5C

УДК 519.7

С.В. Сапунов[1], В.Ю. Пилипенко[2]
[1]Институт прикладной математики и механики НАН Украины
Украина, 83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74
[2]Донбасский государственный педагогический университет, Украина
Украина, 84116, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Генерала Батюка, 19

О высоте идентификаторов вершин помеченных графов

S.V. Sapunov[1], V.Yu. Pilipenko[2]
[1]Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine
Ukraine, 83114, Donetsk, Rozy Luksemburg st., 74.
[2]Donbas State Teachers' Training University
Ukraine, 84116, Donetsk area. Slavyansk, Generala Batyuka st., 19

On Height of Vertex Identifiers of Vertex Labeled Graphs

С.В. Сапунов[1], В.Ю. Пилипенко[2]
[1]Інститут прикладної математики і механіки НАН України
Україна, 83114, м. Донецьк, вул. Рози Люксембург, 74
[2]Донбаський державний педагогічний університет, Україна
Україна, 84116, Донецька обл., м. Слов'янськ, вул. Генерала Батюка, 19

Про висоту ідентифікаторів вершин графів з позначеними вершинами

Рассматривается задача различения вершин помеченного графа по ассоциированным с ними языкам в алфавите меток. Показано, что верхняя оценка длины слова, различающего две вершины графа, детерминированного по разметке окрестностей вершин, равна половине числа его вершин. Показано также, что в языке каждой из любых двух различных вершин есть слово, отличающее одну вершину от другой, и его длина меньше числа вершин графа. Найдены оценки высоты конечных множеств слов, отличающих одну вершину графа от всех других его вершин (т.н. идентификаторов).
Ключевые слова: помеченные графы, языки в алфавите меток, идентификаторы вершин.

The problem of vertex distinguishing on vertex labeled graphs is considered. Two vertices are called distinguishable if associated languages over the alphabet of labels are different. A linear upper bound of vertex distinguishing word length equal to half of the number of all vertices is obtained. It is shown that at both languages of two different vertices there are distinguishing words and their lengths are less then number of all vertices. Upper bounds of height of finite sets of words over the vertex labels alphabet distinguishing a given vertex from other (i.e. identifiers) are obtained.
Key words: vertex labeled graphs, languages over the label alphabet, vertex identifiers.

Розглядається задача розрізнення вершин позначеного графа за асоційованими з ними мовами в алфавіті позначок. Визначено, що верхня оцінка довжини слова, що розрізнює дві вершини графа, детермінованого за розміткою околів вершин, дорівнює половині від кількості його вершин. Визначено також, що у мові кожної з двох різних вершин є слово, яке відрізняє одну вершину від іншої, і його довжина менша, ніж кількість вершин у графі. Знайдено оцінки висоти скінчених множин слів, що відрізняють одну вершину графа від інших його вершин (т.з. ідентифікаторів).
Ключові слова: позначені графи, мови у алфавіті позначок, ідентифікатори вершин.

Введение

Одной из широко используемых моделей информационных систем является взаимодействие двух объектов: агента и его операционной среды [1]. Проблематика, изучаемая с помощью этой модели, чрезвычайно обширна: от навигации мобильных роботов в физическом рабочем пространстве, до функционирования программных агентов в сложных информационных средах [2], [3]. Одним из подходов к анализу операционной среды является ее представление в виде топологической модели, т.е. графа с помеченными элементами (вершинами, дугами, точками «прикосновения» дуги к вершине и т.д.). Одной из центральных задач анализа операционной среды является определение агентом своего местоположения в среде (самолокализация агента, если агент локализует себя самостоятельно). В случае топологической среды это означает определение начальной вершины графа, т.е. отделение этой вершины от всех других вершин. Заметим, что эта задача имеет соответствующий аналог в теории автоматов [4]. В [5], [6] предложен ряд методов и алгоритмов решения задачи самолокализации, основанных на использовании конечных множеств слов в алфавите меток, которые отличают одну вершину графа от всех других его вершин (т.н. идентификаторов вершин). Рассматривались позитивные идентификаторы, содержащие исключительно слова языка вершины и смешанные идентификаторы, содержащие также слова, отсутствующие в языке вершины. Для предложенных методов важной проблемой явилось оценивание сложности минимальных идентификаторов, т.е. таких, которые состоят из наименьшего числа слов кратчайшей длины. Отысканию таких оценок посвящена данная статья.

Постановка задачи

Анализируются языки, ассоциированные с вершинами связных помеченных неориентированных графов. Требуется оценить сверху длину кратчайших слов, отличающих в совокупности одну вершину графа от всех других его вершин.

Основные определения

Неопределяемые понятия общеизвестны и их можно найти в [7].

