Теорія оптимальних рішень

УДК 519.21

Г.Д. БІЛА, О.П. КНОПОВ

ПРО ОДИН КЛАС ПЕРІОДОГРАМНИХ ОЦІНОК

Розглянуто один клас періодограмних оцінок невідомих параметрів нелінійної моделі регресії «сигнал плюс шум». Доведено їх строгу консистентність за умови, що функція регресії – майже періодична, а шум є функціоналом від гауссівського випадкового процесу із сильною залежністю.

Останнім часом у техніці передачі сигналів та оцінки їх параметрів досягнуто великих успіхів. Удосконалення більшості радіотехнічних та радіофізичних пристроїв за рахунок покращення конструктивних та технологічних рішень має свою межу, визначену чисто фізичними причинами, такими як завади природного та штучного походження. Це змушує шукати принципово нові шляхи вирішення проблеми передачі та прийняття повідомлень, враховуючи статистичні властивості різних характеристик повідомлень (сигналів) та завад (шумів).

Через наявність завад із прийнятих коливань не можна з повною достовірністю зафіксувати присутність корисного сигналу і точно виміряти (оцінити) його параметри. Завади зумовлюють випадковий характер результатів спостережень, тому їх природа впливає на оцінку параметрів сигналу. Така задача дослідження впливу завад на оцінку невідомих параметрів сигналу викликає не тільки теоретичний, а й прикладний інтерес для радіозв'язку, радіолокації та багатьох інших наук про обробку та передачу інформації [1, 2].

У даній роботі розглядається оцінка параметрів сигналу, спотвореного випадковим шумом, коли сигнал описаний майже періодичною функцією, а шум – функціоналом від гауссівського випадкового процесу з довгою пам'яттю. Принцип оцінювання полягає у тому, що спостерігач має вибрати те значення параметра функції з усіх можливих, при якому спостережувана величина стає найбільш імовірною.

Опишемо модель регресії та зробимо деякі припущення відносно неї.

Нехай $\{\varepsilon(t)\}=\{G(n(t)),\, t\in \mathbb{R}^1\}$ – випадковий шум, заданий як функціонал від дійсного стаціонарного випадкового процесу $\{n(t)\}$ із сильною залежністю, $En(t)=0$, $\varphi(t)$ – майже періодична функція визначена на $\mathbb{R}^1$.

Розглянемо задачу оцінки невідомого параметра ω_0 за спостереженнями

$$\{x(t)\}=\{x(t)=\varphi(\omega_0 t)+\varepsilon(t),\, t\in[0,T]\}, \tag{1}$$

де $\omega_0>0,$ а довжина інтервалу спостережень $T\to\infty$.

Лема. Нехай виконуються наступні умови:

(A) $\{n(t)\}=\{n(t), t\in\mathbb{R}^1\}$ – дійсний неперервний у середньому квадратичному вимірний стаціонарний гауссівський процес із сильною залежністю,

$$En(t)=0,\;\; B(t)=\operatorname{cov}(n(0),n(t))=\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\alpha/2}},\;\; t\in\mathbb{R}^1,\;\; 0<\alpha<1.$$

(B) $\{\varepsilon(t)\}=\{G(n(t)),\, t\in\mathbb{R}^1\}$ – функціонал від гауссівського стаціонарного процесу $\{n(t)\}$, причому $E\varepsilon(0)=0,$ $E\varepsilon^2(0)=1,$ нелінійна борелівська функція $G:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ задовільняє умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(u)\varphi(u)\,du<\infty,\text{ де } \varphi(u)=\frac{1}{2\pi}e^{-u^2/2},\;\; u\in\mathbb{R}^1,$$

і розкладається в ряд

$$G(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{k!}H_k(u),\;\; C_k=\int_{-\infty}^{\infty}G(u)H_k(u)\varphi(u)\,du,\;\; k=0,1,...,$$

за ортогональними поліномами Чебишева – Ерміта

$$H_k(u)=(-1)^k e^{-u^2/2}\frac{d^k}{du^k}e^{-u^2/2},\;\; k=0,1,...,$$

у гільбертовому просторі L_2.

