ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2009

МЕХАНІКА

УДК 621-.318.232.001.2

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Об определении сингуларисных переходных функций нелинейных колебательных систем

Наводиться метод визначення сингуларисних перехідних функцій нелінійних коливальних систем (НКС). Розглядаються НКС з нелінійною пружністю та НКС з нелінійним демпфуванням.

Большинство реально существующих колебательных систем являются нелинейными. Нелинейность этих систем проявляется в диссипативных и восстанавливающих силах, т. е. в силах трения (сопротивления) и упругости (жесткости). В общем случае для нелинейной колебательной системы (НКС) с одной степенью свободы уравнение движения имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + R\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = F(t),$$

где m — масса; x — перемещение; t — время; $R(dx/dt)$, $f(x)$ — нелинейные силы диссипации и упругости соответственно; $F(t)$ — вынуждающая сила.

В частных случаях уравнения НКС с одной степенью свободы следующие:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x) = F(t), \tag{1}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + R\left(\frac{dx}{dt}\right) + cx = F(t). \tag{2}$$

Здесь b, c — коэффициенты диссипации и упругости соответственно.

В (2) нелинейность проявляется в силе упругости, а в (3) — в силе трения (диссипации). Заметим, что решение нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих НКС, осуществляется приближенными методами [1–3]. В этих решениях имеют место задачи по определению переходных функций НКС. Однако сингуларисные переходные функции НКС научной общественности до сих пор были не известны, так как этот факт является прерогативой автора. Существо нахождения сингуларисной переходной функции (СПФ) заключается в решении задачи о переходном процессе в НКС при скачкообразном входном воздействии в форме сингуларисного разложения единичной функции $1(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{при} & t \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} & t < 0 \end{array} \right\}$ в виде [4]

$$
\begin{gathered}
1(t) = 1 - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \sum_{l=1}^{g} U_{as} \cos \omega_s t, \\
U_{a1} = \frac{1}{\pi}, \qquad U_{as} = \frac{U_{a1}}{s}, \qquad s = \frac{\omega_s}{\omega_1}, \qquad \sum_{s=1}^{n} U_{as} = 1,
\end{gathered} \tag{3}
$$

где α — коэффициент затухания.

В данной работе рассмотрим НКС, описываемые уравнениями (1) и (2). Смысл решения будет заключаться в линеаризации этих уравнений и представлении их в виде

$$
m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c_{\text{экв}} x = F(t), \tag{4}
$$

$$
m \frac{d^2 x}{dt^2} + b_{\text{экв}} \frac{dx}{dt} + cx = F(t), \tag{5}
$$

где $c_{\text{экв}}$, $b_{\text{экв}}$ — эквивалентные коэффициенты упругости и диссипации соответственно.

В дальнейшем решение будем проводить последовательно. Вначале для НКС с уравнениями (1), (4), а затем для НКС с нелинейным сопротивлением (уравнения (2), (5)).

Итак, НКС с нелинейной жесткостью. Для нахождения $c_{\text{экв}}$ необходимо представить периодическое решение уравнения (1) с помощью метода гармонического баланса [2] с учетом ограничения первой гармоникой в виде

$$
x(t) = x_0 + x_a \sin(\omega t - \varphi) \tag{6}
$$

(ω — круговая частота дополнительно вводимого гармонического воздействия $F(t) = F_a \sin \omega t$; φ — сдвиг фаз между $F(t)$ и $x(t)$). В соответствии с этим нелинейную упругую силу запишем соотношением

$$
f(x) = f_0 + f_a \sin(\omega t - \varphi), \tag{7}
$$

где

$$
f_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f[x_0 + x_a \sin(\omega t - \varphi)] dt, \tag{8}
$$

$$
f_a = \frac{2}{T} \int_0^T f[x_0 + x_a \sin(\omega t - \varphi)] \sin(\omega t - \varphi) dt. \tag{9}
$$

При подстановке в (1) выражений (6) и (7) получим

$$
-m\omega^2 x_a \sin(\omega t - \varphi) + b\omega \cos(\omega t - \varphi) + f_0 + f_a \sin(\omega t - \varphi) = F_a \sin \omega t. \tag{10}
$$

Из (10) следует, что для периодичности искомого решения $f_0 = 0$, а [5]

$$x_a = \frac{F_a}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4h^2\omega^2}},$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2h\omega}{\omega_0^2-\omega^2}, \qquad h=\frac{b}{2m}. \tag{11}$$

