

Член-корреспондент НАН Украины Ю. Г. Стоян, В. Н. Пацук

## Метод покрытия выпуклого многогранного множества минимальным количеством одинаковых шаров

*Задача зводиться до низки задач мінімізації радіуса куль при фіксованій їх кількості. Функція мети являє собою мінімум скінченної кількості опуклих гладких функцій. Показано, що екстремуми досягаються у вершинах багатогранників Вороного, побудованих для центрів куль. Для знаходження екстремумів застосовується метод можливих напрямків у комбінації з випадковим пошуком. Наведено низку чисельних прикладів.*

Пусть имеется компактное многогранное множество  $P \subset \mathbb{R}^3$ , где  $\mathbb{R}^3$  — арифметическое евклидово трехмерное пространство, и конгруэнтные шары  $S_i$  радиуса  $r$  с координатами центров  $u_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Шар  $S_i$ , транспланированный на вектор  $u_i$ , обозначается  $S_i(u_i)$ .

**Определение 1.** Шары  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , покрывают множество  $P$ , если

$$P \cap \left( \bigcup_{i=1}^k S_i(u_i) \right) = P. \quad (1)$$

**Задача 1.** Требуется покрыть множество  $P$  минимальным количеством шаров  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k \leq n$ .

Решение задачи может быть сведено к решению последовательности  $k + 1$  следующих задач.

**Задача 2.** Требуется покрыть множество  $P$  шарами  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , минимального радиуса  $r$ .

Таким образом, если в результате решения задачи 2 выполняется условие (1), а  $P \cap \left( \bigcup_{i=1}^{k+1} S_i(u_i) \right) \neq P$ , то решение задачи (1) равно  $k$ .

Предлагаемая математическая модель задачи 2 является развитием результатов [1] для трехмерного случая.

Пусть шары задаются неравенствами

$$\varphi_i(x, y, z, u_i) = \varphi_i(v, u_i) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - r^2 \leq 0, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Построим функцию

$$\Phi(v, u) = \min\{\varphi_1(v, u_1), \varphi_2(v, u_2), \dots, \varphi_k(v, u_k)\}, \quad (3)$$

где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^{3k}$ , и рассмотрим некоторые ее свойства.

1. Как известно [2–4], функция (3) всюду определена и непрерывна.

2. Поскольку каждая функция  $\varphi_i(v, u_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , не ограничена сверху, ограничена снизу и  $\min \varphi_i(v, u_i) = -r^2$  при  $(v, u_i) \in \mathbb{R}^6$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , то функция  $\Phi(v, u)$  не ограничена сверху, ограничена снизу и  $\min \Phi(x, y, u) = -r^2$  при  $(v, u) \in \mathbb{R}^m$ , где  $m = 3k + 3$ .

3. Для любого фиксированного  $v = v^* \in \mathbb{R}^3$  функция  $\Gamma(u) = \Phi(v^*, u)$  кусочно-гладкая.

4. **Теорема 1.** Для любого фиксированного  $u = u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$  функция  $F(v) = \Phi(v, u^*)$  имеет конечное число локальных максимумов и их число не больше числа вершин многогранников Вороного [5, 6], построенных для точек  $O_i(u_i^*) \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

5. Пусть  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , — многогранники Вороного [6] для точек  $O_i(u_i^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Не уменьшая общности, полагаем, что многогранники  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ , ограничены, многогранники  $V_i$ ,  $i = t + 1, t + 2, \dots, k$ , не ограничены.

Назовем  $V_j \cap P$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , многогранниками Вороного в  $P$ .

**Теорема 2.** На множестве  $P$  функция  $F(v)$  имеет не более  $l = l(v) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$  локальных минимумов, где  $L_1$  — множество вершин многогранников Вороного,  $L_2$  — множество точек пересечения ребер многогранников  $V_j$ ,  $j = t + 1, t + 2, \dots, k$ , и граней множества  $P$ ,  $L_3$  — множество точек пересечения граней многогранников  $V_j$ ,  $j = t + 1, t + 2, \dots, k$ , и ребер множества  $P$ ,  $L_4$  — множество вершин множества  $P$ ,  $l_\mu = \text{card}L_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ .

$$6. \max_{v \in P} F(v) = \max_{v \in L} F(v).$$

7. Каждая точка  $(v^*, \gamma^*) \in \mathbb{R}^4$ , где  $v^* \in L_1$ ,  $\gamma^* = F(v^*)$ , является одним из решений системы

$$\begin{cases} (x - x_{i_1}^*)^2 + (y - y_{i_1}^*)^2 + (z - z_{i_1}^*)^2 - r^2 - \gamma = 0, \\ (x - x_{i_2}^*)^2 + (y - y_{i_2}^*)^2 + (z - z_{i_2}^*)^2 - r^2 - \gamma = 0, \\ (x - x_{i_3}^*)^2 + (y - y_{i_3}^*)^2 + (z - z_{i_3}^*)^2 - r^2 - \gamma = 0, \\ (x - x_{i_4}^*)^2 + (y - y_{i_4}^*)^2 + (z - z_{i_4}^*)^2 - r^2 - \gamma = 0 \end{cases} \quad (4)$$

относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\gamma$ .

8. **Теорема 3.** Если точка  $v^* \in \text{int} H(u_{i_1}^*, u_{i_2}^*, u_{i_3}^*, u_{i_4}^*)$ ,  $v^* \in L_1$ , где  $H(u_{i_1}^*, u_{i_2}^*, u_{i_3}^*, u_{i_4}^*)$  — выпуклая оболочка точек  $u_{i_1}^*, u_{i_2}^*, u_{i_3}^*, u_{i_4}^* \in \mathbb{R}^3$ , то в точке  $v^*$  достигается локальный максимум функции  $F(v)$ . Если точка  $v^* \notin \text{int} H(u_{i_1}^*, u_{i_2}^*, u_{i_3}^*, u_{i_4}^*)$ , то в точке  $v^*$  локальный максимум функции  $F(v)$  не достигается.

9. Если  $\max F(v) = \alpha > 0$  при условии  $v \in L$ , то шары  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , не покрывают множество  $P$ , и чем больше  $\alpha$ , тем меньше покрытая часть множества  $P$ .

10. Если  $\max F(v) \leq 0$  при условии  $v \in L$ , то шары  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , покрывают множество  $P$ .

Свойства функции  $\Phi(v, u)$  позволяют представить математическую модель задачи (2) в виде

$$\min_{u \in G} \max_{v \in P} \Phi(v, u) = \alpha^*, \quad (5)$$

где  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ ,  $G_1 = G_2 = \dots = G_k = W$ ,  $W = P \oplus S_\varepsilon$ ,  $\oplus$  — знак операции суммы Минковского [7],  $S_\varepsilon$  — шар радиуса  $r - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

**Свойства математической модели.**

(i) Значение  $\alpha^*$  достигается по меньшей мере в  $k!$  различных точках. Действительно, пусть  $\min_{u \in G} \max_{v \in P} \Phi(v, u) = \Phi(v^*, u^*) = \alpha^*$  и  $u_i^* \neq u_j^*$  для  $i \neq j$ . Используя точку  $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*)$ , можно построить точку  $u^{*1} = (u_1^{*1}, u_2^{*1}, \dots, u_k^{*1})$ , где  $u_1^{*1} = u_2^*$ ,  $u_2^{*1} = u_1^*$ ,  $u_{2+i}^{*1} = u_{2+i}^*$ ,  $i = 3, 4, \dots, k$ . Поскольку радиусы шаров  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , одинаковы, то  $\Phi(v^*, u^*) = \Phi(v^*, u^{*1}) = \alpha^*$ . Различных точек такого вида  $k!$ . Т.е. перестановка компонент вектора  $u^*$  дает новый вектор с тем же значением функции цели.

(ii) Одинаковое значение  $\alpha^*$  может достигаться в разных точках  $v \in P$ .

Пример 1. Пусть  $P$  — параллелепипед  $P = \{v \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x \leq 2r, 0 \leq y \leq 2r, 0 \leq z \leq 4r\}$  и  $u = (u_1, u_2)$ ,  $u_1^* = (r, r, r)$ ,  $u_2^* = (r, r, 3r)$ . Легко видеть, что  $\min_{u \in G} \max_{v \in P} \Phi(v, u) = \Phi(v^*, u^*) = \alpha^* = 3r^2$ .

При этом значение  $\alpha^*$  достигается во всех вершинах параллелепипеда  $R$ .

(iii) Задача 2 может иметь несколько различных точек локального минимакса  $(v^{*i}, u^{*i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, \nu$ , таких, что  $\alpha^{*i} \neq \alpha^{*j}$  для  $i \neq j$ , где  $\alpha^{*i} = \Phi(v^{*i}, u^{*i})$ . В общем случае может существовать непрерывное семейство локальных минималей.

