



УДК 551.466.6:532.529.2

Я. В. Загуменний, Ю. Д. Чашечкин

Индукцированное диффузией течение на клине

(Представлено академиком НАН Украины В. Т. Гринченко)

Расчет установившегося двумерного течения, индуцированного прерыванием фонового молекулярного переноса стратифицирующей компоненты непроницаемым клином, погруженным в покоящуюся несжимаемую жидкость, выполнен методом конечных объемов на основе решателей собственной разработки, дополняющих открытый пакет OpenFOAM. Визуализированы картины полей возмущений плотности, давления, скорости, завихренности, скорости бароклинной генерации завихренности и скорости диссипации механической энергии около горизонтального клина. Показана сложная ячеистая структура течения в непосредственной окрестности и вдали от препятствия. Проведенные расчеты динамических характеристик клина выявили существенное превышение горизонтальной компоненты подъемной силы над величиной сопротивления трения, что иллюстрирует эффективность пропульсивного механизма самодвижения клина вдоль горизонта нейтральной плавучести.

Неоднородности распределений температуры, концентрации и давления в термодинамически неравновесных системах, таких как гидросфера и атмосфера, приводят к формированию профилей плотности, меняющихся в достаточно широких пределах, включающих неустойчивые, нейтральные и устойчивые состояния. Прерывание диффузионного переноса стратифицирующей компоненты (температуры или концентрации растворенного вещества) на непроницаемой границе или препятствии, погруженном в толщу жидкости, нарушает условие горизонтальной однородности распределения давления и формирует в поле гравитационных или кориолисовых сил специфические медленные течения даже в отсутствие внешних дестабилизирующих факторов. Такие течения, названные индуцированными диффузией на топографии, активно изучаются как один из механизмов формирования склоновых потоков в океане [1, 2] или интенсивных долинных и горных ветров в атмосфере [3]. Они также ответственны за формирование тонкой структуры среды, влияют на перенос вещества в чистой жидкости, в пористой среде и в микроканалах [4].

Течения, индуцированные диффузией, обеспечивают самодвижение свободных тел нейтральной плавучести: равномерное перемещение горизонтального клина в покоящейся устойчиво стратифицированной среде наблюдалось в [5, 6]. Такие течения, усиленные до-

© Я. В. Загуменний, Ю. Д. Чашечкин, 2013

полнительными потоками вещества, сопровождающими естественный метаболизм, играют важную роль в динамике самодвижения фито- и зоопланктона.

Теоретическое изучение установившихся течений, индуцированных диффузией, ограничивается расчетом возмущений солёности и скорости в тонком слое, непосредственно примыкающем к препятствию [1, 2, 6]. Вначале рассматривалась стационарная задача, позднее было построено точное решение задачи установления течений на бесконечном склоне, когда нелинейные члены в уравнениях движения выпадают в силу геометрии задачи [7]. Численное исследование задачи установления течения выполнено на симметричных препятствиях — на горизонтальном цилиндре [8] и сфере [9].

Практический интерес представляет расчет течения, индуцированного диффузией на асимметричном препятствии, на котором формируются силы, приводящие к самодвижению свободного тела. В силу сложности нестационарной многомасштабной задачи расчеты формирования течений проводятся с существенными упрощениями (включая выбор специального значения отношения кинематической вязкости ν и коэффициента диффузии соли κ_S — числа Шмидта $Sc = \nu/\kappa_S = 1$ [6]). В общем случае и в непосредственной окрестности наклонной полосы, где существенны нелинейные эффекты, и на больших удалениях от нее, в течении формируется тонкая структура, параметры которой зависят от числа Шмидта [10].

В данной работе впервые рассчитана динамика формирования тонкой структуры течения и дана оценка сил, действующих на клиновидное препятствие, погруженное в толщу покоящейся непрерывно стратифицированной жидкости с малым значением числа Шмидта, соответствующим растворам солей и морской воде.

