцій, зокрема гармонічних функцій. За допомогою графу Кронрода–Ріба дано необхідну та достатню умову, коли два гармонічних полінома загального положення будуть топологічно еквівалентними.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. V. Sharko**

Topological classification of functions

The problem of topological classification of functions, in particular harmonic functions, is considered. Using the Kronrod–Reeb graph, the necessary and sufficient condition for two harmonic polynomials of general position be topologically equivalent is given.