Помеченным графом назовем конечный простой связный неориентированный граф с помеченными вершинами $G=(V,E,M,\mu)$, где V – множество вершин, $|V|=n$, E – множество ребер (т.е. неупорядоченных пар вершин), M – множество меток, $\mu : V \to M$ – сюръективная функция разметки вершин. Под открытой окрестностью Γ_v вершины $v \in V$ будем понимать множество всех вершин, смежных с v. Под окрестностью $\Gamma_{(v)}$ вершины $v \in V$ будем понимать $\Gamma_v \cup \{v\}$. Путем в графе G назовем последовательность вершин $p = v_1 \ldots v_k$, такую, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $i = 1,\ldots,k-1$. Число $k \in N$ назовем длиной пути p. Меткой $\mu(p)$ пути p назовем слово $w = \mu(v_1)\ldots\mu(v_k)$ в алфавите меток M. Будем говорить, что слово w определяется вершиной v_1. Длину слова w будем обозначать через $d(w)$. Путь с меткой w, начинающийся в вершине v, будем обозначать $p(v,w)$. Инверсией слова $w = \mu(v_1)\ldots\mu(v_k)$ назовем слово $w^{-1} = \mu(v_k)\ldots\mu(v_1)$. Множество L_v всех слов $w \in M^+$, определяемых вершиной $v \in V$, будем называть языком этой вершины. Граф G будем называть приведенным, если для любых вершин $v_1, v_2 \in V$ из $v_1 \neq v_2$ следует $L_{v_1} \neq L_{v_2}$.

Определим на M^+ частичную операцию $\circ$ композиции слов. Пусть $x, y \in M$, $w_1, w_2 \in M^*$, тогда $w_1 x \circ x w_2 = w_1 x w_2$ и $w_1 x \circ y w_2$ не определено, если $x \neq y$. Композицию k экземпляров слова w будем обозначать w^k.

Введем операцию $*: V \times M^+ \to 2^V$ соотношением: для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ через $v * w$ обозначим множество всех вершин $h \in V$ таких, что существует путь p, соединяющий вершины v и h, и $\mu(p) = w$. Ясно, что если слово $w \in L_v$, то $|v * w| > 0$ и $|v * w| = 0$ – в противном случае.

Слово w' называется подсловом слова w, если существуют слова w_1 и w_2 (возможно, однобуквенные) такие, что $w = w_1 \circ w' \circ w_2$. Если $d(w_1) = 1$ ($d(w_2) = 1$), то слово w' называется начальным отрезком (конечным отрезком) слова w. Будем писать $w' \prec w$, если слово w' является начальным отрезком слова w.

Функцию разметки $\mu: V \to M$ будем называть детерминированной или Д-разметкой, если для любой вершины $v \in V$ и любых вершин $s, t \in \Gamma_v$ из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$. Помеченный граф G с детерминированной функцией разметки будем называть детерминированным, или Д-графом. Функцию разметки $\mu: V \to M$ будем называть сильно детерминированной или СД-разметкой, если для любой вершины $v \in V$ и любых вершин $s, t \in \Gamma_{(v)}$ из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$. Помеченный граф G с сильно детерминированной функцией разметки будем называть сильно детерминированным, или СД-графом. В [8] было показано, что из определения СД-графа вытекают следующие его свойства: (1) помеченный граф G является СД-графом тогда и только тогда, когда для любой вершины $v \in V$ и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|v * w| \leq 1$, причем $|v * w| = 1$, если $w \in L_v$ и $|v * w| = 0$ – в противном случае; (2) для любых различных вершин $v_1, v_2 \in V$ и любого слова $w \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ расстояние между вершинами $v_1 * w$ и $v_2 * w$ не меньше 4.

Идентификатором вершины $v \in V$ назовем конечное множество слов $W_v \subset M^+$, такое, что для любой вершины $h \in V$ равенство $W_v \cap L_v = W_v \cap L_h$ выполняется тогда и только тогда, когда $v{=}h$. Всякий идентификатор W_v можно представить как объединение $W_v^+ \cup W_v^-$ двух множеств $W_v^+ = W_v \cap L_v$ и $W_v^- = W_v \setminus L_v$. Идентификатор W_v назовем позитивным, если $W_v^- = \varnothing$, и негативным, если $W_v^+ = \varnothing$.

Высота идентификаторов вершин

Следующая теорема дает оценки длин слов, различающих две вершины связного СД-графа.

Теорема. Пусть G является связным приведенным СД-графом. Тогда для любых вершин $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$, одновременно выполняются утверждения:

1) длина кратчайшего слова из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ не превосходит $\frac{n}{2}$;

2) существует слово из $L_{v_1} \setminus L_{v_2}$, длина которого строго меньше n.

Доказательство. Если $\mu(v_1) \neq \mu(v_2)$, то любое из слов $w_1 = \mu(v_1)$ и $w_2 = \mu(v_2)$ является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$. Ясно, что $d(v_1) \leq \frac{n}{2}$ и $d(v_2) \leq \frac{n}{2}$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $V = \{v_1, v_2\}$. Таким образом, в этом случае выполняются оба утверждения теоремы.

Пусть $\mu(v_1) = \mu(v_2) = x$. Так как граф G – приведенный и связный, то $L_{v_1} \setminus L_{v_2} \neq \varnothing$ и $L_{v_2} \setminus L_{v_1} \neq \varnothing$ и, следовательно, $L_{v_1} \oplus L_{v_2} \neq \varnothing$.

Обозначим через u метку некоторого кратчайшего пути из v_1 в v_2. Легко видеть, что $4 \le d(u) \le n$. Действительно, ограничение $d(u)$ снизу вытекает из определения СД-графа, а ограничение сверху определяется числом вершин графа G. Из определения СД-графа следует, что слово u не является палиндромом, т.е. $u \neq u^{-1}$. Действительно, если u является палиндромом, то существует начальный отрезок u' и конечный отрезок u'' слова u такие, что $d(u') = d(u'') = \left[\frac{n}{2}\right]$ и $u'' = (u')^{-1}$. Тогда вершины $v_1 * u'$ и $v_2 * u''$ либо смежные, либо принадлежат окрестности одной и той же вершины. В обоих случаях граф G не является СД-графом, что невозможно.

