

УДК 519.71:612.171.1

В.П. Марценюк, Р.О. Сарабун

Тернопільський державний медичний університет імені І.Я. Горбачевського, Україна
Україна, 46001, м. Тернопіль, майдан Волі, 1

Задача оптимального керування в моделі побудови штучних ЕКГ МакШеррі

V. Marceniuk, R. Sarabun

I. Horbachevsky Ternopil State Medical University, Ukraine
Ukraine, 46001, Ternopil, m. Voli, 1

Optimal Control in Model of Synthetic ECG McSharry

В.П. Марценюк, Р.О. Сарабун

Тернопольский государственный медицинский университет им. И.Я. Горбачевского
Украина, 46001, г. Тернополь, площадь Воли, 1

Задача оптимального управління в моделі построения искусственных ЭКГ МакШерри

У роботі поставлено і чисельно розв'язано задачу оптимального керування для системи ЕКГ МакШеррі, з дотриманням принципу найменшої дії.

Ключові слова: ЕКГ, оптимальне керування, принцип найменшої дії.

The problem of optimal control in model ECG McSharry delivered and numerically solved in the paper. It followed the principle of least action.

Keywords: ECG, optimal control, the principle of least action.

В работе поставлена и численно решена задача оптимального управления для системы ЭКГ МакШерри, с соблюдением принципа наименьшего действия.

Ключевые слова: ЭКГ, оптимальное управление, принцип наименьшего действия.

Вступ

Електрокардіографія є одним з методів обстеження хворого, що дозволяє визначити зміни функцій серця, які не проявляються клінічними ознаками, але є проявами серцевої патології. Актуальною є задача моделювання штучних ЕКГ сигналів, які дозволять удосконалити алгоритми аналізу ЕКГ.

В задачах моделювання штучних ЕКГ сигналів значний інтерес викликає можливість керування моделлю з позиції оптимізації певних її характеристик. Для вирішення цієї задачі широкого застосування набула теорія керування [1].

Метою роботи є розгляд задачі оптимального керування кардіографічним процесом, який описується моделлю МакШеррі.

Основна частина

Модель МакШеррі була запропонована у роботі [2]. У роботі [3] була запропонована програмна реалізація моделі.

Для побудови моделі використано систему керування, що складається з трьох нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}x'(t) &= \alpha x(t) - \omega y(t), \\y'(t) &= \alpha y(t) + \omega x(t),\end{aligned}\quad (1)$$

$$z'(t) = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z(t) - u(t)),$$

де $\alpha = 1 - \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, $\Delta \theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$, $\theta = \operatorname{atan} 2(y(t), x(t))$ і ω – кутова швидкість, $u(t) \in U$ – керування.

Значення параметрів моделі подано в табл. 1, 2.

Таблиця 1

| | |
|--------|-----|
| $x(0)$ | 1 |
| $y(0)$ | 0 |
| $z(0)$ | 1,2 |

Таблиця 2

| Індекс i | P | Q | R | S | T |
|------------------|-------------------|--------------------|------|-------------------|------------------|
| Час (с) | -0,2 | -0,05 | 0 | 0,05 | 0,3 |
| θ_i (рад) | $-\frac{1}{3}\pi$ | $-\frac{1}{12}\pi$ | 0 | $\frac{1}{12}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
| a_i | 60 | -250 | 1500 | -375 | 37,5 |
| b_i | 0,25 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,4 |

У роботі [2] в якості функції керування $u(t)$ було обрано функцію $z_0(t) = A \sin(2\pi f_2 t)$, де $A = 0,15$ мВ. Такий вибір $u(t)$ ґрунтується на гіпотезі про існування хвиль Майєра, природа походження яких до сьогодні не з'ясована.

Принцип найменшої дії

У даній роботі пропонується керування $u(t)$ здійснити на основі принципу найменшої дії, який лежить в основі функціонування багатьох природних систем.

Найбільш загальне формулювання закону руху системи дається так званим принципом найменшої дії [4]. Згідно з цим принципом кожна система характеризується певною функцією Лагранжа

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, q_1', q_2', \dots, q_s', t), \quad (2)$$

при цьому рух системи задовольняє наступну умову.

Нехай в моменти часу $t = t_1$ і $t = t_2$ система займає деяке положення, яке характеризується двома наборами координат $q^{(1)}$ і $q^{(2)}$. Тоді між цими положеннями система рухається таким чином, щоб дія

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, q', t) dt \quad (3)$$

була найменшою.

У декартовій системі координат для системи, яка рухається в тривимірному просторі, функція Лагранжа має вигляд

$$L(x(t), y(t), z(t), x(t)', y(t)', z(t)') = \frac{m}{2} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2], \quad (4)$$

де m – стала, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – функції, що описують рух системи по кожній з координат [4].