Система уравнений механики несжимаемой линейно стратифицированной жидкости, невозмущенное распределение плотности которой $\rho_0(z)$ задается профилем солёности $S_0(z)$ (где ось $0z$ направлена вертикально вверх; $\Lambda = (d \ln \rho_0 / dz)^{-1}$ — масштаб; $N = 2\pi/T_b = \sqrt{g/\Lambda}$ — частота и T_b — период плавучести; g — ускорение свободного падения), включает уравнения состояния $\rho(S(z))$, неразрывности, Навье–Стокса (в приближении Буссинеска) и диффузии стратифицирующей компоненты

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{00} \left(\exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) + s \right), & \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_{00}} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} - s \mathbf{g}, & (1) \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s &= \kappa_S \Delta s + \frac{v_z}{\Lambda}. \end{aligned}$$

Здесь s — возмущение солёности, включающее коэффициент солевого сжатия; $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — индуцированная скорость; P — давление за вычетом гидростатического; t — время; ∇ и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа. Рассмотрение проводится в лабораторной системе координат $x0z$, связанной с силой тяжести (невозмущенная жидкость покоится). Геометрия задачи, системы координат и схема течения представлены на рис. 1.

В жидкость погружен равнобедренный клин с периметром Σ , длиной боковой стороны L_ξ , высотой основания h и полууглом при вершине $\alpha = \arcsin(h/(2L_\xi))$. С верхней и нижней сторонами клина связываются две локальные системы координат $\xi_u 0 \zeta_u$ и $\xi_l 0 \zeta_l$, которые в лабораторной системе координат представляются соотношениями:

$$\xi_{u/l} = x \cos \alpha \pm z \sin \alpha; \quad \zeta_{u/l} = z \cos \alpha \mp x \sin \alpha. \quad (2)$$

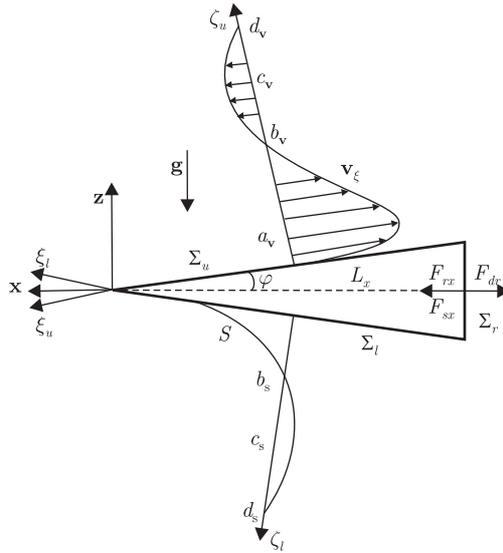


Рис. 1. Лабораторная $(x0z)$ и локальные системы координат $(\xi_u0\zeta_u)$, $(\xi_l0\zeta_l)$, профили продольной компоненты скорости $v_\xi(0, \zeta_u)$ и возмущения солёности $s(0, \zeta_l)$ в центре наклонных сторон непроницаемого клина

Распределение скорости индуцированного течения показано в локальной системе координат над верхней стороной клина, буквами a_v, b_v, c_v, d_v последовательно обозначены экстремумы и нули течения и примыкающего противотечения [10]. Профиль возмущения солёности приведен в координатах $\xi_l0\zeta_l$, аналогичные точки обозначены символами b_s, c_s, d_s (максимальные возмущения располагаются на боковых сторонах клина). Дальнейшие значения не приводятся вследствие малости.

Сходящиеся с клина течения переносят импульс в окружающую жидкость и, по третьему закону Ньютона, формируют силы, действующие на препятствие. В силу симметрии препятствия относительно плоскости $z = 0$ суммарная вертикальная компонента действующих сил равна нулю, значения горизонтальных компонент F_x будут даны ниже.

Рассматривается задача установления течения, когда в начальный момент времени $t = 0$ в покоящуюся жидкость без внесения дополнительных механических возмущений помещается клиновидное препятствие, непроницаемое для соли и воды. Физически обоснованные начальные и граничные условия задачи (прилипания для скорости, непротекания для вещества и затухания возмущений на бесконечности) имеют вид

$$\mathbf{v}, s|_{t \leq 0} = 0, \quad v_x|_\Sigma = v_z|_\Sigma = 0, \quad \left[\frac{\partial s}{\partial \mathbf{n}} \right] \Big|_\Sigma = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{v}, s|_{x, z \rightarrow \infty} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности клина Σ (рис. 1).