Обозначим через w кратчайшее слово из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$. Без потери общности предположим, что $w \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$. Обозначим через w' длиннейший начальный отрезок слова w, такой, что $w' \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$, т.е. $w = w'y$, где $y \in M$.

Предположим, что граф G является деревом.

Пусть $p(v_1, w)$ и $p(v_2, w')$ не имеют общих вершин. Введем вспомогательные обозначения. Пусть $u = w_1 \circ u_1 \circ w_3^{-1}$, где $w_1 \prec w'$, $w_3 \prec w'$, а u_1 является меткой кратчайшего пути из вершины $v_1 * w_1$ в вершину $v_2 * w_3$. Положим, что $1 \le d(w_1) \le d(w')$ и $1 \le d(w_3) \le d(w')$. Обозначим через w_2 метку кратчайшего пути из вершины $v_1 * w_1$ в вершину $v_1 * w'$. Обозначим через w_4 метку кратчайшего пути из вершины $v_2 * w_3$ в вершину $v_2 * w'$. Таким образом, $w' = w_1 \circ w_2$ и $w' = w_3 \circ w_4$. Если $\mu(v_1 * w_1) = \mu(v_2 * w_3)$, то по определению СД-графа $d(u_1) \ge 4$. Тогда в графе G число вершин, которые не принадлежат $p(v_1, w)$, больше, либо равно $d(w)$. Следовательно, $d(w) \le \frac{n}{2}$ и первое утверждение теоремы выполняется. Пусть $\mu(v_1 * w_1) \neq \mu(v_2 * w_3)$. Тогда $d(w_1) \neq d(w_3)$. Положим, что $d(w_1) > d(w_3)$. Так как $w_1 \prec w'$ и $w_3 \prec w'$, то $w_3 \prec w_1$. Рассмотрим граф на рис. 1. Здесь стрелкой обозначается направление прохождения пути в соответствии с чтением его метки слева направо.

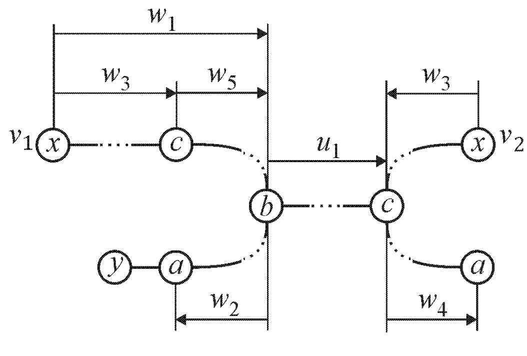

Рисунок 1 – Граф, с чтением его метки слева направо

Обозначим через u' начальный отрезок слова u_1^{-1} такой, что $d(w_3 \circ u') \le d(w')$. Слово $w_3 \circ u' \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Если $w_3 \circ u' \prec w'$, то в окрестности вершины $v_2 * w_3$ находятся две различные вершины с одной и той же меткой, что невозможно по определению СД-графа. Следовательно, вершина $v_1 * w_3 \circ u'$ не принадлежит $p(v_1, w)$. Тогда в графе G число вершин, которые не принадлежат $p(v_1, w)$, больше либо равно $d(w)$. Следовательно, $d(w) \le \frac{n}{2}$ и первое утверждение теоремы выполняется.

Проверим, выполняется ли второе утверждение теоремы для деревьев при условии, что $p(v_1, w)$ и $p(v_2, w')$ не имеют общих вершин. Обозначим через w_5 метку кратчайшего пути из вершины $v_1 * w_3$ в вершину $v_1 * w_1$. Если слово $w_3 \circ u_1^{-1} \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$, то второе утверждение теоремы выполняется, т.к. $d(w_3 \circ u_1^{-1}) < n$. Пусть $w_3 \circ u_1^{-1} \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Тогда слово $w_3 \circ u_1^{-1} \circ w_5^{-1} \circ u_1^{-1} \in L_{v_2}$. Если слово $w_3 \circ u_1^{-1} \circ w_5^{-1} \circ u_1^{-1} \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$, то второе утверждение теоремы выполняется, т.к. $d(w_3 \circ u_1^{-1} \circ w_5^{-1} \circ u_1^{-1}) < n$. Так как дерево G конечно, то для некоторого натурального k выполняется $w_3 \circ (u_1^{-1} \circ w_5^{-1})^k \circ u' \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$, где $u' \prec u_1^{-1}$. Величина $d(w_3 \circ (u_1^{-1} \circ w_5^{-1})^k \circ u') < n$. Следовательно, второе утверждение теоремы в данном случае выполняется.

Доказательство обоих утверждений теоремы для случая, когда $d(w_3) > d(w_1)$ аналогично.

Покажем, что оценка длины слова из первого утверждения теоремы достижима. Рассмотрим граф на рис. 2.