(C) Існує ціле число $m\ge 1$ таке, що $C_1=...=C_{m-1}=0$, $C_m\ne 0$ – коефіцієнти у розкладі функції $G(u),$ $u\in\mathbb{R}^1$ за поліномами Чебишева – Ерміта.

Тоді для будь-якої майже періодичної функції вигляду

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\lambda_k t},\;\; \lambda_k\in\mathbb{R}^1, \tag{2}$$

де $\lambda_k\ge 0$ при $k\ge 0;$ $\lambda_l<\lambda_k$ при $l>k>0;$ $\lambda_k=-\lambda_{-k};$ $|\lambda_l-\lambda_k|\ge\Delta>0$ при $l\ne k,$ і коефіцієнти c_k задовольняють умовам

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty,$$

$$c_k = \overline{c}_{-k}, \qquad (3)$$

то має місце наступне співвідношення:

$$P\left\{ \lim_{T\to\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(t)\varphi(\omega t)\,dt \right| = 0 \right\} = 1.$$

Доведення. Позначимо

$$\tilde{I}_T(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(t)\varphi(\omega t)\,dt.$$

Із умов леми функцію $\varphi(t)$ можна представити у вигляді рівномірно збіжного ряду (2). Тоді враховуючи умову (А), оцінимо $\sup_{\omega\in\mathbb{R}^1}\left|\tilde{I}_T(\omega)\right|$. Маємо

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}^1}\left|\tilde{I}_T(\omega)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \sup_{\omega\in\mathbb{R}^1}\left| \frac{1}{T}\int_0^T G\big(n(t)\big)\exp\{i\omega t\}\,dt \right|.$$

Із умови (3) та леми [3] отримаємо, що з імовірністю 1

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}^1}\left|\tilde{I}_T(\omega)\right| \to 0. \text{ при } T\to\infty .$$

Лема доведена. □

Зазначимо, що для випадкових процесів $\{n(t),\, t\in\mathbb{R}^1\}$ із слабкою залежністю, за деяких умова, накладених на моменти випадкового процесу та коефіцієнт перемішування, твердження леми доведено в [3]. Дана лема відіграє основну роль у дослідженні асимптотичної поведінки розглянутих далі оцінок.

Розрізняють дві модифікації періодограмних оцінок у залежності від вигляду функціоналу, що лежить в основі їх обчислень. За умов леми та моделі регресії вигляду (1) одна з модифікацій періодограмних оцінок детально досліджена в [4, 5]. Розглянемо іншу модифікацію.

Припустимо, що невідомий параметр $\omega_0 \in (\underline{\omega}, \overline{\omega})$, $\underline{\omega} > 0$, $\overline{\omega} < \infty$. Розглянемо функціонал

$$\tilde{Q}_T(\omega) = \left| \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\varphi(\omega t)\,dt \right|^2 .$$

Періодограмною оцінкою параметра ω_0 будемо називати те значення $\tilde{\omega}_T \in [\underline{\omega}, \overline{\omega}]$, при якому функціонал $\tilde{Q}_T(\omega)$ приймає найбільше значення. Оскільки $\tilde{Q}_T(\omega)$ з імовірністю 1 є неперервною функцією від ω, то величина $\tilde{\omega}_T$ визначена з імовірністю 1. Періодограмні оцінки такого типу для випадкових полів із слабкою залежністю детально вивчалися в [6]. Доведемо твердження про строгу консистентність оцінки $\tilde{\omega}_T$.

Теорема. Нехай виконуються умови леми та $\left|c_{i_0}\right| > \left|c_i\right|$ при $i \neq \pm i_0$, $i_0 > 0$. Тоді $\tilde{\omega}_T \to \omega_0$ при $T \to \infty$ з імовірністю 1.

