УДК 517.51

К.Г. ДЗЮБЕНКО

ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ И СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ

В пространстве функций ограниченной второй вариации доказаны утверждения о сходимости и вычислении вариаций, введены нормы и скалярное произведение.

Метризация сходимости является важнейшим аспектом построения алгоритмов решения уравнений, обеспечения сходимости процедур оптимизации. На основе исследования второй вариации функций я введу новые нормы для определенного класса функций без разрывов второго рода, позволяющие преодолевать существующие трудности.

Обозначим N и R множества всех натуральных и действительных чисел. Пусть $a,b\in R$, $a<b$. Для любого $n\in N$

$$T_n=\{a=t_{n0}<t_{n1}<...<t_{nn}=b\} \qquad (1)$$

– разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей, $d(T_n)=\max_{k=\overline{0,n-1}}(t_{n,k+1}-t_{nk})$ – диаметр разбиения T_n. Рассмотрим $f:[a,b]\to R$. Первая вариация функции f на $[a,b]$

$$V^{[a,b]}(f)=\sup_{T_n,n\in N}\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta f(t_{nk})|$$

($\Delta f(t_{nk})=f(t_{n,k+1})-f(t_{nk})$, $k=\overline{0,n-1}$; супрепремум по всем T_n вида (1)). Вторая вариация функции f на разбиении T_n

$$V_2(f,T_n)=\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta f(t_{nk}))^2.$$

Вторая вариация функции f на $[a,b]$

$$V_2^{[a,b]}(f)=\overline{\lim}_{d(T_n)\to 0}V_2(f,T_n)$$

(супремум частных пределов по всем последовательностям разбиений T_n вида (1) с $d(T_n)\to 0$, $n\to\infty$). Вторая вариация функции f на (a,b)

$$V_2^{(a,b)}(f)=\overline{\lim}_{d(T_n)\to 0}\sum_{k=1}^{n-2}(\Delta f(t_{nk}))^2 .$$

Допускаются вариации равные $+\infty$.

Будем обозначать $C[a,b]$ – множество всех непрерывных функций на $[a,b]$, $V_2[a,b]$ – множество всех функций конечной второй вариации на $[a,b]$, $PS_0[a,b]$ – множество всех кусочно-постоянных функций на $[a,b]$ с конечным числом разрывов, $PL_0[a,b]$ – множество всех кусочно-линейных функций на $[a,b]$ с конечным числом интервалов линейности, $D[a,b]$ – множество всех функций без разрывов второго рода на $[a,b]$ (существуют конечные односторонние пределы $f(t-)$ и $f(t+)$ во всех $t\in[a,b]$; $f(a-)=f(a)$, $f(b+)=f(b)$), $D^+[a,b]$ – *м*ножество всех непрерывных справа функций без разрывов второго рода на $[a,b]$ (иногда именно его обозначают $D[a,b]$). Также $PV_2^+[a,b]=PV_2[a,b]\bigcap D^+[a,b]$, $PL_0^+[a,b]=PL_0[a,b]\bigcap D^+[a,b]$. $Z(f)$ – множество всех точек разрыва функции f. Левый (правый) скачок функции f в точке $t_0\in[a,b]$ $\Delta f(t_0-)=f(t_0)-f(t_0-)$ ($\Delta f(t_0+)=f(t_0+)-f(t_0)$). Вариация функции f в точке $t_0\in[a,b]$ $V_2^{\{t_0\}}(f)=\max\{(\Delta f(t_0-))^2+(\Delta f(t_0+))^2,$ $(f(t_0+)-f(t_0-))^2\}$. В случае $f(t_0)=f(t_0+)$ выполнено $V_2^{\{t_0\}}(f)=(\Delta f(t_0-))^2$. Для ограниченной функции f равномерная норма $\| f\|_0=\sup_{t\in[a,b]}| f(t)|$. Индикатор множества A $I_A(x)$ равен 1 для $x\in A$, 0 для $x\notin A$. В статье интеграл функции рассматривается в классическом смысле (интеграл по Риману). По поводу других понятий см. [1, 2].