На основі попередніх міркувань приходимо до задачі оптимального керування для системи (1), що полягає в мінімізації функціоналу дії:

$$I(x(t), y(t), z(t), u(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), y(t), z(t), x(t)', y(t)', z(t)', u(t)) \rightarrow \inf_{u \in U} \quad (5)$$

З урахуванням (1) і (4) функціонал дії (5) має вигляд:

$$\begin{aligned} I(x(t), y(t), z(t), u(t)) = & \int_0^t \left[\left((1 - \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}) x(t) - \omega y(t) \right)^2 + \right. \\ & \left. \left((1 - \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}) y(t) + \omega x(t) \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(- \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \cdot (\text{atan } 2(y(t), x(t)) - \theta_i) \bmod 2\pi \cdot \exp\left(-\frac{\Delta\theta_i^2}{2b_i^2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. (z(t) - u(t)) \right)^2 \right] \rightarrow \inf_{u \in U}. \end{aligned} \quad (6)$$

Визначення функції керування $u(t)$ в даній роботі було здійснено за допомогою прямого чисельного методу, який реалізовано в пакеті Java-класів дун.Орт [5].

Програмна реалізація. Опис задачі оптимального керування (1), (6) в пакеті дун.Орт зроблено за допомогою вхідного текстового файлу.

Дані щодо застосування прямого методу наведені нижче:

```
$ f = 2201.791364622683
$ hg_max = 0.0
$ |dL| = 8.288220681575367E-4
$ nfun = 16555
$ ngrad = 55
Optimization ended
# of function evaluations = 16556
```

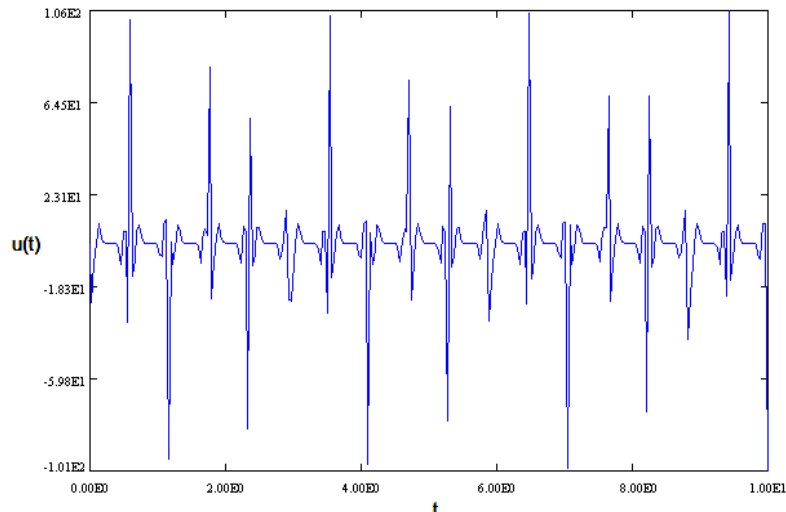


Рисунок 1 – Графік функції керування $u(t)$

У результаті розв'язку задачі оптимального керування було отримано функцію керування $u(t)$ (рис. 1), яка має вигляд деякого коливного процесу.

Висновки

У роботі поставлено і чисельно розв'язано задачу оптимального керування для системи ЕКГ МакШеррі, з дотриманням принципу найменшої дії.

Коливний характер функції керування в системі керування МакШеррі показує, що навіть у такому найпростішому модельному прикладі, виходячи з принципу найменшої дії, є потреба в застосуванні певного квазіперіодичного процесу. Зауважимо, що в моделі МакШеррі в якості функції $u(t)$ використовується періодична функція $z_0(t) = A \sin(2\pi f_2 t)$.

Список літератури

1. Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
2. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals / [McSharry P.E, Clifford G, Tarassenko L, Smith L.A.] // IEEE Transaction on biomedical Engineering. – 2003. – 50(3). – P. 289-294.
3. Марценюк В.П. Програмне середовище побудови штучних ЕКГ / В.П. Марценюк, Р.О. Сарабун // Клиническая информатика и телемедицина. – 2012. – Т. 8, Вып. 9.
4. Ландау Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособ. : Для вузов. В 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – [5-е изд., стереот.] – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – Т. I. Механика. – 224 с.
5. Fabien B.C. Some Tools for the Direct Solution of Optimal Control Problems, Advances in Engineering Software / Fabien B.C. – Vol. 29, 1998. – P.45-61.

References

1. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal management. - M.: Nauka. Home edition of physicochemical matematycheskoy literature, 1979.
2. McSharry PE, Clifford G, Tarassenko L, Smith LA A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals. IEEE Transaction On biomedical Engineering, 2003, 50 (3) :289-294 .
3. Martsenyuk V.P. Sarabun R.O. Software Environment constructing artificial ECG. Clinical informatics and telemedicine . 2012. T.8. V.9 .
4. Landau L.D., Lyfshyts E.M. Theoretical Physics: Textbook. posob.: For high schools. In 10 T. I. Mechanics . - 5th ed. , Stereotypes . - Moscow: FYZMATLYT, 2004.
5. Fabien, BC, Some Tools for the Direct Solution of Optimal Control Problems, Advances in Engineering Software, Vol.29, pp.45- 61, 1998.

RESUME

V. Marцениuk, R. Sarabun

Optimal Control in Model Of Synthetic ECG McSharry

The purpose of the article is to consider the optimal control problem ECG process that describes the model McSharry. To build the model uses a control system consisting of three nonlinear differential equations. Optimal controls based on the principle of least action which underlies the functioning of many natural systems. As a result, optimal control was obtained management function, which has the form of a vibrational process. Oscillatory nature of controls in the control system McSharry shows that even in this simplest model example of the principle of least action is needed to use a quasi-periodic process.

Стаття надійшла до редакції 16.09.2013.