Доведення. Зафіксуємо ω і розглянемо поведінку величини $\tilde{Q}_T(\omega)$ при $T \to \infty$:

$$\tilde{Q}_T(\omega) = \left|\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\varphi(\omega t)\,dt\right|^2 = \left|\frac{2}{T}\int_0^T \left[\varphi(\omega_0 t) + \varepsilon(t)\right]\varphi(\omega t)\,dt\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{2}{T}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\varphi(\omega t)\,dt\right|^2 + \left|\frac{2}{T}\int_0^T \varepsilon(t)\varphi(\omega t)\,dt\right|^2 + \frac{2}{T^2}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\varphi(\omega t)\,dt \int_0^T \varepsilon(t)\varphi(\omega t)\,dt.$$

Очевидно, що з умов (2), (3)

$$\frac{1}{T}\left|\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\varphi(\omega t)\,dt\right| \le K,\ \ 0 < K < \infty.$$

Позначимо

$$\tilde{I}_T(\omega) = \left|\frac{2}{T}\int_0^T \varepsilon(t)\varphi(\omega t)\,dt\right|^2 + \frac{2}{T^2}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\varphi(\omega t)\,dt \int_0^T \varepsilon(t)\varphi(\omega t)\,dt.$$

Тоді, використовуючи лему, з імовірністю 1 має місце слідування

$$\sup_{\omega}\left|\tilde{I}_T(\omega)\right| \to 0 \text{ при } T \to \infty\,.$$

Нехай

$$\tilde{\psi}_T(\omega_0, \omega) = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi(\omega_0 t)\varphi(\omega t)\,dt.$$

Справедлива рівність

$$\tilde{\psi}_T(\omega_0, \omega) = \frac{2}{T}\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_j c_k \int_0^T \exp\left\{i\left(\lambda_j\omega_0 + \lambda_k\omega\right)t\right\}dt.$$

Виберемо $0 < \tilde{\delta} < \dfrac{\Delta\underline{\omega}}{2}$. Припустимо, що для деяких j, k виконується нерівність $\left|\lambda_j\omega_0 + \lambda_k\omega\right| \le \tilde{\delta}$. Тоді для будь-якого $l \neq j$ маємо

$$\left|\lambda_l\omega_0 + \lambda_k\omega\right| = \left|\left(\lambda_j\omega_0 + \lambda_k\omega\right) + \left(\lambda_l - \lambda_j\right)\omega_0\right| > \underline{\omega}\left|\left|\lambda_l - \lambda_k\right| + \frac{\Delta}{2}\right| > \frac{\Delta\underline{\omega}}{2} > \tilde{\delta}. \quad (4)$$

Аналогічно для будь-якого $l \neq k$ маємо

$$\left|\lambda_j\omega_0 + \lambda_l\omega\right| = \left|\left(\lambda_j\omega_0 + \lambda_k\omega\right) + \left(\lambda_l - \lambda_k\right)\omega\right| > \underline{\omega}\left|\left|\lambda_l - \lambda_k\right| + \frac{\Delta}{2}\right| > \frac{\Delta\underline{\omega}}{2} > \tilde{\delta}. \quad (5)$$

Нехай $\left|\lambda_{i_0}\omega_0 + \lambda_k\omega\right| \le \tilde{\delta}$. Ми показали, що для довільного $l \neq i_0$ виконується нерівність

$$\left|\lambda_l\omega_0 + \lambda_{i_0}\omega\right| > \tilde{\delta}. \quad (6)$$

Очевидно, що враховуючи умови накладені на λ_k, нерівність (6) виконується для $l \le 0$. Припустимо, що $l > 0$. Тоді

$$\left|\lambda_l \omega_0 + \lambda_{i_0} \omega\right| = \left|\left(\lambda_{i_0} \omega_0 + \lambda_k \omega\right) + \left(\lambda_l - \lambda_{i_0}\right)\omega_0 + \left(\lambda_{i_0} - \lambda_k\right)\omega\right| > \tilde{\delta}.$$