В $D[a,b]$ заданы равномерная норма, L_p-нормы. Анатолий Владимирович Скороход построил топологии сходимости в $\{x(\cdot)\in D+[a,b]: x(b-)=x(b)\}$ более слабые, чем топология равномерной сходимости (см. [3]). Такова топология метрики $\rho(x,y)=\inf_{\lambda(\cdot)\in\Lambda}\left(\sup_{t\in[a,b]}|x(t)-y(\lambda(t))|+\sup_{t\in[a,b]}|t-\lambda(t)|\right)$, где Λ – множество всех непрерывных строго возрастающих функций $\lambda:[a,b]\to R$ с $\lambda(a)=a$, $\lambda(b)=b$. Для этой ρ нет нормы $\|\cdot\|$ такой, что $\rho(x,y)\equiv\| x-y\|$.

Утверждения следующей леммы более или менее известны (см. [4], с. 154). Я приведу свои доказательства для дальнейшего использования.

Лемма. Пусть $a<b$, $f\in D[a,b]$. Тогда верны утверждения. 1. f ограничена. 2. $\forall\varepsilon>0$ $\exists e_\varepsilon\in PS_0[a,b]$: $\| f-e_\varepsilon\|_0<\varepsilon$. 3. $Z(f)$ не более чем счетно. 4. $\int_a^b | f(t)|^p\,dt<+\infty$, $p\in N$.

Доказательство. 1. Пусть f не ограничена. Существует $\{t_n\}\subset[a,b]$: $|f(t_n)|>n$, $n\in N$. Для ограниченной $\{t_n\}$ существует $\{n(k),k\in N\}\subset N$: $t_{n(k)}\uparrow t_0\in(a,b]$ или $t_{n(k)}\downarrow t_0\in[a,b)$, и не существует конечный $f(t_0-)$ или

$f(t_0+)$. 2. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого $t \in [a,b]$ существует $\delta(t) > 0$, такое, что $\left| f(s) - f(t-) \right| < 0.5\varepsilon$, $s \in (t-\delta(t),t) \bigcap [a,b]$ и $\left| f(t+) - f(s) \right| < 0.5\varepsilon$, $s \in (t, t+\delta(t)) \bigcap [a,b]$. Тогда $\left| f(t_1) - f(t_2) \right| < \varepsilon$ выполнено для всех $t_1, t_2 \in (t-\delta(t),t) \bigcap [a,b]$ и для всех $t_1, t_2 \in (t, t+\delta(t)) \bigcap [a,b]$. У открытого покрытия $(t-\delta(t), t+\delta(t))$, $t \in [a,b]$ отрезка $[a,b]$ существует конечное подпокрытие ([1], с. 98). Оно соответствует точкам $\{ a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \}$, где $n \in N$. Выберем $s_k \in (t_k, t_k + \delta(t_k)) \bigcap (t_{k+1} - \delta(t_{k+1}), t_{k+1}) \neq \varnothing$, $k = \overline{0, n-1}$. Для функции $e_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k) I_{(t_k, t_{k+1})}(t) + \sum_{k=0}^{n} f(t_k) I_{\{t_k\}}(t)$, $t \in [a,b]$, из $PS_0[a,b]$ верно утверждение 1. 3.

При каждом $m \in N$ $Z_m(f) = \{ z \in [a,b] : \max\left\{ \left| \Delta f(z-) \right|, \left| \Delta f(z+) \right| \right\} \geq m^{-1} \}$ принадлежит конечному $Z(e_{0.5m^{-1}})$. Иначе например, $\left| \Delta f(z-) \right| \leq \left| f(z) - e_{0.5m^{-1}}(z) \right| + \lim\limits_{t \to z-} \left| e_{0.5m^{-1}}(z) - f(t) \right| < m^{-1}$. $Z(f) = \bigcup_{m \in N} Z_m$ не более чем счетно. 4. Интегрируемость ограниченной функции на $[a,b]$ равносильна ее непрерывности почти всюду (теорема Лебега, [2], с. 125). Счетное множество $Z(\left| f(\cdot) \right|^p)$ имеет меру Лебега ноль.