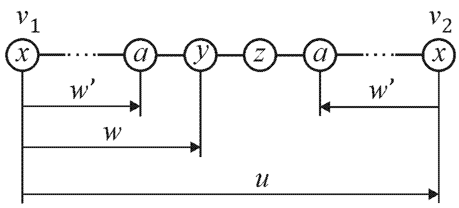

Рисунок 2 – Граф, подтверждающий оценку длины слова

Легко видеть, что длина слова w равна $\frac{n}{2}$.

Пусть граф G по-прежнему является деревом. Предположим, что $p(v_1, w)$ и $p(v_2, w')$ имеют общие вершины. Предположим, далее, что для любого слова $w'' \prec w'$ выполняется $v_1 * w'' \ne v_2$ и $v_2 * w'' \ne v_1$. Введем вспомогательные обозначения. Обозначим через w_1 начальный отрезок слова w' такой, что $w_1 \prec u$ и длина w_1 наибольшая из возможных. Обозначим через w_2 конечный отрезок слова w', такой, что $w' = w_1 \circ w_2$. Обозначим через w_3 начальный отрезок слова w' такой, что $w_3 \prec u^{-1}$ и длина w_3, наибольшая из возможных. Обозначим через w_4 конечный отрезок слова w' такой, что $w' = w_3 \circ w_4$. По предположению $p(v_1, w_1)$ и $p(v_2, w_3)$ имеют общие вершины. Если $w_1 = w_3$, то метка кратчайшего пути из вершины $v_1 * w_1$ в вершину $v_2 * w_3$ является палиндромом, что невозможно для СД-графов. Следовательно, $w_1 \ne w_3$ и либо $w_1 \prec w_3$, либо $w_3 \prec w_1$.

Пусть $w_1 \prec w_3$. Если $p(v_1, w_1)$ и $p(v_2, w_1)$ имеют общие вершины, то метка кратчайшего пути из вершины $v_1 * w_1$ в вершину $v_2 * w_1$ является палиндромом, что невозможно для СД-графов. Обозначим через w_6 метку кратчайшего пути из вершины $v_1 * w_1$ в вершину $v_2 * w_1$. По определению СД-графа $d(w_6) \geq 4$. Обозначим через w_5 метку кратчайшего пути из вершины v_1 в вершину $v_1 * w_3$. Длина слова $w_5 \circ w_4$ меньше, чем $d(w)$. Следовательно, $w_5 \circ w_4 \in L_{v_2} \cap L_{v_1}$ и существует простой путь $p(v_2, w_5 \circ w_4)$ (рис. 3).

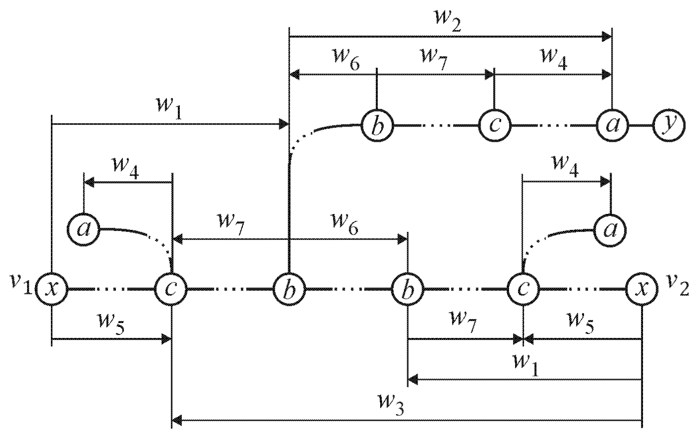

Рисунок 3 – Простой путь $p(v_2, w_5 \circ w_4)$

Обозначим через w_7 метку кратчайшего пути из вершины $v_1 * w_1$ в вершину $v_2 * w_3$. Слово w' можно представить в виде $w_1 \circ w_6^{-1} \circ w_7 \circ w_4$. Тогда слово w_2 можно представить в виде $w_6^{-1} \circ w_7 \circ w_4$. Слово $w_1 \circ w_6 \circ w_7 \in L_{v_1}$ и его длина меньше, чем $d(w)$. Следовательно, $w_1 \circ w_6 \circ w_7 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Так как слово $w_6 \circ w_7$ не может быть палиндромом, то $w_1 \circ w_6 \circ w_7 \not\prec w_3$ и вершины пути $p(v_2 * w_1, w_6 \circ w_7)$ не принадлежат $p(v_1, w)$. Тогда в графе G число вершин, которые не принадлежат $p(v_1, w)$, больше либо равно $d(w)$. Следовательно, $d(w) \leq \dfrac{n}{2}$ и первое утверждение теоремы выполняется.

Покажем, что при данных условиях второе утверждение теоремы также выполняется. Слово $w_1 \circ w_6^{-1} \circ w_6^{-1} \in L_{v_2}$ и его длина меньше, чем n. Если $w_1 \circ w_6^{-1} \circ w_6^{-1} \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$, то второе утверждение теоремы выполняется. Пусть $w_1 \circ w_6^{-1} \circ w_6^{-1} \in L_{v_2} \cap L_{v_1}$. Тогда слово $w_1 \circ \left(w_6^{-1}\right)^3 \in L_{v_2}$. Если $w_1 \circ \left(w_6^{-1}\right)^3 \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$, то второе утверждение теоремы выполняется. Так как дерево G конечно, то для некоторого натурального k выполняется, $w_1 \circ \left(w_6^{-1}\right)^k \circ w'' \in$ $\in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$ где $w'' \prec w_6^{-1}$. Величина $d\left(w_1 \circ \left(w_6^{-1}\right)^k \circ w''\right) < n$. Следовательно, второе утверждение теоремы в данном случае выполняется. Доказательство обоих утверждений теоремы для случая, когда $w_3 \prec w_1$ аналогично.

