

С. Ф. Доценко, Н. К. В. Санникова

## Характеристики наката одиночной поверхностной волны на береговой откос

(Представлено академиком НАН Украины В. Н. Еремеевым)

*В рамках одномерной модели нелинейных длинных волн выполнен численный анализ наката на плоский береговой откос и отката от него одиночной поверхностной волны. Исследована зависимость вертикальных заплесков на сухой берег от высоты и длины волны, глубины шельфа и уклона берега. Сопоставление найденных численно значений вертикальных заплесков волн с экспериментальными данными, аналитическими и численными оценками других авторов показали их хорошее соответствие.*

Накат поверхностных волн на берег — заключительный и наиболее важный этап эволюции волн цунами. Именно он определяет уровень цунамиопасности морского побережья. Сложность математического моделирования этой стадии процесса определяется нелинейностью движения, а также необходимостью описания затопления сухого берега и осушения прибрежной части бассейна. Наиболее широкое применение в исследованиях данного направления получили нелинейные модели длинных поверхностных волн.

Точные аналитические решения одномерной задачи наката волны и оценки вертикальных заплесков волн типа цунами в линейной и нелинейной постановках содержатся в работах [1–4]. Численные модели наката нелинейных длинных волн реализованы во многих работах, включая [5–7]. Лабораторное моделирование наката волн на берег и сопоставление экспериментальных данных с результатами математического моделирования проводилось в публикациях [2, 4, 5, 7 и др.].

Ниже в рамках нелинейной теории длинных волн выполнен численный анализ одномерного распространения одиночной волны в бассейне постоянной глубины с последующим накатом на плоский береговой откос. Исследована зависимость вертикальных заплесков от угла наклона берега, высоты и длины волны.

1. Рассматривается плоская задача о накате на берег одиночной поверхностной волны высотой  $A$  и длиной  $\lambda$ , распространяющейся из глубоководной части бассейна постоянной глубины  $H_0$  (рис. 1). Волна, форма которой известна, входит в область  $0 \leq x \leq L$  через открытую левую границу  $x = 0$  и распространяется в направлении береговой черты

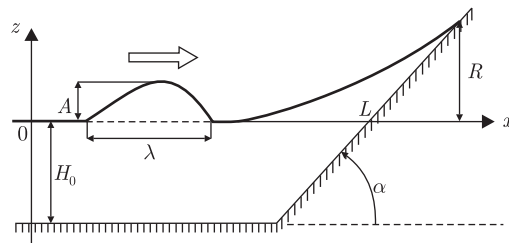


Рис. 1. Схема бассейна с плоским береговым откосом

© С. Ф. Доценко, Н. К. В. Санникова, 2013

$x = L$ . Волна накатывается на плоский откос с углом наклона  $\alpha$  и в области  $x > L$  движется по сухому берегу. После достижения подвижной границей жидкости максимального подъема  $R$  (вертикальный заплеск волны) происходит откат волны от берега и ее выход из рассматриваемой области.

Для описания распространения волны в области  $x > 0$  воспользуемся нелинейной моделью длинных волн без дисперсии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [u(H + \zeta)]}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $u(x, t)$  — осредненная по глубине горизонтальная скорость волнового течения;  $\zeta(x, t)$  — смещение свободной поверхности жидкости от горизонтального положения  $z = 0$ ;  $H(x)$  — глубина бассейна;  $g$  — ускорение свободного падения.

В начальный момент времени жидкость невозмущена, т. е.

$$u = 0, \quad \zeta = 0 \quad (t = 0). \quad (2)$$

На жидкой границе  $x = 0$  зададим условия:

$$\zeta = \zeta_0(t), \quad u = \frac{C_0}{H_0} \zeta_0 \quad (0 \leq t \leq T_0), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - C_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (t > T_0), \quad (4)$$

где  $C_0 = \sqrt{gH_0}$  — скорость распространения длинных волн в окрестности левой границы бассейна;  $T_0 = \lambda/C_0$  — длительность прохождения жидкой границы входящей волной. Условия (3) моделируют вхождение волны в расчетную область, условие (4) — свободный выход отраженных волн из расчетной области через левую открытую границу. Соотношения (3) и (4) являются точными для линейных длинных волн в бассейне постоянной глубины  $H_0$ .

На отрезке  $0 \leq x \leq L$  начально-краевая задача (1)–(4) решалась методом конечных разностей по явно-неявной схеме, как это описано в работах [5, 6]. Для численного моделирования наката волны на сухой берег и ее отката был применен алгоритм, в котором плоский откос заменяется ступенчатой функцией [6]. В настоящем сообщении использована неравномерная расчетная сетка с меньшим шагом в области берегового откоса.