Система (1) с начальными и граничными условиями (3) характеризуется большим числом собственных масштабов: длины (плаучести Λ , горизонтального размера препятствия $L_x = L_\xi \sin \varphi$, скоростного $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu/N}$ и диффузионного $\delta_N^{\kappa_s} = \sqrt{\kappa_s/N}$ микромасштабов); скорости ($U_N^\nu = \sqrt{\nu N}$, $U_N^{\kappa_s} = \sqrt{\kappa_s N}$) и времени $t = T_b$. Существенные различия в значениях масштабов длины указывают на сложность внутренней структуры даже такого медленного течения, которое порождается малыми силами плаучести, возникающими вследствие неоднородности молекулярного потока стратифицирующего компонента.

Отношения масштабов задают традиционные безразмерные комплексы — шкалу плаучести $C = \Lambda/L_\xi$, коэффициент остроты $\Xi = h/L_\xi$, числа Рейнольдса с текущим значением скорости $Re = |\mathbf{v}|L_x/\nu$ (или с характерным, определяемым масштабами задачи $Re_N = L_x/\delta_N^\nu = \sqrt{NL_x^2/\nu}$), Пекле $Pe = |\mathbf{v}|L_x/\kappa_S$ ($Pe_N = L/\delta_N^{\kappa_S} = U_N^{\kappa_S} L_x/\kappa_S = \sqrt{NL_x^2/\kappa_S}$), Шмидта $Sc = \frac{\nu}{\kappa_S}$ (здесь числа Фруда и Рейнольдса связаны соотношением $Fr = U_N^\nu/NL_x = \delta_N^\nu/L_x = 1/Re_N$).

Вычисления проведены с использованием интерактивных инструментов открытого пакета OpenFOAM на базе суперкомпьютерного комплекса МСЦ РАН на платформе UniHUB — виртуальной вычислительной лаборатории, предназначенной для разработки и моделирования вычислительных задач. Стандартный решатель isoFoam для однородной несжимаемой вязкой жидкости был дополнен оригинальными кодами, учитывающими эффекты стратификации и диффузии.

С помощью встроенных утилит OpenFOAM рассчитаны основные физические параметры: компоненты скорости, давление, плотность (соленость), а с дополнительными кодами — функция тока, завихренность, скорость бароклинной генерации завихренности, компоненты тензора вязких напряжений, компоненты сил, действующих на препятствие, скорость диссипации механической энергии. Для визуализации скалярных полей применялся высоко-разрешающий метод построения полихромной карты изолиний в логарифмической шкале, содержащей не менее двенадцати уровней [11].

Непроницаемое препятствие блокирует фоновый диффузионный перенос и формирует сложную систему течений, включающую тонкие главные струи вдоль наклонных сторон с примыкающими противотечениями, и систему компенсационных циркуляционных ячеек.

Картины полей основных физических переменных установившегося течения включают ряд общих особенностей, выраженных вблизи вершины клина, где, собственно говоря, и формируются склоновые струи, и задних кромок, где они отрываются от препятствия.

Механизм формирования течений иллюстрирует картина возмущений поля солености (рис. 2, а). Вблизи боковых поверхностей формируется тонкий слой дефицита солености на верхней грани (темная полоса, $b_S^u = 0,16$ см — у вершины и $b_S^u = 0,11$ см — у основания клина) и избытка солености на нижней грани (светлая полоса, $b_S^l = 0,17$ см — у вершины и $b_S^l = 0,11$ см — у основания клина). К данным полосам примыкают не достигающие вершины клина области избытка (светлая над клином) и дефицита солености (темная под клином). Перед клином располагается протяженная область дефицита солености в верхнем полупространстве и избытка — в нижнем.

К основанию клина примыкает протяженная донная область, в которой практически сохраняется невозмущенный профиль солености, дополняющая фигуру препятствия до симметричной относительно основания (“обращенный клин с криволинейными границами”). Над углами, примыкающими к основанию клина, располагаются асимметричные области тонкоструктурных возмущений, которые проникают во внешнюю часть донной области, как и в случае наклонной пластины [10].

В картине возмущений область дефицита давления располагается в толстом слое перед телом и в тонкой прослойке, примыкающей к боковым сторонам клина (рис. 2, б). Толщина прослойки вторгающейся области избытка давления (светлоокрашенной на рис. 2, б) у вершины составляет $b_P^u = 0,13$ см на расстоянии $x = 1,4$ см от вершины и $b_P^u = 0,05$ см на расстоянии $x = 0,5$ см от основания клина, $c_P^u = 0,12$ см и $d_P^u = 0,32$ см.