Пусть граф G является деревом, а пути $p(v_1, w)$ и $p(v_2, w')$ имеют общие вершины. Положим, что $u \prec w$. Тогда $\{u, u^{-1}\} \subseteq L_{v_1} \cap L_{v_2}$. Действительно, если $u \notin L_{v_2}$ или $u^{-1} \notin L_{v_1}$, то в $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$ существует слово, длина которого меньше $d(w)$, что невозможно. Предположим, что для некоторого натурального k выполняется $\left\{u^k,\left(u^{-1}\right)^k\right\}\subseteq L_{v_1}\cap L_{v_2}$ и $w=u^k\circ w_1 y$, где $y\in M$, а w_1 является конечным отрезком слова w'. Оценим длину слова w. Из того, что слово $u^k\circ w_1 y\in L_{v_1}$ следует, что слово $u^{k-1}\circ w_1 y\in L_{v_2}$ и существует простой путь $p\left(v_2,u^{k-1}\circ w_1 y\right)$. Так как $d\left(u^{k-1}\circ w_1 y\right)<d(w)$, то слово $u^{k-1}\circ w_1 y\in L_{v_1}$ и существует простой путь $p\left(v_1,u^{k-1}\circ w_1 y\right)$. Тогда слово $u^{k-2}\circ w_1 y\in L_{v_2}$ и существует простой путь $p\left(v_2,u^{k-2}\circ w_1 y\right)$. Продолжая эти рассуждения получаем, что слово $w_1 y\in L_{v_2}$ и существует простой путь $p\left(v_2,w_1 y\right)$. Так как $d\left(w_1 y\right)<d(w)$, то слово $w_1 y\in L_{v_1}$ и существует простой путь $p\left(v_1,w_1 y\right)$. Тогда слово $u^{-1}\circ w_1 y\in L_{v_2}$ и существует простой путь $p\left(v_2,u^{-1}\circ w_1 y\right)$. Так как $d\left(u^{-1}\circ w_1 y\right)<d(w)$, то слово $u^{-1}\circ w_1 y\in L_{v_1}$ и существует простой путь $p\left(v_1,u^{-1}\circ w_1 y\right)$. Продолжая рассуждения, получаем, что слово $\left(u^{-1}\right)^k\circ w_1 y\in L_{v_1}\cap L_{v_2}$ и, следовательно, слово $\left(u^{-1}\right)^{k+1}\circ w_1 y\in L_{v_2}$ (рис. 4).

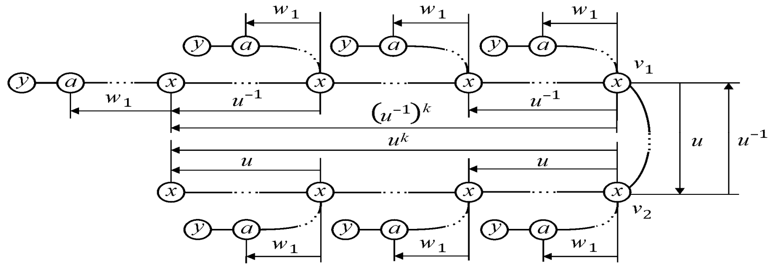

Рисунок 4 – Слово $\left(u^{-1}\right)^k\circ w_1 y\in L_{v_1}\cap L_{v_2}$ и слово $\left(u^{-1}\right)^{k+1}\circ w_1 y\in L_{v_2}$

В данном случае $n\geq(2k+1)d(u)+(2k+2)d(w_1 y)-4k-1$ и $d(w)=kd(u)+d(w_1 y)-k$. Следовательно, $d(w)\leq\dfrac{n}{2}$ для любого $k\geq 1$ и первое утверждение теоремы выполняется.

Выполнимость второго утверждения теоремы следует из того, что слово $\left(u^{-1}\right)^{k+1}\circ w_1 y\in$ $\in L_{v_2}\setminus L_{v_1}$ и его длина меньше, чем n.

Таким образом, оба утверждения теоремы выполняется для деревьев.

Пусть граф G не является деревом. Если $p(v_1,w)$ и $p(v_2,w')$ не содержат циклов, то доказательство утверждений теоремы аналогично их доказательству для деревьев.

Предположим, что $p(v_1,w)$ и $p(v_2,w')$ не содержат общих вершин. Пусть путь $p(v_1,w)$ содержит цикл, например, $p(v_1 * w_1, w_2\circ w_3)$ (рис. 5). Здесь G' обозначает подграф графа G, представляющий неориентированное дерево с корнем в вершине v_2, ветви которого помечены начальными отрезками слова w. Принципы выделения подграфа G' из графа G будут объяснены ниже.

