УДК 517.518.2+515.124

В. В. Билет, А. А. Довгошей

Инфинитезимальная ограниченность метрических пространств и сильная односторонняя пористость

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Введен класс вполне сильно пористых множеств, являющийся собственным подклассом локально сильно пористых подмножеств $\mathbb{R}$. Найдены характеристические свойства вполне сильно пористых множеств, что позволило дать необходимые и достаточные условия равномерной ограниченности всех пространств, предкасательных к заданному метрическому пространству в фиксированной точке и имеющих правильную нормировку.

Понятия предкасательного и касательного пространств для общего метрического пространства были введены в [1] (см. также [2]) с целью определения обобщенного дифференцирования на метрических пространствах без линейной структуры. Ряд результатов, описывающих взаимосвязь свойств предкасательных и касательных пространств со свойствами исходного метрического пространства получены в работах [3–6]. В частности, в [3] было доказано, что ограниченные сепарабельные касательные пространства к метрическому пространству (X, d) в точке $p \in X$ существуют тогда и только тогда, когда множество расстояний

$$S_p(X) := \{d(x,p) \colon x \in X\} \tag{1}$$

является сильно пористым в 0. Отметим также, что условие звездности пространств, предкасательных к подмножествам на плоскости, естественным образом связано с некоторым $0-1$ законом для пористости (подробно см. в [7]). В 2010 г. профессор О. Мартио предположил, что при "правильном" масштабировании совокупная ограниченность всех пространств, предкасательных к метрическому пространству (X, d) в точке $p \in X$, должна быть эквивалентна какому-то виду сильной пористости множества $S_p(X)$ в нуле. Это предположение и послужило начальной точкой настоящей работы. Теорема 4, приведенная ниже, подтверждает справедливость предположения О. Мартио.

Напомним необходимые определения.

Пусть (X, d) — метрическое пространство и пусть p — точка из X. Зафиксируем некоторую последовательность $\widetilde{r}$ положительных вещественных чисел r_n, стремящихся к нулю. Назовем $\widetilde{r}$ *нормирующей* последовательностью. Будем обозначать через $\widetilde{X}$ множество всех последовательностей точек из X.

Определение 1. Две последовательности $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\widetilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, взаимно стабильны относительно нормирующей последовательности $\widetilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} := \widetilde{d}_{\widetilde{r}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}). \tag{2}$$

Семейство $\widetilde{F} \subseteq \widetilde{X}$ *самостабильное*, если любые две последовательности $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{F}$ взаимно стабильны, $\widetilde{F} \subseteq \widetilde{X}$ — *максимальное самостабильное*, если $\widetilde{F}$ самостабильное и для произвольной $\widetilde{z} \in \widetilde{X} \setminus \widetilde{F}$ существует $\widetilde{x} \in \widetilde{F}$ такая, что $\widetilde{x}$ и $\widetilde{z}$ не взаимно стабильны.

В силу леммы Цорна, для каждой нормирующей последовательности $\widetilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует максимальное самостабильное семейство $\widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}$ такое, что постоянная последовательность $\widetilde{p} = \{p, p, \ldots\} \in \widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{d}_{\widetilde{r}}\colon \widetilde{X}_{p,\widetilde{r}} \times \widetilde{X}_{p,\widetilde{r}} \to \mathbb{R}$. Очевидно, $\widetilde{d}_{\widetilde{r}}$ симметрична и неотрицательна. Кроме того, из неравенства треугольника для d имеем $\widetilde{d}_{\widetilde{r}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leqslant \widetilde{d}_{\widetilde{r}}(\widetilde{x}, \widetilde{z}) + \widetilde{d}_{\widetilde{r}}(\widetilde{z}, \widetilde{y})$ для всех $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$ из $\widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}$. Следовательно, $(\widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}, \widetilde{d}_{\widetilde{r}})$ — псевдометрическое пространство.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}$ как $\widetilde{x} \sim \widetilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{d}_{\widetilde{r}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$. Обозначим через $\Omega^X_{p,\widetilde{r}}$ множество всех классов эквивалентности на $\widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}$, порожденных отношением $\sim$. Для α, $\beta \in \Omega^X_{p,\widetilde{r}}$ положим $\rho(\alpha, \beta) = \widetilde{d}_{\widetilde{r}}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, где $\widetilde{x} \in \alpha$ и $\widetilde{y} \in \beta$, тогда ρ — метрика на $\Omega^X_{p,\widetilde{r}}$. Переход от псевдометрического пространства $(\widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}, \widetilde{d}_{\widetilde{r}})$ к метрическому пространству $(\Omega^X_{p,\widetilde{r}}, \rho)$ будем называть *метрической идентификацией* $(\widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}, \widetilde{d}_{\widetilde{r}})$.