Будут применяться неравенства $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2}$,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2}, \ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$$

для $a_k, b_k \in R$, $k = \overline{1,n}$, $n \in N$ ([1], с. 49). Будем писать $V_2(\cdot)$ вместо $V_2^{[a,b]}(\cdot)$ там, где это не вызывает недоразумений.

Теорема 1. Пусть $a < b$. Выполнены следующие утверждения:

1) $V_2[a,b] \subset D[a,b]$;

2) $\sqrt{V_2^{[a,b]}(f)} \leq V^{[a,b]}(f)$ для любой $f : [a,b] \to R$;

3) $V_2^{[a,b]}(\alpha f) = \alpha^2 V_2^{[a,b]}(f)$, $\alpha \in R$, $f \in V_2[a,b]$;

4) $\sqrt{V_2^{[a,b]}(f+g)} \leq \sqrt{V_2^{[a,b]}(f)} + \sqrt{V_2^{[a,b]}(g)}$, $f, g \in V_2[a,b]$;

5) $V_2^{[a,b]}(f) = \sum_{z \in Z(f)} V_2^{\{z\}}(f)$, $f \in PL_0[a,b]$.

Доказательство. 1) пусть $f \in V_2[a,b]$. Для каждого $t_0 \in (a,b]$ $f(t_0-) \notin \{-\infty, +\infty\}$ доказывается аналогично ограниченности в лемме: $(f(t_{n(k)}) - f(t_0))^2 \to +\infty$ противоречит конечности $V_2(f)$. Пусть $f(t_0-)$

не существует. Найдутся $\varepsilon > 0$ и последовательность $s_m \uparrow t_0$, такая, что $|f(s_{2k-1}) - f(s_{2k})| > \varepsilon$, $k \in N$. При каждом $l \in N$ $2l+1$ элементов из $\{s_m\}$ могут быть выбраны в качестве последовательных точек разбиения T_n с как угодно малым $d(T_n)$. Тогда $V_2(f) \ge l\varepsilon^2$, $l \in N$, что противоречит конечности $V_2(f)$. Поэтому $f(t_0-)$ конечен. Случай $f(t_0+)$ аналогичен; 2) $\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta f(t_{nk}))^2} \le \sum_{k=0}^{n-1}|\Delta f(t_{nk})|$ для всех T_n вида (1) влечет неравенство с $\overline{\lim}_{d(T_n)\to 0}$ слева и $\sup_{T_n, n\in N}$ справа; 3) следует из $V_2(\alpha f, T_n) = \alpha^2 V_2(f, T_n)$ для всех $\alpha \in R$ и T_n вида (1); 4) для всех $f, g \in V_2[a,b]$ и T_n вида (1)

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}((\Delta f(t_{nk}) + \Delta g(t_{nk}))^2} \le \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta f(t_{nk})^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta g(t_{nk}))^2} .$$

Далее $\overline{\lim}_{d(T_n)\to 0}$ с учетом $\overline{\lim}(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$; 5) для $f(t) \equiv ct + d$ ($c, d \in R$):

$$V_2(f, T_n) = \sum_{k=0}^{n-1}(c\,\Delta t_{nk})^2 \le c^2 d(T_n) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_{nk} = c^2 d(T_n)(b-a) \to 0 ,$$

$d(T_n) \to 0$. Для $f \in PL_0[a,b]$ $Z(f) = \{z_j, j = \overline{1, j_0}\}$ ($j_0 \in N$). Положим $z_0 = a$, $z_{j_0+1} = b$. Тогда пределом для $V_2^{[a,b]}(f, T_n)$ при $d(T_n) \to 0$ верны равенства

$$V_2^{[a,b]}(f) = \sum_{j=0}^{j_0+1} V_2^{\{z_j\}}(f) + \sum_{j=0}^{j_0} V_2^{(z_j, z_{j+1})}(f) = \sum_{z\in Z(f)} V_2^{\{z\}}(f) .$$

Теорема 2. Пусть $a < b$, $f:[a,b] \to R$, $f_m \in V_2[a,b]$, $m \in N$, и выполнены условия: 1) $\| f - f_m \|_0 \to 0$, $m \to \infty$; 2) $V_2^{[a,b]}(f_l - f_m) \to 0$, $l, m \to \infty$. Тогда верны утверждения:

1) $V_2^{[a,b]}(f - f_m) \to 0$, $m \to \infty$;

2) $V_2^{[a,b]}(f) = \lim_{m\to\infty} V_2^{[a,b]}(f_m) < +\infty$.