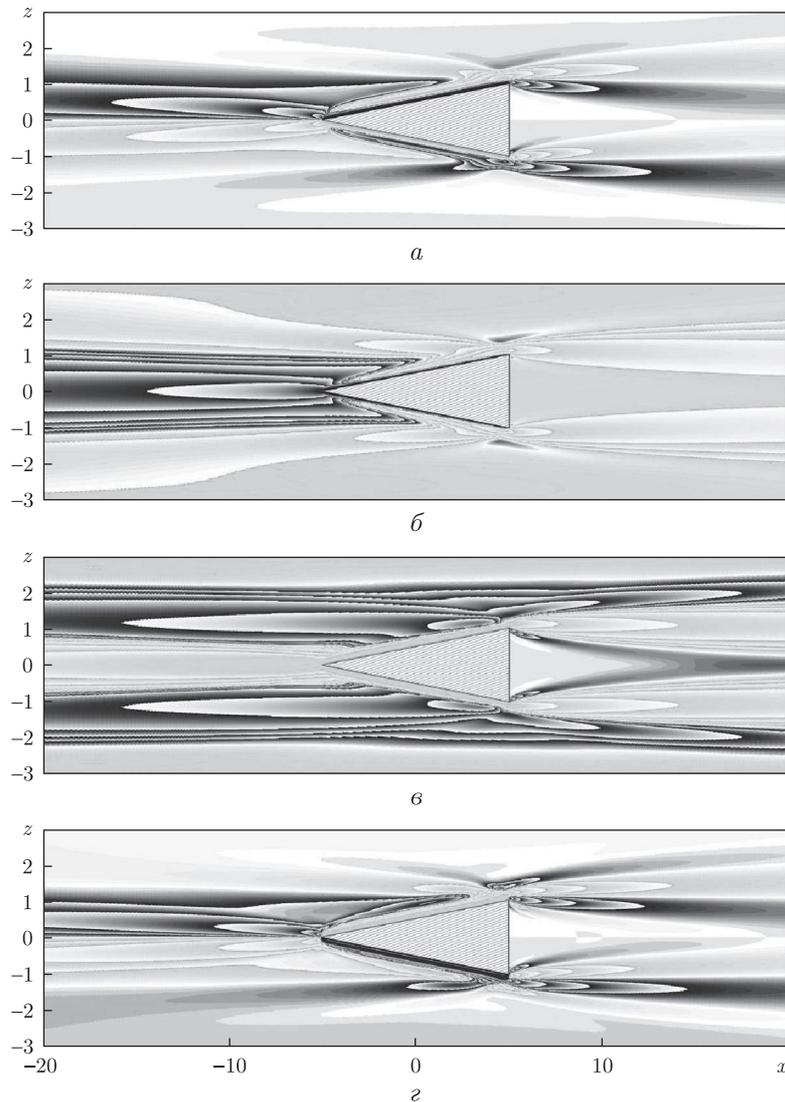


Рис. 2. Картины полей течения, индуцированного диффузией на непроницаемом клине ($L_x = 10$ см, $N = 1,256$ с⁻¹, $T_b = 5$ с, $\varphi = 6^\circ$, $\tau = 60$):
 а — возмущения солёности s ; б — давления P ; в — горизонтальной v_x и г — вертикальной v_z компонент скорости

Разность давлений — подпор у основания и дефицит перед клином, а также в тонком слое вдоль его боковых сторон и создает интегральную силу, толкающую горизонтальный клин в направлении его вершины — пропульсивную силу самодвижения свободного тела нейтральной плавучести. Основным является дефицит давления, достаточный для описания наблюдаемого перемещения тела со скоростью порядка сантиметра в час в условиях лабораторного эксперимента [6].

Расчеты показывают, что суммарные значения горизонтальных компонент сил, действующих на клин, — “подсасывающей” вдоль его боковых сторон $F_{sx} = 9,1 \cdot 10^{-6}$ Н и “подталкивающей” препятствие со стороны основания $F_{rx} = 9,7 \cdot 10^{-8}$ Н, превышают интегральное значение горизонтальной компоненты силы сопротивления трения $F_{dx} = 7 \cdot 10^{-6}$ Н

(рис. 1), что иллюстрирует эффективность пропульсивного механизма самодвижения для клина с полууглом при вершине $\varphi = 6^\circ$ и длиной $L_x = 10$ см в жидкости с периодом плавучести $T_b = 5$ с.