Смещение x_0 определяется из (8) с учетом того, что $f_0 = 0$. Тогда $x_0(x_a)$ является функцией аргумента x_a. При подстановке в $x_0(x_a)$ выражений (9)–(11) получаем соотношения

$$\omega_0^2 = \frac{f_a(x_a)}{mx_a} = \frac{2}{T_0 m x_a}\int\limits_0^T f[x_0(x_a)+x_a\sin(\omega t-\varphi)\sin(\omega t-\varphi)]\,dt. \tag{12}$$

Далее, подставляя (12) в (11), получаем

$$x_a = \frac{F_a}{m\{[\omega^2-\omega_0^2(x_a)]^2+4h^2\omega^2\}^{1/2}}. \tag{13}$$

Выражение (13) отображает амплитудно-частотную характеристику НКС, описываемую уравнением (1) при условии, что $F_a = \mathrm{const}$. Частота, при которой (13) имеет максимум, определяется на основе решения задачи на экстремум, т. е.

$$\frac{d(14)}{d\omega} = \frac{dx_0}{d\omega} = -\frac{F_a}{m}\left\{[\omega^2-\omega_0^2(x_a)]\left[\omega-\omega_0(x_a)\frac{d\omega_0(x_a)}{dx_a}\frac{dx_a}{d\omega}\right]+2h^2\omega\right\}\times$$
$$\times\{[\omega^2-\omega_0^2(x_a)]^2+4h^2\omega^2\}=0,$$

откуда

$$[\omega^2-\omega_0^2(x_a)]\left[\omega-\omega_0(x_a)\frac{d\omega_0(x_a)}{dx_a}\frac{dx_a}{d\omega}\right]+2h^2\omega=0. \tag{14}$$

В уравнении (14) имеется $dx_a/d\omega$, которая в данном решении должна равняться нулю. Тогда (14) приобретает вид $[\omega^2-\omega_0^2(x_a)]+2h^2=0$, из него $\omega=\sqrt{\omega_0^2(x_a)-2h^2}$. При $\omega_0^2(x_a)\gg 2h^2$ максимум (14) будет при $\omega=\omega_0(x_a)$, где $\omega_0(x_a)$ — собственная частота колебаний НКС. С учетом линеаризации данной НКС $\omega_0(x_a)=\sqrt{c_{\text{экв}}/m}$ и тогда $c_{\text{экв}}=m\omega_0^2(x_a)$. Подставляя $c_{\text{экв}}$ в (4), получим уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2(x_a)x=F(t),$$

являющееся в данном решении условно линейным, соответствующим (1).

Далее осуществим линеаризацию уравнения (2). Приближенное решение (2) можно получить методом энергетического баланса [5], заменив нелинейную силу эквивалентной ей линейной, рассеивающей ту же энергию за период T установившегося движения. Это условие записывается в виде

$$\int\limits_0^T R(x)x\,dt = \int\limits_0^T b_{\text{экв}}x^2\,dt. \tag{15}$$

Установившиеся колебания $x(t) = x_a \sin(\omega t - \varphi)$, где $\varphi = \operatorname{arctg}(2h_{\text{экв}}\omega/(\omega_0^2 - \omega^2))$, $h_{\text{экв}} = b_{\text{экв}}/(2m)$. Учитывая, что скорость колебаний dx/dt, а значит и сила сопротивления $R(dx/dt)$ сохраняют знак в течение полупериода $T/2 = \pi/\omega$, запишем (15) в виде

$$\int\limits_0^{\pi/\omega} R(\dot{x})\dot{x}dt = \frac{\pi}{2}x_a^2\omega b_{\text{экв}},$$

откуда

$$b_{\text{экв}} = \frac{2\int\limits_0^{\pi/\omega} R(\dot{x})\dot{x}dt}{\pi\omega x_a^2}, \tag{16}$$

где $\dot{x} = dx/dt$.

Зная из (16) $b_{\text{экв}}$, получим выражение амплитуды нелинейных вынужденных колебаний [6]

$$x_a = \frac{F_a}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 m^2 + [b_{\text{экв}}(x_a)\omega]^2}}.$$

Для амплитуды резонансных колебаний с учетом того, что резонансная частота $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2h^2} < \omega_0$,

$$x_{\text{а рез}} = \frac{2mF_a}{b_{\text{экв}}(x_{\text{а рез}})\sqrt{4mc - b_{\text{экв}}^2(x_{\text{а рез}})}}. \tag{17}$$

Выражение (17) требует выполнения условия $b_{\text{экв}}^2(x_{\text{а рез}}) < 4mc$.

Итак, уравнение (2) линеаризовано в виде уравнения (5) и оба уравнения (1) и (2) приведены к линейному уравнению колебательной системы с одной степенью свободы в классическом виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = F(t). \tag{18}$$

Далее нахождение сингуларисных переходных функций (СПФ) рассматриваемых нелинейных колебательных систем сводится к определению СПФ линейной колебательной системы (КС), описываемой уравнением (18), заменяя для каждой НКС коэффициенты b на $b_{\text{экв}}$ и c на $c_{\text{экв}}$. Дальнейшее решение осуществляется при подстановке в (18) $F(t) = (3)$.