Определение 2. Пространство $(\Omega^X_{p,\widetilde{r}}, \rho)$ называется предкасательным к X в точке p относительно нормирующей последовательности $\widetilde{r}$.

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Напомним определение правосторонней пористости множества E в точке 0 (см., например, [8, с. 184]).

Определение 3. Правосторонней пористостью множества E в точке 0 называется величина

$$p^+(E, 0)\colon = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(E, 0, h)}{h},$$

где $\lambda(E, 0, h)$ — длина наибольшего открытого подинтервала $(0, h)$, не содержащего точек из E. Множество E называется сильно пористым справа в точке 0, если $p^+(E, 0) = 1$.

Сравнение различных видов пористости и краткий обзор результатов можно, например, найти в [9].

Пусть $\widetilde{\tau} = \{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность вещественных чисел. Будем говорить, что $\widetilde{\tau}$ — почти убывающая последовательность, если $\tau_{n+1} \leqslant \tau_n$ для всякого достаточно большого n. Обозначим через $\widetilde{E}^d_0$ множество почти убывающих последовательностей $\widetilde{\tau}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$ и $\tau_n \in E\setminus\{0\}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Через $\operatorname{Ext} E$ и $\operatorname{ac} E$ будем обозначать соответственно внешность и совокупность всех предельных точек множества $E \subseteq \mathbb{R}^+$ относительно стандартной топологии на $\mathbb{R}^+$.

Пусть $\widetilde{I}^d_E$ — множество последовательностей $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ открытых интервалов $(a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^+$, обладающих следующими свойствами:

всякое a_n является строго положительным;

последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является почти убывающей;

всякий интервал (a_n, b_n) является связной компонентой $\operatorname{Ext} E$, т. е. $(a_n, b_n) \bigcap E = \varnothing$, но для всякого $(a, b) \supseteq (a_n, b_n)$ справедлива следующая импликация

$$((a, b) \neq (a_n, b_n)) \Rightarrow ((a, b) \bigcap E \neq \varnothing);$$

выполняются предельные соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n - a_n}{b_n} = 1$.

На множестве последовательностей строго положительных чисел определим отношение эквивалентности $\asymp$. Пусть $\widetilde{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\widetilde{\gamma} = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тогда $\widetilde{a} \asymp \widetilde{\gamma}$, если существует константа $c \geqslant 1$ такая, что

$$\frac{1}{c}a_n \leqslant \gamma_n \leqslant c a_n \tag{3}$$

для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$.

Определение 4. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^+$ и $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{E}_0^d$. Множество E назовем $\widetilde{\gamma}$-сильно пористым, если существует последовательность $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{I}_E^d$ такая, что $\widetilde{\gamma} \asymp \widetilde{a}$, где $\widetilde{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Множество E назовем вполне сильно пористым (в точке 0), если E является $\widetilde{\gamma}$-сильно пористым для всякого $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{E}_0^d$.

Совокупность всех вполне сильно пористых (в нуле) подмножеств $\mathbb{R}^+$ будем в дальнейшем обозначать через ВСП.

Вполне сильно пористые множества.

Определение 5. Множество $E \subseteq \mathbb{R}^+$ назовем равномерно сильно пористым (в точке 0), если существуют константа $c \geqslant 1$ такая, что для всякой последовательности $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{E}_0^d$ существует $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{I}_E^d$ и $n(\widetilde{\gamma}) \in \mathbb{N}$ такие, что двойное неравенство (3) выполняется при всех $n \geqslant n(\widetilde{\gamma})$.

Если E является равномерно сильно пористым, то E — ВСП-множество. Как будет видно из теоремы 1, приведенной ниже, обратное утверждение также верно.

Определим отношение предпорядка $\preceq$ на множестве $\widetilde{I}_E^d$.

Определение 6. Пусть $\widetilde{A} := \{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{I}_E^d$ и $\widetilde{L} := \{(l_n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{I}_E^d$. Тогда $\widetilde{A} \preceq \widetilde{L}$, если существуют натуральное число $N_1 = N_1(\widetilde{A}, \widetilde{L})$ и функция $f\colon \mathbb{N}_{N_1} \to \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}_{N_1} := \{N_1, N_1 + 1, \ldots\}$ такие, что $a_n = l_{f(n)}$ для всякого $n \in \mathbb{N}_{N_1}$. Элемент $\widetilde{L} \in \widetilde{I}_E^d$ является универсальным, если $\widetilde{A} \preceq \widetilde{L}$ для всякого $\widetilde{A} \in \widetilde{I}_E^d$.