Как и возмущение давления, горизонтальная компонента скорости симметрична относительно центральной горизонтальной плоскости $z = 0$, однако восходящая и нисходящая струи более широкие, чем слои дефицита давления ($b_v^u = 0,32$ см на расстоянии $x = 1,5$ см от вершины и $b_v^u = 0,19$ см на расстоянии $x = 0,5$ см от основания клина, рис. 2, в).

Центральная подтекающая к вершине клина струя заметно уже, чем слой дефицита давления ($\Delta z_v = 1,1$ см, $\Delta z_p = 2$ см у вершины клина, $v_x(-5,0) = 8,65 \cdot 10^{-4}$ см/с, $P(-5,0) = 1,114 \cdot 10^{-4}$ Па). Прилегающие струйные течения уширяются при схождении с основания клина (величина отношения ширин струй на донном срезе клина и на расстоянии $x = 0,5$ см от него составляет приблизительно 1,4), далее струи распространяются и расширяются. К внутренним границам свободных струй примыкают тонкие слои противотечений, наиболее выраженных у краев клина.

В целом, в донной области жидкость заблокирована и чрезвычайно медленно подтекает к клину по всей высоте основания (скорость возрастает только при подходе к вершинам клина).

Наиболее сложная структура течения наблюдается в распределении вертикальной компоненты скорости v_z (рис. 2, г). Жидкость оттекает от поверхности клина в слоях почти однородной толщины (в центре боковых сторон $b_v^u = 0,28$ см), которые резко утолщаются на расстоянии $x \approx 2$ см от донного среза ($b_v^u = 0,65$ см) в области бифуркации течения и снова сужаются в непосредственной близости от основания клина ($b_v^u = 0,3$ см). Почти по всей его длине к оттекающим течениям снаружи примыкают противотечения, толщина которых уменьшается вплоть до области бифуркации течения, где противотечения вообще отсутствуют, и проявляются только у основания клина ($c_v^u = 0,2$ см, $d_v^u = 1,2$ см вблизи вершины, $c_v^u = 0,24$ см, $d_v^u = 0,64$ см в центральном сечении и $c_v^u = 0,34$ см, $d_v^u = 0,72$ см на донном срезе клина). У вершины препятствия контактируют течения с восходящей и нисходящими компонентами скорости, что обуславливает сложную структуру поля вертикальной компоненты скорости. Наиболее сложная картина течения наблюдается в окрестности угловых точек основания клина, где формируется типичная “розетка” системы диссипативно-гравитационных волн [10, 12].

В картине поля динамической завихренности $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}$ (рис. 3, а) выражены однородные тонкие слои антициклонической (по часовой стрелке) завихренности сверху и циклонической завихренности снизу толщиной $b_\Omega^u = b_\Omega^l = 0,07$ см. К ним примыкают более толстые слои с противоположным знаком завихренности (циклонические сверху и антициклонические снизу), которые развиваются в вытянутых ячейках, более широких перед телом и узких позади него. От основания отходят наклонные линии излома изоуплет завихренности, которые наклонены под углом приблизительно 25° к горизонту. Вблизи угловых точек основания клина формируется сложная знакопеременная структура поля завихренности, типичная для диссипативно-гравитационных волн.

Скорость бароклинной генерации завихренности $\dot{\Omega} = \nabla P \times \nabla(1/\rho)$, поле которой представлено на рис. 3, б, распределена симметрично относительно горизонта клина и отлична от нуля в широкой зоне. Вдоль боковых сторон клина выражены однородные тонкие слои с отрицательными значениями $\dot{\Omega}$, толщина которых ($b_\Omega^u = b_\Omega^l = 0,15$ см) практически в два раза превышает ширину соответствующих структур в поле динамической завихренности.