В данном решении применим операционный метод Карсона [7]. В изображениях Карсона (18) имеет вид

$$(\tau^2p^2 + 2\xi\tau p + 1)x(p) = \frac{\alpha}{\alpha + p} + \sum_{s=1}^{n}\frac{U_{as}p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \omega_s^2}, \tag{19}$$

где $\tau^2 = m/c$, $2\xi\tau = b/c$.

Из (19) получаем изображение

$$x(p) = \frac{1}{(\tau^2p^2 + 2\xi\tau p + 1)}\left[\frac{\alpha}{\alpha + p} + \sum_{s=1}^{n}\frac{U_{as}p(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2 + \omega_s^2}\right]. \tag{20}$$

Оригинал, соответствующий (20), и есть СПФ линейной колебательной системы. Для нахождения этого оригинала представим (20) в виде суммы простых дробей, оригиналы которых определим по таблицам [7].

Для краткости запишем окончательный результат вычисления оригинала $x(t) \rightleftarrows x(p) =$ $= (20)$, представляющего СПФ колебательной системы (18)

$$h_{CKC}(t) = \frac{A}{\alpha}(1 - \ell^{-\alpha T}) + \frac{B}{\omega}\ell^{-\xi t/\tau}\sin\omega t + D\tau^2\left[1 - \ell^{-\xi t/\tau}\left(\cos\omega t + \frac{\xi}{\tau\omega}\sin\omega t\right)\right] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} U_{as}\left\{\frac{a_s}{\omega}\ell^{-\xi t/\tau}\sin\omega t + c_s\tau^2\left[1 - \ell^{-\xi t/\tau}\left(\cos\omega t + \frac{\xi}{\tau\omega}\sin\omega t\right)\right] +\right.$$
$$\left. + \frac{b_s}{\omega_s}\ell^{-\alpha t}\sin\omega_s t + \frac{d_s}{\alpha^2 + \omega_s^2}\left[1 - \ell^{-\alpha t}\left(\cos\omega_s t + \frac{\alpha}{\omega_s}\sin\omega_s t\right)\right]\right\}, \tag{21}$$

где

$$A = \frac{-B}{\tau^2}; \qquad D = 1 + \frac{B}{\tau^2\alpha}; \qquad B = \frac{\tau^2\alpha}{2\alpha\tau\xi - \alpha^2 T^2 - 1};$$

$$a_s = -b_s\tau^2; \qquad d_s = -c_s(\alpha^2 + \omega_s^2); \qquad b_s = \frac{1 - c_s[1 - \tau^2(\alpha^2 + \omega_s^2)]}{2\tau(\xi - \alpha\tau)};$$

$$c_s = [2\alpha\tau(\xi - \alpha\tau) + \tau^2(\alpha^2 + \omega_s^2) - 1]\{4\alpha\tau(\xi - \alpha\tau) - [1 - \tau^2(\alpha^2 + \omega_s^2)]^2\}^{-1}.$$

Для нахождения СПФ НКС, описываемых (1) и (2), необходимо использовать формулы $\tau^2 = m/c$, $2\xi\tau = b/c$, в которых для (1) вместо c поставить $c_{\text{экв}}$, а для b — $b_{\text{экв}}$, выведенные ранее ($c_{\text{экв}} = m\omega_0^2(x_a)$, $b_{\text{экв}} = (16)$).

Таким образом, в результате данного решения представлен метод определения СПФ нелинейных колебательных систем на основе приближенной линеаризации НКС линейной. А это значит, что совершенно точного аналитического представления СПФ нелинейных колебательных систем найти затруднительно из-за большой математической громоздкости. Но, в принципе, на наш взгляд, данная задача решаема, особенно при использовании экспериментальных методов. Полученные СПФ дают предварительное представление о переходных процессах в НКС при сингуларисном единичном воздействии на нелинейную колебательную систему.

1. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. – Москва: Наука, 1965. – 560 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974. – 503 с.
3. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. – Москва: Машиностроение, 1970. – 735 с.
4. *Божко А. Е.* Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 81–87.
5. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механический колебаний. – Москва: Наука, 1971. – 239 с.
6. *Божко А. Е., Голуб Н. М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.
7. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 18.02.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On definition of singularisnal transient functions of nonlinear oscillatory systems

A method to determine singularisnal transient functions of nonlinear oscillatory systems is given. The oscillatory systems with nonlinear elasticity and nonlinear damping are considered.