Доказательство. 1) пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Существует $l_0 \in N$ такое, что $V_2(f_l - f_m) < \varepsilon$, $l, m \ge l_0$ (l_0 можно выбрать как угодно большим). Найдется строго возрастающая $\{l(n), n \in N\} \subset N$: $\sup_{t\in[a,b]} | f(t) - f_{l(n)}(t) | < \varepsilon / 2\sqrt{n}$, $n \in N$. Тогда для всех $n \in N$ и всех T_n вида (1)

$$V_2(f - f_{l(n)}, T_n) \le n \max_{k=\overline{0,n-1}}((f - f_{l(n)})(t_{n,k+1}) - (f - f_{l(n)})(t_{nk}))^2 \le$$

$$\le 2n \max_{k=\overline{0,n}}[((f - f_{l(n)})(t_{nk}))^2 + ((f - f_{l(n)})(t_{n,k+1}))^2] < \varepsilon^2 .$$

Пусть $n \in N$ фиксировано. Найдется натуральное $l_1(n) \ge l(n)$, такое, что $V_2(f_{l_1(n)} - f_{l_0}, T_n) < \varepsilon^2$ для всех T_n вида (1) (аналогично рассуждению для $V_2(f - f_{l(n)}, T_n)$). Для всех таких T_n выполнены соотношения

$$\sqrt{V_2(f - f_m, T_n)} \le \sqrt{V_2(f - f_{l_1(n)}, T_n)} + \sqrt{V_2(f_{l_1(n)} - f_{l_0}, T_n)} +$$
$$+ \sqrt{V_2(f_{l_0} - f_m, T_n)} \le \varepsilon + \varepsilon + \sqrt{V_2(f_{l_0} - f_m, T_n)}, \ m \in N;$$
$$\sqrt{V_2(f - f_m)} = \overline{\lim}_{\,d(T_n)\to 0} \sqrt{V_2(f - f_m, T_n)} \le 2\varepsilon +$$
$$+ \overline{\lim}_{\,d(T_n)\to 0} \sqrt{V_2(f_{l_0} - f_m, T_n)} == 2\varepsilon + V_2(f_{l_0} - f_m) < 3\varepsilon, \ m \ge l_0$$

($d(T_n) \to 0$ влечет $n \ge (b-a)/d(T_n) \to \infty$). Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ верно утверждение 1; 2) $\sqrt{V_2(f_l)} - \sqrt{V_2(f_m - f_l)} \le \sqrt{V_2(f_m)} \le \sqrt{V_2(f_l)} + \sqrt{V_2(f_m - f_l)}$, $m, l \in N$, откуда $\left| \sqrt{V_2(f_m)} - \sqrt{V_2(f_l)} \right| \le \sqrt{V_2(f_m - f_l)}$. Предел по $m, l \to \infty$ влечет фундаментальность $\sqrt{V_2(f_m)}$. Поэтому конечны пределы для $\sqrt{V_2(f_m)}$ и $V_2(f_m)$. Верны $\sqrt{V_2(f_m)} - \sqrt{V_2(f - f_m)} \le \sqrt{V_2(f)} \le \sqrt{V_2(f_m)} + \sqrt{V_2(f - f_m)}$, $m \in N$. Поэтому $\sqrt{V_2(f_m)} \to \sqrt{V_2(f)}$, $V_2(f_m) \to V_2(f)$, $m \to \infty$.

Пример 1. Пусть $x_n(t) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} n^{-1} I_{[2k\cdot 2^{-n}, (2k+1)2^{-n})}(t)$, $t \in [0,1]$, $n \in N$. $\| x_n(t) \|_0 \to 0$, однако $V_2^{[0,1]}(x_n) = (2^n - 1) n^{-2} \to +\infty$, $n \to \infty$.