В дальнейшем будет рассматриваться бассейн, глубина которого изменяется по закону:

$$H = H_0 \quad (x < x_0), \quad H = H_0 - k(x - x_0) \quad (x \geq x_0), \quad (5)$$

где  $x = x_0$  — горизонтальная координата глубоководной границы берегового откоса;  $k = H_0/(L - x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$ . Распределение (5) описывает шельфовую зону постоянной глубины  $H_0$ , переходящую в точке  $x_0$  в плоский откос с уклоном  $k$  и береговой линией  $x = L$ .

Смещение свободной поверхности жидкости  $\zeta_0(t)$  в условиях (3) на жидкой границе задавалось двух типов:

$$\zeta_0(t) = A \sin\left(\pi \frac{C_0 t}{\lambda}\right) \quad (0 \leq t \leq T_0), \quad \zeta_0(t) = 0 \quad (t < 0, t > T_0); \quad (6)$$

$$\zeta_0(t) = A \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{4} \sqrt{\frac{3A}{H_0}} (\lambda^* - 2C_0 t)\right] \quad (0 \leq t \leq T_0), \quad \zeta_0(t) = 0 \quad (t < 0, t > T_0). \quad (7)$$

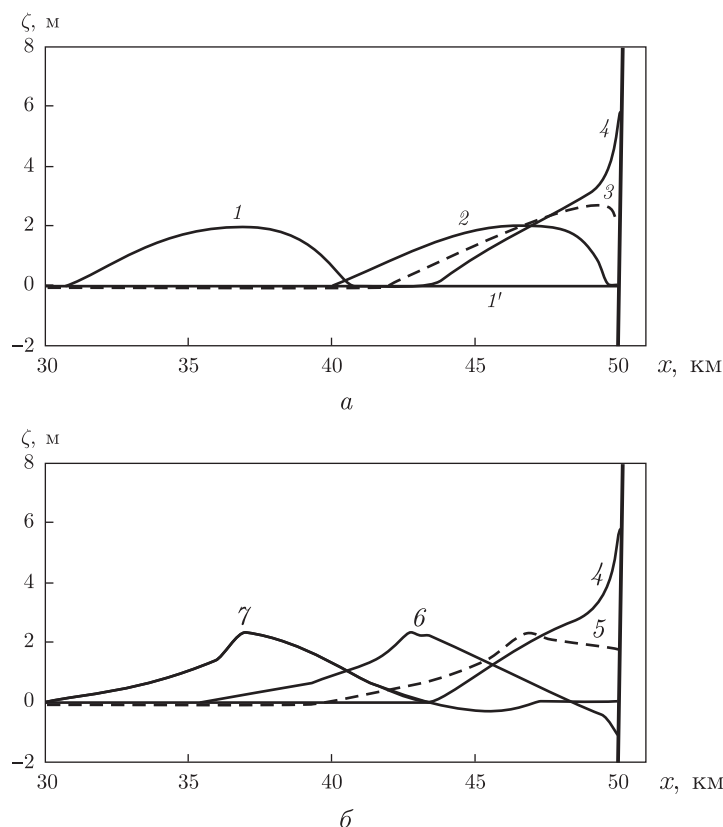


Рис. 2. Трансформация волны повышения (формула (6)) высотой  $A = 2$  м и длиной  $\lambda = 10$  км при накате (а: 1 – 1300 с; 2 – 1600 с; 3 – 1660 с; 4 – 1705 с) и откате (б: 5 – 1850 с; 6 – 1975 с; 7 – 2150 с) от берега в различные моменты времени;  $H_0 = 100$  м;  $k = 0,05$ .  
Вертикальная сплошная линия – береговой откос

Здесь  $\lambda^* = 4\sqrt{H_0/(3A)} \operatorname{arsh} \sqrt{20}$  – длина входящей в расчетную область уединенной волны (ширина смещения свободной поверхности жидкости на высоте  $0,05A$ ).

При заданной по формулам (6) и (7) форме волны основными параметрами задачи являются глубина бассейна  $H_0$ , угол наклона берега  $\alpha$ , амплитуда  $A$  и длина  $\lambda$  входящей в расчетную область поверхностной волны.

