ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. І. Петришин

Задача Коші для одного класу сингулярних еволюційних рівнянь

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Встановлюється розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння з псевдобесселевим оператором зі змінним символом у класі обмежених неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій.

Диференціальні рівняння, які містять коефіцієнти, необмежені в деякій області з $\mathbb{R}^n$, належать, як відомо, до сингулярних диференціальних рівнянь. До сингулярних рівнянь належать й еволюційні рівняння параболічного типу з оператором Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu + 1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$ (B-параболічні рівняння) через наявність у його структурі виразу $1/x$. Такі рівняння вироджуються на межі області, і за внутрішніми властивостями вони близькі до рівномірно параболічних рівнянь. Побудові класичної теорії задачі Коші для сингулярних параболічних рівнянь присвячено ряд робіт (див. [1] та наведену там бібліографію). У класах розподілів та ультрарозподілів задача Коші для таких рівнянь вивчалася в [2, 3] та інших працях.

Як відомо, оператор Бесселя можна визначити за допомогою співвідношення $B_\nu\varphi = -F_B^{-1}[\sigma^2 F_B[\varphi]]$, де F_B — перетворення Бесселя, φ — елемент простору, в якому вказане перетворення визначене, тому еволюційні рівняння з оператором Бесселя природно віднести до псевдодиференціальних рівнянь. До такого ж класу рівнянь слід віднести й еволюційні рівняння з оператором $A = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[a(t, x; \sigma)F_{B_{x\to\sigma}}]$, де $a(t, x; \sigma)$ — функція (символ) оператора A, яка задовольняє певні умови (зокрема, є однорідною функцією аргументу σ, недиференційовною в точці $\sigma = 0$). Оператор A надалі називатимемо псевдобесселевим. Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами розпочали досліджувати О. М. Ленюк, Д. І. Спіжавка та В. В. Городецький.

Для подальшого розвитку теорії еволюційних псевдодиференціальних рівнянь важливим є питання побудови нових класів символів, які містять відомий клас символів, що задовольняють умову "параболічності" та розвиток теорії задачі Коші для еволюційних рівнянь з операторами, побудованими за такими функціями, з початковими даними з різних функціональних просторів. У даній роботі будуються такі класи функцій-символів, встановлюється розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння з псевдобесселевим оператором зі змінним символом у класі обмежених неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій.

1. Простори $\boldsymbol{\theta_{M,\rho}}$, $\boldsymbol{\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}}$. Нехай M, ρ: $\mathbb{R} \to [0,+\infty)$ — неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, диференційовні, монотонно зростаючі на $(0,\infty)$, $M(0)=\rho(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\rho(x) = +\infty$, причому $\rho(x) = \int\limits_0^x \omega(\xi)\,d\xi$ для $x \geqslant 0$, де ω — зростаюча й неперервна на $[0,\infty)$ функція, $\omega(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\omega(x)=+\infty$. Функція ρ опукла на $[0,+\infty)$, тобто:

а) $\forall\,\{x_1,x_2\}\subset[0,+\infty)$: $\rho(x_1)+\rho(x_2) \leqslant \rho(x_1+x_2)$;

б) $\forall\,\alpha \geqslant 1$ $\forall\,x\in[0,\infty)$: $\rho(\alpha x)\geqslant \alpha\rho(x)$;

в) $\forall\,\alpha\in(0,1)$ $\forall\,x\in[0,\infty)$: $\rho(\alpha x)\leqslant\alpha\rho(x)$.

Оскільки похідна ω функції ρ при $x\to+\infty$ необмежено зростає, то функція ρ при $x\to\to+\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію. Припускаємо також, що виконуються такі умови:

$$\forall\,\varepsilon>0 \qquad \exists\,x_0=x_0(\varepsilon)>0 \qquad \forall\,x\geqslant x_0\colon \qquad \rho(\varepsilon x)\geqslant M(x),$$

$$\rho(x)\underset{x\to 0+0}{\sim} x^{\gamma}, \qquad \gamma\in(1,+\infty), \qquad M(x)\underset{x\to 0+0}{\sim} x^{\beta}, \qquad \beta\in(0,1],$$

де γ, β — фіксовані параметри.