Теорема 3. Пусть $a < b$. Тогда верны такие утверждения:

1) $f \in C[a,b] \Leftrightarrow V_2^{[a,b]}(f) = 0$;

2) $f \in V_2[a,b] \Rightarrow V_2^{[a,b]}(f) = \sum_{z \in Z(f)} V_2^{\{z\}}(f)$;

3) $f \in V_2^{+}[a,b] \Rightarrow V_2^{[a,b]}(f) = \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta f(z_j -))^2 = \lim_{d(T_n)\to 0} V_2(f, T_n)$.

Доказательство. 1) достаточность. По теореме 1 $f \in D[a,b]$. Если, например, $f(t_0 -) \ne f(t_0)$ для $t_0 \in (a,b]$, то $V_2(f) \ge \lim_{n\to\infty} (f(t_0) - f(t_0 - n^{-1}))^2 > 0$. Необходимость. Для $f \in C[a,b]$ найдутся $f_m \in PL_0[a,b] \cap C[a,b]$, $m \in N$: $\| f - f_m \|_0 \to 0$. Верно $V_2(f_l - f_m) \equiv 0$. По теореме 2 $V_2(f) = \lim_{m\to\infty} V_2(f_m) = 0$; 2) рассмотрим лишь нетривиальный случай, когда $Z(f)$ бесконечно. Занумеруем $Z(f)$ по убыванию абсолютных величин скачков $\Delta f(z_j -)$, $j \in N$ (если величины одинаковы, то эту конечную совокупность $z \in Z(f)$ нумеруем справа налево). Понятно, что $\sum_{j=1}^{m} V_2^{\{z\}}(f) \le V_2(f)$, $m \in N$, откуда $\sum_{j=1}^{\infty} V_2^{\{z\}}(f) < +\infty$. Построим $h_m \in PL_0^{+}[a,b]$, $m \in N$, так, что $h_m(z_j -) = f(z_j -)$, $h_m(z_j) = f(z_j)$,

$h_m(z_j+) = f(z_j+)$, $j = \overline{1,m}$, и h_m непрерывны на $[a,b] \setminus \{z_j, j = \overline{1,m}\}$. Там используем t_k из доказательства пункта 2 леммы для $\varepsilon = \max_{j \ge m+1} \sqrt{V_2^{\{z\}}(f)}$, выбирая концы отрезков графика h_m в точках $(t_k, f(t_k))$ и $(s_k, f(s_k))$, $(s_k, f(s_k))$ и $(t_{k+1}, f(t_{k+1}))$. Тогда $\| f - h_m \|_0 \le 2 \max_{j \ge m+1} \sqrt{V_2^{\{z\}}(f)} \to 0$ и $V_2(h_l - h_m) = \sum_{j=m+1}^{l} V_2^{\{z\}}(f) \to 0$, $l, m \to \infty$ (обе сходимости следуют из $\sum_{j=1}^{\infty} V_2^{\{z\}}(f) < +\infty$). По теореме 2 $V_2(f) = \lim_{m\to\infty} V_2(h_m) = \sum_{j=1}^{\infty} (\Delta f(z_j-))^2$;

3) пусть $f \in V_2^+[a,b]$. Рассмотрим произвольные $m \in N$ и T_n, $n \in N$, вида (1) с $d(T_n) \to 0$, $n \to \infty$. Для каждого $n \in N$ найдутся $k(n,j) \in \{0, ..., n-1\}$, $j \in \{1, ..., m\}$, такие, что: $z_j \in [t_{n,k(n,j)}, t_{n,k(n,j)+1})$, $j \in \{1, ..., m\}$. Для всех $n \in N$, кроме конечного числа, выполнено неравенство $\sum_{j=1}^{m-1} (f(t_{n,k(n,j+1)}) - f(t_{n,k(n,j)}))^2 \le V_2(f, T_n)$ (верно, когда z_j попадают в разные интервалы, созданные разбиением). Нижний предел при $n \to \infty$: $\sum_{j=1}^{m} (\Delta f(z_j-))^2 \le \underline{\lim}_{n\to\infty} V_2(f, T_n)$. Ввиду произвольности $m \in N$ и T_n, $n \in N$: $\sum_{j=1}^{\infty} (\Delta f(z_j-))^2 \le \underline{\lim}_{d(T_n)\to 0} V_2(f, T_n)$. Согласно утверждению 2 в левой части стоит $\overline{\lim}_{d(T_n)\to 0} V_2(f, T_n)$, и утверждение 3 верно.