**2.** Рассмотрим характеристики волнового процесса и наката волны на наклонный берег, полученные численно.

Трансформация одиночной волны (6) при накате и откате от берега на различных этапах эволюции показана на рис. 2. При достижении длинной волной берегового откоса ее форма начинает изменяться, вследствие уменьшения глубины бассейна и нелинейности процесса. На этой стадии происходит увеличение высоты и уменьшение длины волны, что выражается в росте ее крутизны (кривые 1, 2).

После максимального подъема линии уреза вдоль наклонного берега (кривая 4), превышающего  $3A$ , начинается откат волны (см. б на рис. 2). Он выражается в осушении дна (кривая 6) и образовании знакопеременной асимметричной поверхностной волны (кривая 7), что характерно для процесса отражения волн от береговых откосов [3].

Максимальный накат волн на берег  $R$  – важная динамическая характеристика интенсивности цунами, позволяющая оценивать уровень цунамиопасности морского побережья.

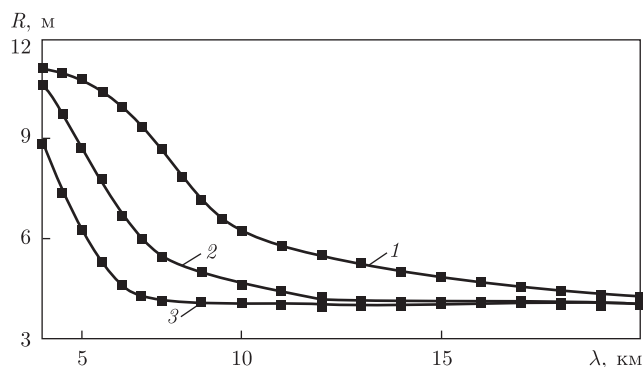


Рис. 3. Зависимости вертикальных заплесков  $R$  от длины волны  $\lambda$  при накате на берег с уклонами:  $k = 0,05$ ,  $k = 0,1$ ;  $k = 0,2$  (кривые 1–3 соответственно). Первоначальная форма волны (формула (6));  $A = 2$  м;  $H_0 = 100$  м

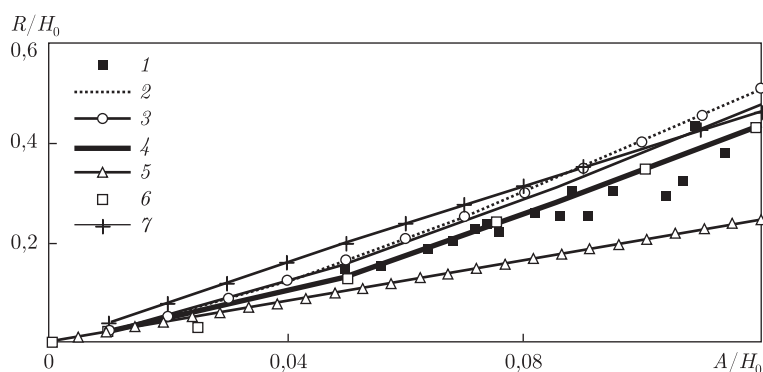


Рис. 4. Зависимости максимальных заплесков на берег с уклоном ( $k = 0,176$ ) от высоты волны: 1 — лабораторные эксперименты [2]; 2 — формула (3.7), по [2]; 3 — формула (3.4), по [4]; 4 — данные авторов; 5 — формула (3.9), по [3]; 6 — численные оценки, по [7]; 7 — эмпирическая формула (23), по [8]

Зависимости  $R$  от начальной длины волны и крутизны берегового откоса иллюстрирует рис. 3. Уменьшение  $\lambda$  и/или  $k$  приводит к увеличению вертикальных заплесков волн на берег, что согласуется с результатами работ [2–4, 7, 8]. Для крутых береговых откосов и/или больших длин волн вертикальный заплеск близок к удвоенной высоте  $2A$  падающей волны, что характерно для наката волны на вертикальную стенку [3].

Как при накате, так и откате от берега возможно обрушение волны. Это обычно происходит при достаточно больших высотах волн, малых уклонах берега и малых длинах волн. Отметим, что вертикальные заплески на берег одиночных волн и группы волн могут существенно отличаться [9].