(iv) Допустимая область  $G$  такова, что любой вектор  $u \in G$  гарантирует участие всех шаров  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , в покрытии множества  $P$ .

Для решения задачи 1 прежде всего необходимо решить задачу 2 для некоторого  $k$ . В результате решения найдется вектор  $u = u^*$ . Если  $\max_v \Phi(v, u^*) \leq 0$ , решение найдено, иначе увеличиваем  $k$  (или делаем еще одну попытку).

Свойства задачи 2, включая свойства функции  $\Phi(v, u)$ , приводят к следующей стратегии решения.

Шаг 1. Полагаем  $s = 0$ . Значения вектора  $u = u^s = (u_1^s, u_2^s, \dots, u_k^s) \in G$  генерируются случайным или иным образом так, что  $u_i^s \neq u_j^s$  для  $i \neq j$ .

Шаг 2. Для точек  $u_i^s \in W \subset \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , строим многогранники Вороного в пространстве  $\mathbb{R}^3$  и формируем множество  $L^s = L(u^s)$ .

Шаг 3. Вычисляем  $r_s = \max_{v \in L} F(v)$ . Если  $r_s = 0$ , то задача решена.

Шаг 4. В противном случае пусть  $Q^s$  — множество пар  $(l, i)$  таких, что  $v_l^s$  — одна из вершин многогранника Вороного в области  $P$ , построенного для точки  $O_i^s = O(u_i^s)$  и

$$\max_{v \in P} \Phi(v, u^s) - \varphi(v_l^s, u^s) = \delta_{li} \leq \delta, \quad l \in L^s, \quad (6)$$

где  $\delta$  выбирается из соображений увеличения скорости сходимости. Можно представить  $Q^s = Q_1^s \cup Q_2^s \cup Q_3^s \cup Q_4^s$ , где

$$Q_\tau^s = \{q = (l, i) \in Q^s \mid l \in L_\tau^s, \tau = 1, 2, 3, 4\}. \quad (7)$$

Пусть грани области  $P$  задаются уравнениями

$$\chi_\lambda(x, y, z) = a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda z + d_\lambda = 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, \Lambda. \quad (8)$$

Пусть  $V^s = v_1^s, v_2^s, \dots, v_{T^s}^s = \{v_l^s \in L^s \text{ такое, что существует } i \text{ такое, что } (l, i) \in Q^s\}$  и  $M_\mu^s$  — проекции  $Q_\mu^s$  на  $L^s$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ , т.е.  $l \in M_\mu^s$ , если  $(l, i) \in Q^s$  и  $l \in L_\mu^s$ . Полагаем

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4.$$

Пусть  $J^s = \{j \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ такое, что существует } (t, j) \in Q\}$ . Перенумеруем  $v_i^s$  для простоты, начиная с индексов из  $L_1^s$ , затем  $L_2^s$  и т.д. Введем функцию  $\Psi(v_1, v_2, \dots, v_q, u) = \max_{(j, i) \in J} \varphi_i(v_j, u_i)$  при условии, что  $u_i$  удовлетворяют соответствующим условиям (8): одному при  $u_i \in L_2$ , двум при  $u_i \in L_3$ .  $v_i = \text{const}$  при  $v_i \in L_4$ , поэтому  $\varphi_i(v_j, u_i) = \varphi_i^*(v_j)$ . Положим, что  $v_1, v_2, \dots, v_{T^s}$  — независимые переменные. Тогда по построению многоугольников Вороного в невырожденном случае (т.е. когда вершине многогранника Вороного инцидентны четыре других вершины и расстояние до инцидентных вершин превышает вычислительную погрешность) в некоторой окрестности точки  $u = u^s$  имеем  $\min_{(v_1, v_2, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^q} \Psi(v_1, v_2, \dots, v_q, u) = \max_{v \in P} \Phi(v, u)$ .

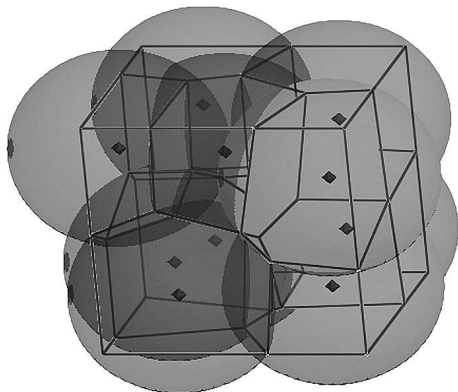


Рис. 1. Покрывание куба 10 шарами

Таким образом, нахождение локального минимума задачи 2 можно свести к последовательному поиску  $\min_{(v_1, v_2, \dots, v_q, u) \in \mathbb{R}^{q+k}} \Psi(v_1, v_2, \dots, v_q, u)$ . Для решения этой задачи применяется модификация метода возможных направлений [8].