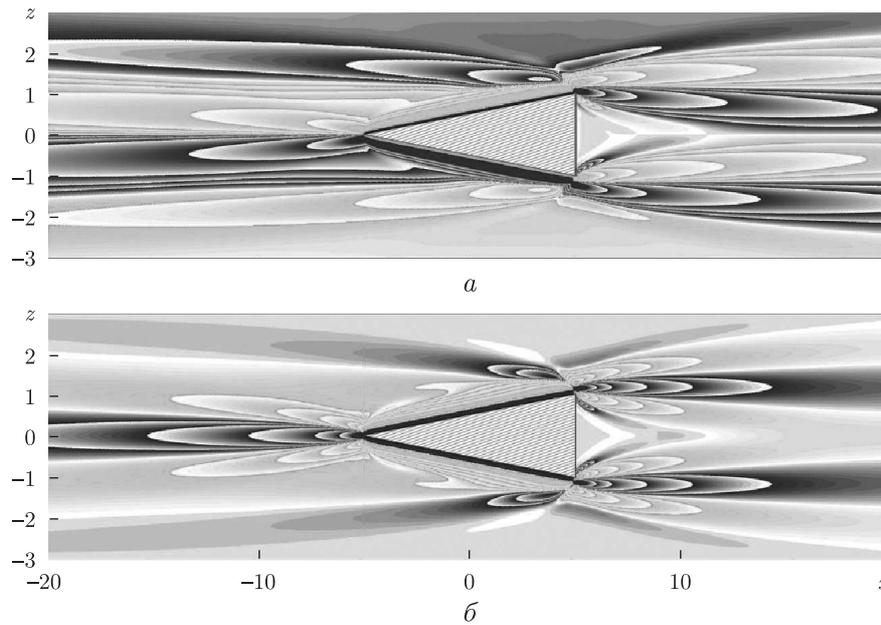


Рис. 3. Картины полей динамической завихренности Ω (а) и скорости бароклининой генерации завихренности $\dot{\Omega}$ (б) течения, индуцированного диффузией на непроницаемом клине ($L_x = 10$ см, $N = 1,256$ с $^{-1}$, $T_b = 5$ с, $\varphi = 6^\circ$, $\tau = 60$)

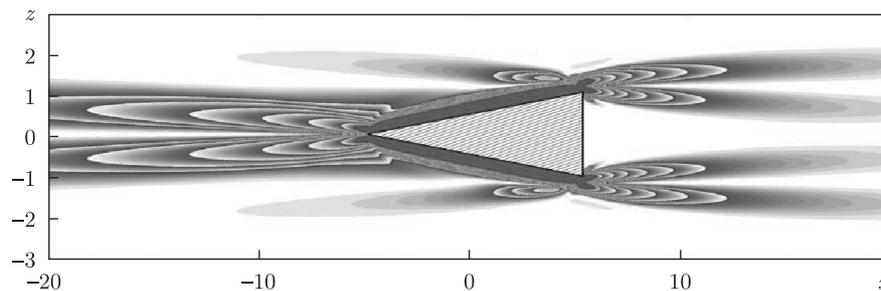


Рис. 4. Поле скорости диссипации механической энергии ε течения, индуцированного диффузией на непроницаемом клине ($L_x = 10$ см, $N = 1,256$ с $^{-1}$, $T_b = 5$ с, $\varphi = 6^\circ$, $\tau = 60$)

Поле скорости диссипации механической энергии $\varepsilon = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$, представленное на рис. 4, имеет ряд отличительных особенностей: максимумы сосредоточены вдоль боковых сторон клина на некотором расстоянии от поверхности, источниками возмущений в дальнем поле служат угловые точки.

В полях всех переменных выражены элементы структуры, дополняющие препятствие до симметричного тела — от треугольника к призме. Длина оконтуренного замкнутой изолинией дополняющего элемента максимальна в полях скорости диссипации механической энергии и компонент скорости (значения отношений длин образа и самого клина $\Delta l_\varepsilon, \Delta l_v$ лежат в диапазоне 1,4–1), заметно меньше в поле возмущения солености ($\Delta l_s \approx 0,8$) и не определена в поле давления. Длина образа дополняющей клин структуры оказывается наиболее короткой в полях динамической завихренности и скорости бароклининой генерации завихренности ($\Delta l_\Omega, \Delta l_{\dot{\Omega}} \approx 0,7$).

В рассчитанных картинах течения, индуцированного диффузией на клине, выделяются протяженные горизонтальные полосчатые структуры, примыкающие непосредственно к острым кромкам препятствия. Данные структуры отчетливо наблюдаются в лабораторных опытах при использовании высокоразрешающих теневых методов [13], при этом длина полосок растет с повышением чувствительности метода регистрации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума НАН Украины (проект № 18-01-12 – “Нелинейные поверхностные волны в вязкой жидкости” и РФФИ (грант 12-05-90417-Укр).