Символом $\theta_{M,\rho}$ позначимо сукупність усіх неперервних, парних на $\mathbb{R}$ функцій φ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, для яких

$$\begin{gathered}\exists\,a>0 \qquad \forall\,k\in\mathbb{Z}_+ \qquad \exists\,c_k>0 \qquad \forall\,x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\colon\\ M^k(x)|D^k_x\varphi(x)| \leqslant c_k\sum_{l=1}^{k}\rho^l(x)e^{-\rho(ax)}\end{gathered} \tag{1}$$

(якщо $k=0$, то сума відсутня, якщо $k=1$, то $l=1$ і т. д.; якщо $k=0$, то (1) справджується для всіх $x\in\mathbb{R}$, сталі c_k, $a>0$ залежать від φ).

Наведемо приклад функції з простору $\theta_{M,\rho}$, побудованого за конкретними функціями M та ρ. Для цього розглянемо функцію α: $\mathbb{R}\to[0,\infty)$, яка використовується при побудові псевдодиференціальних операторів: α — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку $\gamma>1$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, похідні цієї функції задовольняють умову

$$\forall\,k\in\mathbb{N} \quad \exists\,b_k>0 \quad \forall\,x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\colon \quad |D^k_x\alpha(x)|\leqslant b_k|x|^{\gamma-k}, \quad \alpha(x)>0, \quad x\in(0,\infty).$$

Цю умову можна подати у вигляді $M^k(x)|D^k_x\alpha(x)| \leqslant b_k\rho(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k\in\mathbb{N}$, де $M(x)=|x|$, $\rho(x)=|x|^{\gamma}$. Скориставшись формулою Фаа де Бруно диференціювання складної функції, безпосередньо переконуємося в тому, що $\exp\{-\alpha(x)\}$ є елементом простору $\theta_{M,\rho}$ із вказаними вище функціями M та ρ (див. також [4]) (така функція є важливою при дослідженні задачі Коші для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами, для яких $\alpha(x)$ є негладким у точці 0 однорідним символом).

Відзначимо основні властивості функцій з простору $\theta_{M,\rho}$, встановлені в [4]: у функції $D^k_x\varphi$, $\varphi\in\theta_{M,\rho}$, $x\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$, існують скінченні односторонні границі $\lim\limits_{x\to\pm 0} D^k_x\varphi(x)$, функція

$D_x^{2k}\varphi$, $x \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, у точці $x = 0$ має усувний розрив, кожна функція $\varphi \in \theta_{M,\rho}$ у точці 0 задовольняє умову Діні, на функціях з простору $\theta_{M,\rho}$ визначене перетворення Бесселя F_{B_ν}:

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) = \int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx, \qquad \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

де j_ν — нормована функція Бесселя, ν — фіксований параметр з множини $\{3/2; 5/2; 7/2; \ldots\}$. У просторі $\theta_{M,\rho}$ можна також ввести структуру зліченно-нормованого простору (детальніше про це див. в [4]).

Нехай $F_{B_\nu}[\theta_{M,\rho}] := \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Елементами простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, які задовольняють нерівності [4]

$$|D_\xi^m F_{B_\nu}[\varphi](\xi)| \leqslant \alpha_m (1 + |\xi|)^{-(\omega_0+m)}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

$\omega_0 = \widetilde{p}_0 + [\beta^{-1}[\gamma]]$, $\widetilde{p}_0 = 1 + p_0$, $p_0 = 2\nu + 1$, $[\cdot]$ — ціла частина числа.