Замечание 1. Универсальность элемента $\widetilde{L} \in \widetilde{I}_E^d$ может быть выражена иначе. Обозначим через Com множество связных компонент $\operatorname{Ext} E$. Элемент $\widetilde{L} \in \widetilde{I}_E^d$ является универсальным тогда и только тогда, когда для всякого $\widetilde{A} \in \widetilde{I}_E^d$ существуют $N_1 \in \mathbb{N}$ и $f\colon \mathbb{N}_{N_1} \to \mathbb{N}$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_{N_1} \arrow[r, "\mathrm{in}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "\tilde{A}"] & \mathrm{Com} \\ & \mathbb{N} \arrow[ur, "\tilde{L}"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Здесь in — естественное включение $\mathbb{N}_{N_1}$ в $\mathbb{N}$, $\mathrm{in}(k) = k$.

Используя известные рассуждения из теории упорядоченных множеств, получаем, что $\preceq$ порождает отношение эквивалентности $\equiv$ на $\widetilde{I}_E^d$, если положить

$$(\widetilde{A} \equiv \widetilde{T}) \Leftrightarrow (\widetilde{A} \preceq \widetilde{T} \text{ и } \widetilde{T} \preceq \widetilde{A}).$$

Переходя к фактормножеству, индуцированному отношением $\equiv$, получаем частично упорядоченное (ч. у.) множество. Множество $(\widetilde{I}_E^d, \preceq)$ имеет универсальный элемент тогда и только тогда, когда полученное ч. у. множество имеет наибольший элемент.

Пусть $\widetilde{L} = \{(l_n, m_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{I}_E^d$ — универсальный элемент. Определим величину

$$M(\widetilde{L})\colon = \limsup_{n\to\infty} \frac{l_n}{m_{n+1}}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^+$ — сильно пористое справа в нуле множество и пусть $0 \in \operatorname{ac} E$. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *E является* ВСП-*множеством.*

(ii) *Множество $(\widetilde{I}_E^d, \preceq)$ содержит универсальный элемент $\widetilde{L}$ такой, что $M(\widetilde{L}) < \infty$.*

(iii) *E является равномерно сильно пористым множеством.*

Следующая теорема описывает структуру множеств $E \subseteq \mathbb{R}^+$, для которых существует универсальный элемент $\widetilde{L} \in \widetilde{I}_E^d$.

Теорема 2. *Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^+$ — сильно пористое справа в нуле множество и пусть $0 \in \operatorname{ac} E$. Множество $(\widetilde{I}_E^d, \preceq)$ содержит универсальный элемент тогда и только тогда, когда существует константа $c > 1$ такая, что для всякого $K > 1$ существует $t > 0$, для которого из неравенств $t > a$ и $b/a > c$ следует неравенство $b/a > K$ для всякого $(a, b) \in$* Com.

Пусть A и B — некоторые подмножества $\mathbb{R}^+$. Будем писать $A \sqsubseteq B$, если существует $t = t(A, B) > 0$ такое, что $A \bigcap (0, t) \subseteq B \bigcap (0, t)$. Следующая теорема дает конструктивное описание ВСП-множеств.

Теорема 3. *Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^+$. Тогда E является* ВСП-*множеством тогда и только тогда, когда существуют $q > 1$ и строго убывающая последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 0$ и $E \sqsubseteq W(q)$, где $W(q) := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (q^{-1} x_n, q x_n)$.*

Равномерная ограниченность предкасательных пространств. Пусть $\mathfrak{F} = \{(X_i, d_i, p_i)\colon i \in I\}$ — семейство метрических пространств с отмеченными точками p_i. Положим

$$R^*(\mathfrak{F}) := \sup_{i \in I} \sup_{x \in X_i} d_i(x, p_i), \qquad R_*(\mathfrak{F}) := \inf_{i \in I} \inf_{x \in X_i \setminus \{p_i\}} d_i(x, p_i),$$

где $\inf\limits_{x \in X_i \setminus \{p_i\}} d_i(x, p_i) = \infty$, если $X_i \setminus \{p_i\} = \varnothing$.

Будем говорить, что семейство $\mathfrak{F}$ является *равномерно ограниченным*, если $R^*(\mathfrak{F}) < \infty$. Очевидно, что при $R_*(\mathfrak{F}) > 0$ точка p_i есть изолированная точка пространства (X_i, d_i) и

$$\{x \in X_i\colon d_i(x, p_i) < r\} = \{p_i\} \tag{5}$$

для любого $i \in I$ при $r \leqslant R_*(\mathfrak{F})$, причем при $r > R_*(\mathfrak{F})$ равенство (5) не верно для некоторого $i \in I$.

По аналогии с равномерной ограниченностью введем следующее:

Определение 7. Будем говорить, что семейство $\mathfrak{F}$ метрических пространств X_i с отмеченными точками p_i равномерно дискретно в отмеченных точках, если $R_*(\mathfrak{F}) > 0$.