Определим новые нормы в $V_2[a,b]$: $\| x \|_1 = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt + V_2^{[a,b]}(x)}$, $\| x \|_2 = \sup_{t\in[a,b]} | x(t) | + \sqrt{V_2^{[a,b]}(x)}$, $x \in V_2[a,b]$. Также введем взаимную вариацию функций $x, y \in V_2^+[a,b]$: $V_2^{[a,b]}(x,y) = \sum_{z \in Z(x) \cap Z(y)} \Delta x(z-) \Delta y(z-)$. Корректность определения следует из неравенств

$$\sum_{z \in Z(x) \cap Z(y)} | \Delta x(z-) \Delta y(z-) | \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{z \in Z(x) \cap Z(y)} (\Delta x(z-))^2} \sqrt{\sum_{z \in Z(x) \cap Z(y)} (\Delta y(z-))^2} \le \sqrt{V_2(x)} \sqrt{V_2(y)} < +\infty .$$

Теорема 4. Пусть $a < b$. Тогда выполнены утверждения.

1) $(V_2[a,b], \| \cdot \|_1)$ – линейное нормированное пространство;

2) $(V_2[a,b], \| \cdot \|_2)$ – полное линейное нормированное пространство;

3) норма $\| \cdot \|_1$ слабее нормы $\| \cdot \|_2$;

4) $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ – линейное подпространство в $(V_2[a,b],\|\cdot\|_1)$;

5) $(x,y)_1 = \int_a^b x(t)y(t)dt + V_2^{[a,b]}(x,y)$ – скалярное произведение в $V_2^+[a,b]$.

Доказательство. 1) пусть $x,y \in V_2[a,b]$. $\int_a^b x^2(t)\,dt$ конечен по теореме 1. $\|x\|_1 \geq 0$. $\|x\|_1 = 0$ влечет $\int_a^b x^2(t)\,dt = 0$, $V_2^{[a,b]}(x) = 0$. $x \in C[a,b]$ по теореме 3 и из $\int_a^b x^2(t)\,dt = 0$ следует $x(t) \equiv 0$. $\|\alpha x\|_1 = |\alpha|\|x\|_1 < +\infty$, $\alpha \in R$, из теоремы 1. Из $\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}} + \sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}$, $a_1,a_2,b_1,b_2 \in R$, легко следует $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_{...1} + \|y\|_1 < +\infty$; 2) выполнение аксиом нормы очевидно. Если $\{x_n\} \subset V_2[a,b]$ фундаментальна в $\|\cdot\|_1$, то она фундаментальна в $\|\cdot\|_0$ и существует $x_*(\cdot):[a,b] \to R$: $\|x_* - x_m\|_0 \to 0$. По теореме 2 $x_* \in V_2[a,b]$ и $V_2(x_* - x_m) \to 0$; 3) $\|x_* - x_m\|_0 \to 0$ влечет $\int_a^b (x_*(t) - x_m(t))^2\,dt \to 0$ ([1], с. 388). 4) для $x_* \in V_2[a,b]$, $\{x_m\} \subset C[a,b]$ $\|x_* - x_m\|_2 \to 0$ влечет $\sqrt{V_2(x_*)} \leq$ $\leq \sqrt{V_2(x_* - x_m)} + \sqrt{V_2(x_m)} \to 0 + 0 = 0$, $m \to \infty$, откуда $x_* \in C[a,b]$; 5) $(x,x)_1 \geq 0$ и равенство лишь для $x(t) \equiv 0$ установлены. $(x,y)_1 \equiv (y,x)_1$ и $(\alpha x,y)_1 \equiv \alpha(x,y)_1$ очевидны. $(x_1+x_2,y)_1 \equiv (x_1,y)_1 + (x_2,y)_1$ для интегральной части известно, для вариации следует из $Z(x_1+x_2) \subset Z(x_1) \bigcup Z(x_2)$.