$\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ перетворюється в зліченно-нормований простір, якщо систему норм у ньому ввести за допомогою формул

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi \in [0,\infty)} \left\{ \sum_{k=0}^p \Lambda(\xi)^{\widetilde{\omega}_0+2k} |D_\xi^{2k}\varphi(\xi)| \right\}, \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}, \qquad p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\Lambda(\xi) := 1 + \xi$, $\xi \in [0,\infty)$, $\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ — фіксований параметр. Перетворення Бесселя неперервно відображає $\theta_{M,\rho}$ на $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ [4]; на функціях з простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначене обернене перетворення Бесселя $F^{-1}_{B_\nu}$:

$$F^{-1}_{B_\nu}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \qquad \psi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}, \qquad c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}.$$

У просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ визначений і є неперервним оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, що відповідає оператору Бесселя [5]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi\left(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}\right) \sin^{2\nu}\omega d\omega, \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi\varphi$ диференційовна (навіть нескінченно диференційовна) у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ у тому розумінні, що граничні співвідношення $(\Delta\xi)^{-1}(T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi(x) - T_x^\xi\varphi(x)) \to \partial T_x^\xi\varphi/\partial\xi$, $\Delta\xi \to 0$, виконуються в просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.

2. Побудова фундаментального розв'язку. Задача Коші. Розглянемо функцію $a(t,x;\sigma)$, задану на $[0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, парну за змінними x, σ, яка задовольняє умови:

1) функція $a(t,x;\sigma)$ є однорідною порядку γ за аргументом σ рівномірно відносно t, x, тобто

$$a(t,x;\lambda\sigma) = \lambda^\gamma a(t,x;\sigma), \qquad \lambda > 0; \qquad \forall\,(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T;$$

2) $a(t,x;\sigma)$ — неперервна функція аргументу t на відрізку $[0,T]$ (при фіксованих x, σ) і $a(t,x;\sigma)$ — неперервна обмежена на $\mathbb{R}$ функція аргументу x (при фіксованих t, σ);

3) існують сталі c_0, $b_0 > 0$ такі, що справджуються нерівності

$$b_0\rho(\sigma) \leqslant a(t,x;\sigma) \leqslant \frac{c_0(1+\rho(\sigma))}{(1+|x|)^{\omega_0}}, \qquad \omega_0 = 2\nu + 2 + [\beta^{-1}[\gamma]], \qquad (t,x) \in \Pi_T;$$

4) при фіксованих t, x функція $a(t,x;\sigma)$, як функція σ, нескінченно диференційовна за σ при $\sigma \neq 0$; при цьому

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, c_k > 0\colon \quad M^k(\sigma)|D_\sigma^k a(t,x;\sigma)| \leqslant c_k \frac{\rho(\sigma)}{(1+|x|)^{\omega_0}}, \quad (t,x) \in \Pi_T, \quad \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Із властивостей функції a випливає, що $a(t,x;\sigma)$, як функція σ (при фіксованих $(t,x) \in \Pi_T$), є мультиплікатором у просторі $\theta_{M,\rho}$.

Розглянемо оператор A_t, заданий на $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, залежний від параметра $t \in [0,T]$, який визначається співвідношенням

$$(A_t\varphi)(x)\colon = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[a(t,x;\sigma)F_{B_{x\to\sigma}}[\varphi](\sigma)](x), \qquad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}.$$

Надалі будемо використовувати позначення $A_t = A$. Із властивостей функції $a(t,x;\sigma)$ випливає, що $A\varphi \in \mathcal{K}$ при кожному $t \in [0,T]$, де $\mathcal{K}$ — нормований простір, який складається з неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій ψ, що задовольняють нерівність $|\psi(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-\omega_0}$, $c = c(\psi) > 0$, з нормою

$$\|\psi\| = \sup_{\mathbb{R}}\{\Lambda^{\omega_0}(x)|\psi(x)|\}, \qquad \Lambda(x) := 1 + |x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки перетворення Бесселя (пряме та обернене) є неперервним оператором, то A: $\Phi^\nu_{\beta,\gamma} \to \mathcal{K}$ — лінійний неперервний оператор. Оператор A надалі називатимемо псевдобесселевим оператором, побудованим за змінним символом $a(t,x;\sigma)$.