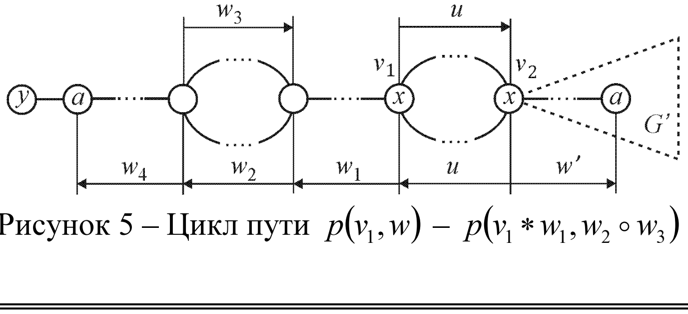

Рисунок 5 – Цикл пути $p(v_1,w)$ – $p(v_1 * w_1, w_2\circ w_3)$

Пусть путь $p(v_2, w')$ содержит цикл $p(v_2 * w_1, w_2 \circ w_3)$. По определению СД-графа путь $p(v_2, w_1 \circ w_2 \circ w_4)$ определен единственным образом. Тогда слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$, а слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y \in L_{v_1} \setminus L_{v_2}$. Легко видеть, что $d(w_1 \circ w_2 \circ w_4 y) < d(w)$. Следовательно, $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y$ является кратчайшим словом из $L_{v_1} \oplus L_{v_2}$, что невозможно. Если $d(u) \geq d(w)$, то очевидно, что $d(w) \leq \frac{n}{2}$. Пусть $d(u) < d(w)$. Так как путь $p(v_1, u)$ содержит вершины, которые не принадлежат $p(v_1, w)$, то положим его длину минимальной, т.е. $d(u) = 4$. Так как для некоторого натурального k вершина v_2 определяет путь с меткой u^k такой, что $d(u^k) = d(w')$, то для уменьшения числа вершин, не принадлежащих $p(v_1, w)$, положим $v_2 * u = v_1$. Пусть $w = w_1 \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4 y$. Предположим, что длины слов w_1, w_2, w_3, w_4 совпадают и $s = 1$. Тогда существует простой путь $p(v_2, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_4)$. Слово $w_1 \circ w_2 \circ w_4 y \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ так как его длина меньше, чем $d(w)$. Следовательно, существует простой путь $p(v_2, w_1 \circ w_2 \circ w_4 y)$. Так как $d(w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_1^{-1}) < d(w)$, то $w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_1^{-1} \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует простой путь $p(v_2, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_1^{-1})$. Так как $d(w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_3) < d(w)$, то $w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_3 \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существует простой путь $p(v_2, w_1 \circ w_2 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_3)$. Слово $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_4 y \in L_{v_1} \cap L_{v_2}$ так как его длина меньше, чем $d(w)$. Следовательно, существует простой путь $p(v_2, w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_4 y)$. Так как длины слов $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_1^{-1}$, $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1} \circ w_4$, $w_1 \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1} \circ w_2^{-1}$ меньше, чем $d(w)$, то все эти слова принадлежат $L_{v_1} \cap L_{v_2}$ и существуют простые пути с соответствующими метками из вершины v_2 (рис. 6).