Выделим теперь последовательности, дающие "правильное" масштабирование, из множества всех нормирующих последовательностей.

Определение 8. Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой $p \in X \bigcap \operatorname{ac} X$. Нормирующая последовательность $\widetilde{r} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется правильной, если существует $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \widetilde{X}$ такая, что последовательность $\{d(x_n, p)\}_{n \in \mathbb{N}}$ почти убывающая и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d(x_n, p)}{r_n} = 1.$$

Пусть $\mathbf{\Omega_p^X(n)}$ — множество предкасательных пространств $\Omega^X_{p,\widetilde{r}}$ с правильными нормирующими последовательностями $\widetilde{r}$. Отметим, что каждое предкасательное пространство

$\Omega^X_{p,\widetilde{r}}$ имеет естественную отмеченную точку, а именно ту, в которую переходит постоянная последовательность $(p, p, \ldots, p, \ldots) \in \widetilde{X}_{p,\widetilde{r}}$ при отображении метрической идентификации. Следующая теорема дает, в частности, критерий совокупной ограниченности всех пространств, принадлежащих $\mathbf{\Omega^X_p(n)}$.

Теорема 4. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство с отмеченной точкой* $p \in \in X \bigcap \mathrm{ac}X$. *Следующие три утверждения эквивалентны.*

(i) *Семейство* $\mathbf{\Omega^X_p(n)}$ *является равномерно ограниченным.*

(ii) *Множество* $E := S_p(X)$ *является* ***ВСП****-множеством.*

(iii) *Семейство* $\mathbf{\Omega^X_p(n)}$ *равномерно дискретно в отмеченных точках.*

Кроме того, если $\mathbf{\Omega^X_p(n)}$ *является равномерно ограниченным, то* $R^*(\mathbf{\Omega^X_p(n)}) = M(\widetilde{L})$ *и* $R_*(\mathbf{\Omega^X_p(n)}) = 1/M(\widetilde{L})$, *где величина* $M(\widetilde{L})$ *определена равенством* (4).

Заметим, что если вместо $\mathbf{\Omega^X_p(n)}$ рассмотреть семейство всех пространств, предкасательных к X в точке p, то равномерная ограниченность такого семейства равносильна изолированности точки p в X.

1. *Dovgoshey O., Martio O.* Tangent spaces to metric spaces // Reports in Math. – Helsinki Univ., 2008. – Vol. 480. – 20 p.
2. *Dovgoshey O., Martio O.* Tangent spaces to general metric spaces // Rev. Roum. Math. Pures Appl. – 2011. – **56**, No 2. – P. 137–155.
3. *Abdullayev F., Dovgoshey O., Küçükaslan M.* Compactness and boundedness of tangent spaces to metric spaces // Beitr. Algebra Geom. – 2010. – **51**, No 2. – P. 547–576.
4. *Abdullayev F., Dovgoshey O., Küçükaslan M.* Metric spaces with unique pretangent spaces. Conditions of the uniqueness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2011. – **36**, No 2. – P. 353–392.
5. *Bilet V., Dovgoshey O.* Metric betweenness, Ptolemaic spaces and isometric embeddings of pretangent spaces in $\mathbb{R}$ // J. Math. Sci., New York. – 2012. – **182**, No 1. – P. 22–36.
6. *Dordovskyi D.* Metric tangent spaces to Euclidean spaces // Ibid. – 2012. – **179**, No 2. – P. 229–244.
7. *Abdullayev F., Dovgoshey O., Küçükaslan M.* Tangent metric spaces to starlike sets on the plane // J. Nonlinear Convex Anal. (принято в печать).
8. *Thomson B. S.* Real Functions, Lecture Notes in Mathematics. – Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1985. – 229 p.
9. *Zajiček L.* Porosity and σ-porosity // Real Anal. Exch. – 1988. – **13**. – P. 314–350.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 03.07.2012

В. В. Білет, О. А. Довгоший

Інфінітезимальна обмеженість метричних просторів та сильна однобічна пористість

Введено клас сповна сильно пористих множин, що є власним підкласом локально сильно пористих підмножин $\mathbb{R}$. *Знайдено характеристичні властивості сповна сильно пористих множин, що дозволило надати необхідні та достатні умови рівномірної обмеженості усіх просторів, переддотичних до заданого метричного простору у фіксованій точці і які мають правильне нормування.*

V. V. Bilet, O. A. Dovgoshey

Infinitesimal boundedness of metric spaces and strong one-side porosity

We define the class of completely strongly porous sets which is a proper subclass of local strongly porous subsets of $\mathbb{R}$. Some characteristic properties of completely strongly porous sets are found. These properties allow us to give the necessary and sufficient conditions of uniform boundedness of the property normalized pretangent spaces to a given metric space at a marked point.