У смузі $\Pi'_T = \{(t,x)\colon 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу про відшукання розв'язку еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Pi'_T, \tag{2}$$

який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)|_{t=\tau} = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \tag{3}$$

де $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Введемо позначення: $L \equiv L(t,x;A,D_t) := \partial/\partial t + A$.

Під фундаментальним розв'язком задачі Коші (2), (3) розумітимемо функцію $Z(t,x;\tau,\xi)$, $(t,x) \in \Pi'_T$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\xi \in \mathbb{R}$, яка має такі властивості:

1) $LZ(t,x;\tau,\xi) = 0$, тобто Z як функція t, x (при фіксованих τ, ξ) є розв'язком рівняння (2);

2)

$$\lim_{t\to\tau+0}\int\limits_0^\infty Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \varphi(x)$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для довільної функції $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.

Для побудови функції Z використаємо метод Леві (метод параметриксу), який полягає в тому, що функцію Z шукаємо у вигляді суми двох доданків: головного та деякого допоміжного. За головний доданок вибирається фундаментальний розв'язок рівняння (2), яке містить оператор, побудований за символом $a(t,x;\sigma)$ з фіксованою точкою $t=\beta$, $x=z$. Другий доданок шукаємо у вигляді інтегрального оператора з ядром, щільність якого визначається з деякого інтегрального рівняння.

Отже, зафіксуємо символ $a(t,x;\sigma)$ у точці $t=\beta$, $x=z$ і розглянемо задачу про відшукання розв'язку рівняння зі сталим символом

$$L(\beta,z;A,D_t)u(t,x)=0 \tag{4}$$

з початковою умовою (3). Розв'язок задачі (4), (3) шукаємо за допомогою перетворення Бесселя, в результаті чого дістанемо

$$u(t,x)=\int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\tau,x;\beta,z)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = G(t-\tau,x;\beta,z)*\varphi(x),$$

де $G(t-\tau,x;\beta,z)=F_B[\exp\{-a(\beta,z,\sigma)(t-\tau)\}]$. Основні властивості функції G описують такі твердження.

Лема 1. *При фіксованих t, τ, $t>\tau$, β, z функція $G(t-\tau,x;\beta,z)$, як функція аргументу x, є елементом простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Для G та її похідних правильними є оцінки*

$$|D_x^m G(t-\tau,x;\beta,z)|\leqslant \alpha_m(t-\tau)^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x|)^{-(\omega_0+m)}, \qquad m\in\mathbb{Z}_+,$$

де $\alpha_m=\beta_m(1+|z|)^{-\omega_0}$, стала $\beta_m>0$ не залежить від t, τ, β, z.

Лема 2. *Для довільної функції $\varphi\in\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$*

$$\int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \longrightarrow \varphi(x), \qquad t\to\tau+0, \tag{5}$$

у кожній точці $x\in\mathbb{R}$.

Зазначимо, що співвідношення (5) справджується і для довільної обмеженої неперервної парної на $\mathbb{R}$ функції.

Нехай

$$J(t,\tau,x):=\int\limits_\tau^t d\mu\int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\mu,x;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \tag{6}$$

де $\varphi(t,x)$ — функція, задана на $[0,T]\times\mathbb{R}$, неперервна за t, неперервна парна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція змінної x. У нижченаведеному твердженні дається формула застосування оператора L до інтеграла (6).

Лема 3. *При вказаних обмеженнях на функцію φ правильною є формула*

$$LJ(t,\tau,x)=\int\limits_\tau^t d\mu\int\limits_0^\infty LT_x^\xi G(t-\mu,x;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi+\varphi(t,x).$$

Відзначимо також, що для функції LT_x^ξ справджується оцінка

$$|LT_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi)| \leqslant \widetilde{d}_0(t-\tau)^{([\beta^{-1}[\gamma]]-\gamma)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}, \qquad (7)$$

де $\lambda \in (0,1)$ — фіксований параметр.