Аналогічно, якщо $\left|\lambda_k \omega_0 + \lambda_{i_0} \omega\right| \le \tilde{\delta},$ тоді для будь-якого цілого $l \ne i_0$

$$\left|\lambda_{i_0} \omega_0 + \lambda_l \omega\right| > \tilde{\delta}.$$

Зазначимо, що

$$\left|\lambda_k \omega\right| \ge \lambda_{i_0} \underline{\omega} > 2\tilde{\delta}, \ \left|\lambda_j \omega_0\right| \ge \lambda_{i_0} \underline{\omega} > 2\tilde{\delta}, \ k, j \ne 0. \tag{7}$$

Беручи до уваги співвідношення (4) – (7) для будь-якого $\delta > 0$ та $0 < \tilde{\delta} < \dfrac{\Delta\underline{\omega}}{2}$ з імовірністю 1 маємо

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\omega\in[\underline{\omega},\overline{\omega}],|\omega-\omega_0|\ge\delta} \tilde{Q}_T(\omega) \le \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\omega\in[\underline{\omega},\overline{\omega}],|\omega-\omega_0|\ge\min\left(\delta,\frac{\tilde{\delta}}{\lambda_{i_0}}\right)} \left|\tilde{\psi}_T(\omega_0,\omega)\right|^2 =$$

$$= \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\omega\in[\underline{\omega},\overline{\omega}],|\omega-\omega_0|\ge\min\left(\delta,\frac{\tilde{\delta}}{\lambda_{i_0}}\right)} \left|\frac{2}{T}\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_j c_k \int_0^T \exp\left\{i\left(\lambda_j\omega_0 + \lambda_k\omega\right)t\right\}dt\right|^2 \le$$

$$< \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\omega\in[\underline{\omega},\overline{\omega}],|\omega-\omega_0|\ge\min\left(\delta,\frac{\tilde{\delta}}{\lambda_{i_0}}\right)} \left|\left|c_0\right|^2 + \frac{2}{T}\sum_{j,k=1}^{\infty} c_j \overline{c}_k \int_0^T \exp\left\{i\left(\lambda_j\omega_0 + \lambda_k\omega\right)t\right\}dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{T}\sum_{j,k=1}^{\infty} \overline{c}_j c_k \int_0^T \exp\left\{i\left(\lambda_j\omega_0 + \lambda_k\omega\right)t\right\}dt\right|^2 \le$$

$$\le \sup_{\omega\in[\underline{\omega},\overline{\omega}],|\omega-\omega_0|\ge\min\left(\delta,\frac{\tilde{\delta}}{\lambda_{i_0}}\right)} \left[\left|c_0\right|^2 + \frac{4}{T}\sum_{j,k=1}^{\infty}\left|c_j c_k\right|\delta_{jk}(\omega_0,\omega)\right]^2,$$

де

$$\delta_{jk}(\omega_0,\omega) = \begin{cases} 1, & \left|\lambda_j\omega_0 - \lambda_k\omega\right| < \min\left(\lambda_{i_0}\delta,\tilde{\delta}\right) \\ 0, & \left|\lambda_j\omega_0 - \lambda_k\omega\right| \ge \min\left(\lambda_{i_0}\delta,\tilde{\delta}\right) \end{cases}, \quad j,k \ge 1.$$

Виходячи з нерівностей (4) – (7), функція $\delta_{jk}(\omega_0,\omega)$ має наступні властивості:

a) якщо $\delta_{j_0 k_0}(\omega_0,\omega) = 1,$ то $\delta_{j_0 k}(\omega_0,\omega) = \delta_{j k_0}(\omega_0,\omega) = 0,\ k \ne k_0,\ \ j \ne j_0;$

b) якщо $\delta_{i_0 k}(\omega_0,\omega) = 1,$ то $\delta_{l i_0}(\omega_0,\omega) = 0$ для $l \ne i_0;$

c) якщо $\delta_{j i_0}(\omega_0,\omega) = 1,$ то $\delta_{i_0 l}(\omega_0,\omega) = 0$ для $l \ne i_0.$