Представляет интерес сопоставление рассчитанных вертикальных заплесков волн с найденными другими авторами в лабораторных экспериментах, а также с использованием аналитических и численных методов. Соответствующие данные для волны, имеющей форму (7), представлены на рис. 4 ( $H_0 = 0,6$  м,  $k = 0,176$ ). Верхняя граница допустимых значений параметра нелинейности ( $A/H_0 = 0,12$ ) соответствует началу обрушения волн при накате на берег и находится по формуле [2]:

$$\frac{A}{H_0} = 0,8183(\text{ctg } \alpha)^{-10/9}.$$

В соответствии с рис. 4 при слабой нелинейности ( $A/H_0 \leq 0,03$ ) заплески волн, найденные численно (кривая 4) и аналитически (кривые 2, 3), близки по величине и несколько превышают значение вертикального заплеска нелинейной волны на вертикальную стенку (кривая 5) [3].

С ростом параметра нелинейности ( $A/H_0 \geq 0,05$ ) отличие вертикальных заплесков на наклонный берег и вертикальную стенку усиливается: при  $A/H_0 = 0,12$  заплеск на береговой откос превышает заплеск на вертикальную боковую границу в 1,78–2,06 раза. Вертикальные заплески волн, найденные численно нами и в работе [7] с использованием более сложной численной схемы, практически совпадают. Численные оценки хорошо согласуются с данными лабораторных экспериментов [2].

**3.** В длинноволновом приближении выполнен численный анализ одномерного наката одиночных волн на плоский береговой откос. Численная конечно-разностная процедура позволила описать этапы затопления берега при накате волны и осушения дна бассейна при ее откате.

Таким образом, увеличение высоты и уменьшение длины поверхностной волны вызывают рост вертикальных заплесков волн. Это же наблюдается при уменьшении наклона берега. Для крутых берегов при больших длинах и слабой нелинейности волн вертикальный заплеск близок к удвоенной высоте, падающей на берег волны. При накате одиночной волны на пологий берег вертикальный заплеск может превышать исходную высоту волны в три и более раз. В этом случае отличие заплесков волн на наклонные берега и вертикальные стенки значительно. Сравнение найденных в рамках описанной выше гидродинамической модели значений вертикальных заплесков волн с экспериментальными данными, аналитическими и численными оценками, полученными другими авторами, показали их хорошее соответствие.

1. Carrier G. F., Greenspan H. P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. – 1958. – 4, No 1. – P. 97–109.
2. Synolakis C. E. The runup of solitary waves // Ibid. – 1987. – 185. – P. 523–545.
3. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: Ин-т прикл. физики РАН, 1996. – 276 с.
4. Li Y., Raichlen F. Solitary wave runup on plane slopes // J. Waterways, Port, Coastal, Ocean Engineering. – 2001. – 127, No 1. – P. 33–44.
5. Liu P. L.-F., Cho Y.-S., Briggs M. J. et al. Runup of solitary waves on a circular island // J. Fluid Mech. – 1995. – 302. – P. 259–285.
6. Kowalik Z. Basic relations between tsunamis calculations and their physics // Sci. Tsunami Hazards. – 2001. – 19, No 2. – P. 99–115.
7. Li Y., Raichlen F. Non-breaking and breaking solitary wave run-up // J. Fluid Mech. – 2002. – 456. – P. 295–318.
8. Li Y., Raichlen F. Energy balance model for breaking solitary wave runup // J. Waterways, Port, Coastal, Ocean Engineering. – 2003. – 129, No 2. – P. 47–59.
9. Доценко С. Ф., Санникова Н. К. В. Накат поверхностных волн различной формы на наклонный берег // Мор. гидрофиз. журн. – 2011. – № 1. – С. 3–13.

С. П. Доценко, Н. К. В. Саннікова

### **Характеристики накату самотньої поверхневої хвилі на береговий схил**

*У рамках одновимірної моделі нелінійних довгих хвиль виконано чисельний аналіз накату на плоский береговий схил і відкоту від нього самотньої поверхневої хвилі. Досліджено залежність вертикальних заплесків на сухий берег від висоти і довжини хвилі, глибини шельфу та ухилу берега. Зіставлення знайдених чисельно значень вертикальних заплесків хвиль із експериментальними даними, аналітичними і чисельними оцінками інших авторів засвідчили їх добру відповідність.*

S. F. Dotsenko, N. K. V. Sannikova

### **Characteristics of the solitary surface wave run-up on a sloping beach**

*The numerical analysis of run-up and draw-down of a solitary surface wave climbing on a sloping plane beach is carried out in the framework of a one-dimensional model of nonlinear shallow-water waves. The vertical run-up on a dry beach as a function of the height and length of a wave, shelf depth, and bottom slope is investigated. The comparison of the numerically found vertical run-ups with the experimental data and analytical and numerical estimates of other authors has shown their good agreement.*