Фундаментальний розв'язок рівняння (2) шукаємо у вигляді суми

$$Z(t,x;\tau,\xi) = T_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi) + \Gamma(t,x;\tau,\xi),$$

де

$$\Gamma(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_\tau^t d\mu \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\mu,x;\mu,\eta)\Phi(\mu,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta.$$

Тут G — визначена раніше функція, $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ підберемо так, щоб Z як функція t, x задовольняла рівняння (2). Це буде тоді й лише тоді, коли

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t-\tau,x;\tau,\xi) + \int\limits_\tau^t d\mu \int\limits_0^\infty K(t-\mu,x;\mu,\eta)\Phi(\mu,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta, \qquad (8)$$

де $K(t-\tau,x;\tau,\xi) = -LT_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi)$. Розв'язком інтегрального рівняння (8) є ряд

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{m=1}^\infty K_m(t-\tau,x;\tau,\xi), \qquad K_1 = K,$$

$$K_m(t-\tau,x;\tau,\xi) = \int\limits_\tau^t dy \int\limits_0^\infty K(t-y,x;y,\eta)K_{m-1}(y-\tau,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta,$$

який збігається абсолютно і рівномірно при $0 < \delta_0 \leqslant t-\tau \leqslant T$, його сума — функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ при $t > \tau$ є неперервною функцією аргументів x, ξ і для неї справджується нерівність вигляду (7), яка використовується при оцінці повторних ядер K_m, $m \geqslant 2$. На підставі оцінок функцій $|T_x^\xi G|$ та $|\Phi|$ здійснюється оцінка $|\Gamma|$:

$$|\Gamma(t,x;\tau,\xi)| \leqslant d_0(t-\tau)^{(\lambda+[\beta^{-1}[\gamma]])/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)},$$
$$t-\tau > 0, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R},$$

де $\lambda \in (0,1)$ — фіксований параметр, з якої випливає, що

$$\left|\int\limits_0^\infty \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\right| \leqslant \widetilde{d}t^{2\lambda/\gamma} \to 0, \qquad t \to +0,$$

для довільної обмеженої неперервної парної на $\mathbb{R}$ функції φ (стала $\widetilde{d} > 0$ не залежить від x). Звідси з урахуванням граничного співвідношення (5) дістаємо, що побудована функція Γ є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння.

Основний результат сформулюємо у вигляді твердження.

Теорема. *Задача Коші для рівняння* (2) *розв'язна в класі обмежених неперервних парних на* $\mathbb{R}$ *функцій. Розв'язок задачі Коші* (2), (3) ($\tau = 0$) *дається формулою*

$$u(t,x) = \int_0^\infty \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \qquad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R},$$

при цьому $\lim\limits_{t\to+0} u(t,x) = \varphi(x)$ *у кожній точці* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
2. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Мат. сб. – 1955. – **36**, № 2. – С. 299–310.
3. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
4. *Мартинюк О. В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: Зб. наук. праць. – 2011. – Вип. 5. – С. 179–192.
5. *Левитан Б. И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 2. – С. 102–143.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 05.06.2012

В. В. Городецкий, О. В. Мартынюк, Р. И. Петришин

Задача Коши для одного класса сингулярных эволюционных уравнений

Устанавливается разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения с псевдобесселевым оператором с переменным символом в классе ограниченных непрерывных четных на $\mathbb{R}$ *функций.*

V. V. Gorodets'ky, O. V. Martynyuk, R. I. Petryshyn

The Cauchy problem for a class of singular evolution equations

We proved the solvability of the Cauchy problem for evolution equations with variable operator with pseudo-Bessel symbol in the class of bounded continuous functions even on $\mathbb{R}$.