Замечание. Пространства $(V_2[a,b],\|\cdot\|_1)$ и $(V_2^+[a,b],\|\cdot\|_1)$ не полны.

<u>Пример</u> 2. Пусть $x_n(t) = -I_{[-1,\,-n^{-1})}(t) + nt\,I_{[n^{-1},n^{-1})}(t) + I_{[n^{-1},1]}(t)$, $t \in [-1,1]$, $n \in N$. Верно $\int_{-1}^1 (sign(t) - x_n(t))^2\,dt = 2\int_0^{n^{-1}} (1-nt)^2\,dt = 2(3n)^{-1} \to 0$, $n \to \infty$ ($sign(t) = -I_{(-\infty,\,0)}(t) + I_{(0,+\infty)}(t)$, $t \in R$). $\{x_n\} \subset C[-1,1] \subset V_2^+[-1,1] \subset V_2[-1,1]$ и $\|x_l - x_n\|_1^2 = \int_{-1}^1 (x_l(t) - x_n(t))^2\,dt + 0 \to 0$, $l,n \to \infty$ (фундаментальность $\{x_n\}$). Но $\{x_n\}$ не имеет предела в $V_2[a,b]$ по этой норме. От обратного, если для $x_* \in V_2[a,b]$ $\|x_* - x_n\|_1 \to 0$, то $x_*(t) = sign(t)$, $t \in [-1,1]$ п.в. ([1], с. 388). Ввиду $x_* \in D[a,b]$ существуют пределы $x_*(0-) = sign(0-) = -1$, $x_*(0+) = sign(0+) = 1$. Следовательно $V_2^{[-1.1]}(x_*) \geq (1 - x_*(0))^2 + (x_*(0) - (-1))^2 = 2 + 2\,x_*(0)^2 \geq 2$ и $V_2(x_* - x_n) \equiv V_2(x_*)$ не сходится к 0.

Требование конечности второй вариации значительно менее ограничительно, чем требование конечности первой вариации. Но с ним возможно изучать сходимость алгоритмов приближения и оптимизации в новых нормах, без конструкций с несчетным числом операций. Возникает эффективный алгоритм проверки непрерывности функции по конечному числу данных траектории. Вторую вариацию функции из $V_2^+[a,b]$ можно найти как предел конечных сумм по разбиениям отрезка. Для $\|\cdot\|_1$ существует соответствующее скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_1$, что позволяет рассматривать разложения по ортогональным системам и связанные сходимости. Таким свойством не обладает, например, норма $\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}+\sqrt{V_2^{[a,b]}(x)}$, $x\in V_2[a,b]$, эквивалентная $\|\cdot\|_1$. Преимущество нормы $\|\cdot\|_1$ перед L_2-нормой в $V_2[a,b]$ состоит в том, что она различает функции, не равные даже только в одной точке. Вместо оптимизационной задачи $\sup_{\int_a^b x(t)^2\,dt\le r^2}\varphi(x(\cdot))$ для функционала $\varphi: V_2[a,b]\to R$ и $r>0$ уместно рассматривать задачу $\sup_{\|x\|_1\le r}\varphi(x(\cdot))$ и находить ее решения.

К.Г. Дзюбенко

ДРУГА ВАРІАЦІЯ ФУНКЦІЇ ТА ЗБІЖНІСТЬ ЗА НОРМОЮ

У просторі функцій обмеженої другої варіації доведено твердження про збіжність та обчислення варіацій, введено норми та скалярний добуток.

K.G. Dziubenko

FUNCTION SECOND VARIATION AND CONVERGENCE IN NORM

In bounded second variation functions space statements are proved on convergence and variations calculation, norms and scalar product are introduced.

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
2. *Натансон И.П.* Теория функций действительного переменного. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. *Скороход А.В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1956. – 1, Вып. 3. – С. 289–319.
4. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер (пер. с англ.). – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Получено 29.03.2013