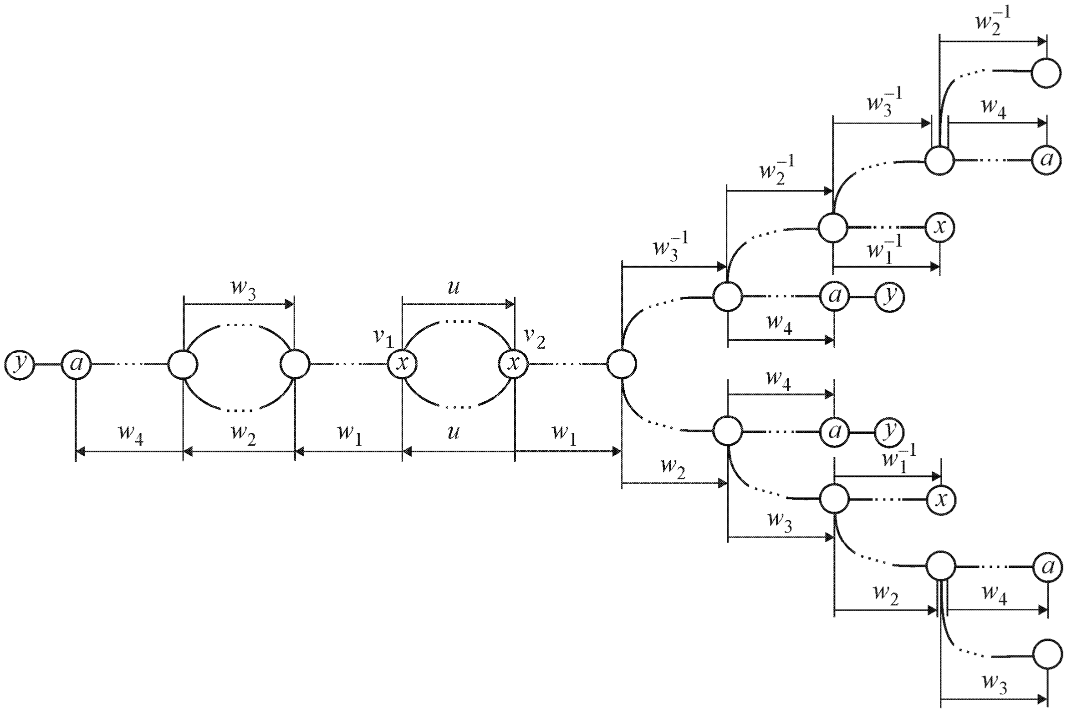

Рисунок 6 – Простые пути с соответствующими метками из вершины

Оценим число $n(G)$ вершин в подграфе G'. В данном случае $n(G') \geq 3d(w_1)+$ $+4d(w_2)+4d(w_3)+4d(w_4)-9$, а $d(w)=d(w_1)+2d(w_2)+d(w_3)+d(w_4)-3$. Таким образом, значение $d(w)$, по крайней мере, в 2 раза меньше, чем число вершин в подграфе G'. Следовательно, $d(w)\leq \frac{n}{2}$ и первое утверждение теоремы выполняется. С ростом величины s число вершин в подграфе G' будет только возрастать. Таким образом, значение $d(w)$ не превысит $\frac{n}{2}$.

Выполнение второго утверждения теоремы следует из того, что слово $u_1^{-1}\circ w \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$ и его длина меньше n.

Пусть $p(v_1, w)$ и $p(v_2, w')$ имеют общие вершины. При этом, по соображениям, изложенным выше, цикл может содержать только путь $p(v_1, w)$.

Предположим, что для любого слова $w'' \prec w'$ выполняется $v_1 * w'' \neq v_2$ и $v_2 * w'' \neq v_1$. Введем дополнительные обозначения. Пусть $w = w_1 \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4 y$. Пусть $u = w_5 \circ w_6 \circ w_8^{-1}$, где $w_5 \circ w_6 \prec w_1$, $w_8 \circ w_6^{-1} \prec w_1$ и оба эти слова имеют максимальную возможную длину. Обозначим через w_7 конечный отрезок слова w_1 такой, что $w_5 \circ w_6 \circ w_7 = w_1$. Обозначим через w_9 конечный отрезок слова w' такой, что $w_8 \circ w_6^{-1} \circ w_9 = w'$ и $w_9 = w_1' \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4$, $w_1 = w_8 \circ w_6^{-1} \circ w_1'$. Пусть $w_{10} = w_7 \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4$. Рассмотрим граф на рис. 7.

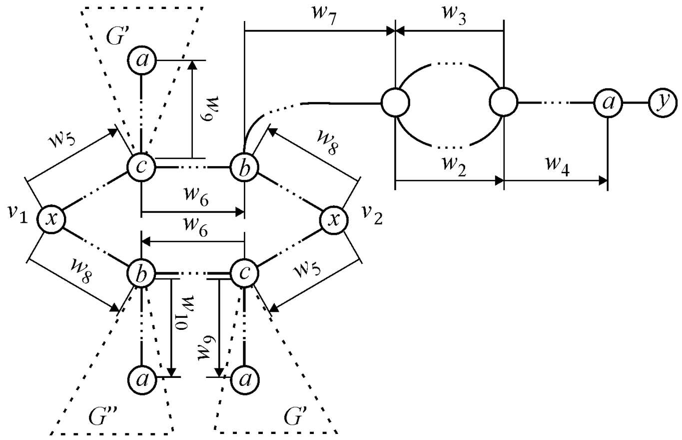

Рисунок 7 – Граф двух слов с максимальной длиной

Здесь G обозначает неориентированное дерево, ветви которого помечены всеми начальными отрезками слов w_9 и $w_1' \left(w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1}\right)^s \circ w_4$, а G'' обозначает неориентированное дерево, ветви которого помечены всеми начальными отрезками слов w_{10} и $w_7 \circ \left(w_3^{-1} \circ\right.$ $\left.\circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1}\right)^s \circ w_4$ Так как число вершин дерева G'' не меньше $d(w_{10})$, то число вершин графа G, которые не принадлежат $p(v_1, w)$ не меньше, чем $d(w)$. Следовательно, $d(w)\leq \frac{n}{2}$ и первое утверждение теоремы выполняется.

Выполнение второго утверждения теоремы следует из того, что слово $w_8 \circ w_{10} y \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$ и его длина меньше n.

Пусть $w = w_1 \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4 y$ и $u \prec w_1$. Введем вспомогательные обозначения. Обозначим через w_5 начальный отрезок слова w_1 такой, что $w_5 = u$. Обозначим через w_6 конечный отрезок слова w_1 такой, что $w_1 = w_5 \circ w_6$. Пусть $w_7 = w_6 \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4$. Рассмотрим граф на рис. 8.

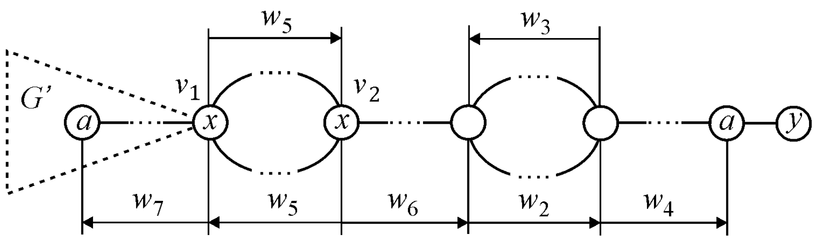

Рисунок 8 – Граф условия теоремы $w = w_1 \circ (w_2 \circ w_3 \circ w_2)^s \circ w_4 y$ и $u \prec w_1$

Здесь G' обозначает неориентированное дерево, ветви которого помечены всеми начальными отрезками слов w_7 и $w_6 \circ (w_3^{-1} \circ w_2^{-1} \circ w_3^{-1})^s \circ w_4$. Так как число вершин дерева G' не меньше $d(w_7)$, то число вершин графа G, которые не принадлежат $p(v_1, w)$ не меньше, чем $d(w)$. Следовательно, $d(w) \le \frac{n}{2}$ и первое утверждение теоремы выполняется.