Авторы выражают глубокую благодарность директору ИГМ НАН Украины акад. НАН Украины В. Т. Гринченко за многолетнюю поддержку работ, направленных на разработку высокоразрешающих численных моделей механики неоднородных жидкостей, а также акад. РАН В. П. Иванникову за стимулирующие консультации по перспективным вычислительным методам.

1. Phillips O. M. On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid // Deep-Sea Res. – 1970. – **17**. – P. 435–443.
2. Wunsch C. On oceanic boundary mixing // Ibid. – 1970. – **17**. – P. 293–301.
3. Shapiro A., Fedorovich E. Katabatic flow along a differentially cooled sloping surface // J. Fluid Mech. – 2007. – **571**. – P. 149–175.
4. Lopez M., Michael D., Graham M. D. Enhancement of mixing and adsorption in microfluidic devices by shear-induced diffusion and topography-induced secondary flow // Phys. Fluids. – 2008. – **20**. – 053304, 12 p.
5. Page M. A. Propelled by diffusion // Nature Physics. – 2010. – **6**. – P. 486–487.
6. Allhouse M. R., Barad M. F., Peacock T. Propulsion generated by diffusion-driven flow // Ibid. – 2010. – **6**. – P. 516–519.
7. Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д. Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // Прикл. математика и механика. – 1993. – **57**, вып. 4. – С. 50–56.
8. Байдулов В. Г., Чашечкин Ю. Д. Пограничные течения, индуцированные диффузией около неподвижного горизонтального цилиндра в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. – 1996. – **32**, № 6. – С. 818–823.
9. Байдулов В. Г., Матюшин П. В., Чашечкин Ю. Д. Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость // Механика жидкости и газа. – 2007. – № 2. – С. 130–143.
10. Чашечкин Ю. Д., Загуменный Я. В. Структура течения, индуцированного диффузией на наклонной пластине // Докл. АН. – 2012. – **444**, № 2. – С. 165–171.
11. Чашечкин Ю. Д., Бардаков Р. Н., Загуменный Я. В. Расчет и визуализация тонкой структуры полей двумерных присоединенных внутренних волн // Морской гидрофиз. журн. – 2010. – № 6. – С. 3–15.
12. Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д. Диссипативно-гравитационные волны в докритических режимах многокомпонентной конвекции // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. – 2001. – **37**, № 4. – С. 513–519.
13. Chashechkin Yu. D. Schlieren visualization of a stratified flow around a cylinder // J. of Visualization. – 1999. – **1**, No 4. – P. 345–354.

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев
Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

Поступило в редакцию 09.08.2012

Я. В. Загуменний, Ю. Д. Чашечкін

Індукована дифузійною течія на клині

Розрахунок усталеної двовимірної течії, індукованої перериванням фонового молекулярного переносу стратифікуючої компоненти непроникним клином, зануреним в нестисливу рідину, виконано методом кінцевих об'ємів на основі вирішувачів власної розробки, що доповнюють відкритий пакет OpenFOAM. Візуалізовано картини полів збурень густини, тиску, швидкості, завихреності, швидкості барокліної генерації завихреності і швидкості дисипації механічної енергії біля горизонтального клина. Показано складну комірчасту структуру течії в безпосередній близькості від переходи та далеко від неї. Проведені розрахунки динамічних характеристик клину виявили істотне перевищення горизонтальної компоненти підйомної сили над величиною опору тертя, що ілюструє ефективність пропульсивного механізму саморуху клина вздовж горизонту нейтральної плавучості.

Ia. V. Zagumennyi, Yu. D. Chashechkin

Diffusion-induced flow on a wedge

The calculation of a two-dimensional steady flow induced by interruption of the background molecular transport of a stratifying component by an impermeable wedge immersed in a quiescent incompressible fluid is performed using the finite volume method in the original solvers of the open source OpenFOAM package. The fields of density perturbation, pressure, velocity components, vorticity, baroclinic generation of vorticity, and mechanical energy dissipation rate are visualized near the horizontally located wedge. It is shown that a complex cellular flow structure appears both in a close vicinity of the obstacle and far away from it. The calculations of the dynamical characteristics of the wedge revealed that the horizontal component of the lift force exceeds significantly the drag one, which illustrates an efficiency of the propulsion mechanism of self-movement of the wedge along the neutral buoyancy horizon.