Шаг 5. Находим  $Q_s = Q(u^s)$  из (6), (7).

Шаг 6. Пусть  $\zeta = (\xi, \eta) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{T^s}, \eta_{T^s+1}, \eta_{T^s+2}, \dots, \eta_{T^s+\text{card}J^s})$  — вектор возможных направлений;  $\chi_{p_1(t)}(v_t^s) = 0$  — уравнение, определяющее грань  $P$ , на которой лежит  $v_t^s$  в случае  $t \in L_2^s$ ,  $\chi_{p_1(t)}(v_t^s) = 0$ ,  $\chi_{p_2(t)}(v_t^s) = 0$  — уравнения, определяющие ребро области  $P$ , на которой лежит  $v_t^s$  в случае  $t \in L_3^s$ .

Решаем задачу линейного программирования

$$\min_{\varkappa \in \mathbb{R}^1} \varkappa \tag{9}$$

при условии

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla \varphi_{tj}(v_t^s, u_j^s), \zeta) \leq \varkappa, & (t, j) \in Q_1^s \cup Q_2^s \cup Q_3^s, \\ (\nabla \varphi_t^*(u_j^s), \eta) \leq \varkappa, & (t, j) \in Q_4^s, \\ \chi_{p_1(t)}(v_t^s + \xi_t) = 0, & t \in M_2^s \cup M_3^s, \\ \chi_{p_2(t)}(v_t^s + \xi_t) = 0, & t \in M_3^s, \\ -1 \leq \zeta_i \leq 1, & i = 1, 2, \dots, \text{card}(M^s) + \text{card}(J^s). \end{array} \right. \tag{10}$$

Таблица 1

Количество шаров	Радиус
1	0,866039764304762
2	0,750002614895996
3	0,709865727467255
4	0,612372997325949
5	0,590845025200821
6	0,563243394708008
7	0,544744800066187
8	0,433035862747464
9	0,417171214922348
10	0,409395789425591

Если в результате решения задачи получаем  $\kappa \leq 0$ , то точка  $u$  стационарна, т.е. это может быть точка локального минимума, нестрогого локального минимума или седловая точка.

Пример 2. Имеется множество одинаковых  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и куб  $P = \{v \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ . Необходимо определить минимальный радиус  $r$   $k$  покрывающих шаров  $S_i$  и вектора  $u = (u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^{3k}$ , обеспечивающие покрытие множества  $P$ ,  $k = 1, 2, \dots, 10$ . Результаты расчета локально оптимального покрытия для 10 шаров приведены на рис. 1. Зависимость радиуса шара наилучшего из полученных локально оптимальных покрытий от количества шаров приведены в табл. 1.

1. Стоян Ю. Г., Пацук В. Н. Покрытие многоугольной области минимальным количеством одинаковых кругов заданного радиуса // Доп. НАН України. – 2006. – № 3. – С. 74–77.
2. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техніка, 1967. – 212 с.
3. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. – Киев: Наук. думка, 1974. – 259 с.
4. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. Voronoi G. F. Recherches sur les paralléloèdres primitifs // J. reine und angew. Math. – 1908. – **134**. – С. 198–287.
6. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т. 2. – С. 171–368.
7. Minkowski H. Dichteste gitterförmige Lagerung // Nachr. Ges. Wiss. – Göttingen, 1904. – P. 311–355.
8. Zoutendijk G. Methods of feasible directions: a study in linear and nonlinear programming. – Amsterdam: Elsevier, 1960. – 126 p.

*Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

*Поступило в редакцию 11.09.2008*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, V. N. Patsuk**

### **A method of covering a convex polyhedral region by a minimal number of congruent spheres**

*The problem is reduced to a sequence of sphere radius minimization problems when fixing the number of spheres. The objective function is the minimum of a finite number of convex smooth functions. It is shown that the extrema are reached at the vertices of the Voronoi polyhedra constructed for the centers of the spheres. The method of feasible directions in combination with a random search is applied for searching the extrema. A number of numerical examples is given.*