Выполнение второго утверждения теоремы следует из того, что слово $w_6 \circ (w_2 \circ \circ w_3 \circ w_2) \circ w_4 y \in L_{v_2} \setminus L_{v_1}$ и его длина меньше n.

Доказательство выполнимости утверждений теоремы для случаев, когда $u \prec w_1 \circ w_2$ и $u \prec w_1 \circ w_2 \circ w_4$ аналогично.

Теорема доказана.

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. Высота идентификатора любой вершины произвольного связного приведенного СД-графа не превосходит $\frac{n}{2}$.

Следствие 2. Высота позитивного идентификатора любой вершины произвольного связного приведенного СД-графа не превосходит n.

Выводы

Таким образом, в работе показано, что верхняя оценка длины слова, различающего две вершины СД-графа, равна половине числа его вершин. Показано также, что в языке каждой из любых двух различных вершин есть слово, отличающее одну вершину от другой, и его длина меньше числа вершин графа. При помощи этих результатов получены оценки высоты идентификаторов вершин, что влияет на эффективность алгоритмов самолокализации мобильных агентов в топологических средах (роботов, поисковых программ и т.п.).

Литература

1. Капитонова Ю.В. Математическая теория проектирования вычислительных систем / Ю.В. Капитонова, А.А. Летичевский. – Москва : Наука, 1988. – 296 с.
2. Dudek G. Computational Principles of Mobile Robotics / G. Dudek, M. Jenkin. – Cambridge University Press, Cambridge, 2000. – 280 p.
3. Peled Doron A. Software Reliability Methods / Peled Doron A. – Springer-Verlag, 2001. – 331 p.
4. Kohavi Z. Switching and finite automata theory / Z. Kohavi, N. Jha. – Cambridge University Press, 2010. – 617 p.
5. Сапунов С.В. Определение положения робота в топологической среде / С.В. Сапунов // Искусственный интеллект. – 2008. – № 4. – С. 558-565.
6. Грунский И.С. Идентификация вершин помеченных графов / И.С. Грунский, С.В. Сапунов // Труды ИПММ. – 2010. – Т. 20. – С. 86-97.
7. Хопкрофт Д.Э. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений / Д.Э. Хопкрофт, Р. Мотвани, Д.Д. Ульман. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2002. – 528 с.
8. Грунский И.С. Восстановление графа операционной среды мобильного робота путем разметки вершин, пригодной для дальнейшей навигации / И.С. Грунский, С.В. Сапунов // Искусственный интеллект. – 2012. – № 4. – С. 420-428.

Literatura

1. Kapitonova Yu.V., Letichevsky A.A. Mathematical Theory of Computational Systems Design. – Moscow : Nauka, 1988. – 296 p.
2. Dudek G. Jenkin M. Computational Principles of Mobile Robotics – Cambridge University Press, Cambridge, 2000. – 280 p.
3. Peled Doron A. Software Reliability Methods – Springer. – Verlag, 2001. – 331 p.
4. Kohavi Z., Jha N. Switching and finite automata theory – Cambridge University Press, 2010. – 617 p.
5. Sapunov S.V. Mobile Robot Self Location on Topological Environment // Iskusstvennyj intellekt. – 2008. № 4. – P. 558-565.
6. Grunsky I.S., Sapunov S.V. Identification of vertices of vertex labeled graphs // Trudy IPMM. – 2010. – V. 20. – P. 86-97.
7. Hopcroft J.E., Motwani R., Ullman J.D. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. – Moscow, Williams Publishing, 2002. – 528 p.
8. Grunsky I.S., Sapunov S.V. Reconstruction of the graph of operating environment of mobile robot by vertex-labeling sufficient for further navigation // Iskusstvennyj intellekt. – 2012. № 4. – P. 420-428.

RESUME

S.V. Sapunov, V.Yu. Pilipenko

On Height of Vertex Identifiers of Vertex Labeled Graphs

Labeled graphs are widely used as models of operational environment of mobile agents (robots, programs and so on). One of the main problem of operational environment analysis is agent self location (i.e. distinguishing initial vertex from all other vertices). The problem of vertex distinguishing on vertex labeled graphs is considered. Two vertices are called distinguishable if associated languages over the alphabet of labels are different. A labeled graph is said to be strongly deterministic (or SD-graph) if all vertices in closed neighborhood of every its vertex have different labels. A linear upper bound of vertex distinguishing word length equal to half of the number of all vertices is obtained for SD-graphs. It is shown that at both languages of two different vertices there are distinguishing words and their lengths are less then number of all vertices. Upper bounds of height of finite sets of words over the vertex labels alphabet distinguishing a given vertex from other (i.e. identifiers) are obtained.

Статья поступила в редакцию 26.04.2013.