Отримаємо

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\omega\in[\underline{\omega},\overline{\omega}],|\omega-\omega_0|\geq\delta} \tilde{Q}_T(\omega) \leq \left[|c_0|^2 + |c_{i_0}|^2 + 4\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq\pm i_0}}^{\infty} |c_j|^2 \right]^2 =$$

$$= \left[2\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 - |c_{i_0}|^2 \right]^2 < \left[2\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \right]^2 = 4\max_{j\neq i_0}\left[|c_j|^2 \right]^2 = 4|c_{i_0}|^4.$$

Очевидно, що з імовірністю 1

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{Q}_T(\omega_0) = 4|c_{i_0}|^4.$$

Тому нерівність

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \tilde{Q}_T(\omega) < \overline{\lim_{T\to\infty}} \tilde{Q}_T(\omega_0) = L, \ \ L < \infty,$$

справедлива з імовірністю 1 на будь-якій множині

$$\Phi_\delta = \left\{ \omega : \omega \in [\underline{\omega}, \overline{\omega}], |\omega - \omega_0| \geq \min\left(\delta, \frac{\tilde{\delta}}{\lambda_{i_0}} \right) \right\}, \ \ \delta > 0 \text{ та } 0 < \tilde{\delta} < \frac{\Delta\underline{\omega}}{2}.$$

Покажемо тепер, що $\tilde{\omega}_T \to \omega_0$ при $T \to \infty$ з імовірністю 1. Нехай це не так. Тоді існує підпослідовність $T_k \to \infty$ при $k \to \infty$ така, що $\tilde{\omega}_{T_k} \to \tilde{\omega}' \neq \omega_0$ з імовірністю 1 при $k \to \infty$. Звідси випливає, що

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \tilde{Q}_{T_k}\left(\omega_{T_k}\right) < L$$

в силу того, що $\tilde{Q}_T(\omega)$ на Φ_δ, $0 < \delta < \min\left(|\tilde{\omega}' - \omega_0|, \frac{\Delta\underline{\omega}}{2} \right)$, рівномірно з імовірністю 1 збігається до величини, меншої за L. З іншої сторони, за означенням

$$\tilde{Q}_{T_k}\left(\omega_{T_k}\right) \geq \tilde{Q}_{T_k}(\omega_0),$$

причому $\tilde{Q}_{T_k}(\omega_0) \to L$ з імовірністю 1 при $k \to \infty$. Отримали протиріччя. Відповідно, $\tilde{\omega}_T \to \omega_0$ при $T \to \infty$ з імовірністю 1.

Теорема доведена. □

Г.Д. Била, О.П. Кнопов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЕРИОДОГРАМНЫХ ОЦЕНОК

Рассматривается один класс периодограмных оценок неизвестных параметров нелинейной модели регрессии «сигнал плюс шум». Доказана их строгая состоятельность при условии, что функция регрессии – почти периодическая, а шум является функционалом от гауссовского случайного процесса с сильной зависимостью.

G.D. Bila, A.P. Knopov

ON A CLASS OF PERIODOGRAM ESTIMATES

We proposed a class of periodogram estimates of unknown parameters of the nonlinear regression model «signal plus noise». We proved their strong consistency provided that the regression function is almost periodic and the noise is a functional of a random Gaussian process with long-range dependence.

1. *Давенпорт В.Б., Рут В.Л.* Введение в теорию случайных сигналов и шумов. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 469 с.
2. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Сов. радио, 1978. – 296 с.
3. *Knopov P.S., Kasitskaya E.J.* Empirical estimates in stochastic optimization and identification. – Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 250 p.
4. *Кнопов П.С., Била Г.Д.* Периодограммные оценки в моделях нелинейной регрессии с сильнозависимым шумом // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 4. – С. 163–172.
5. *Біла Г.Д.* Асимптотична нормальність періодограмних оцінок у моделях із сильнозалежним шумом // Компьютерная математика. – 2013. – № 1. – С. 46 – 51.
6. *Кнопов П.*С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. – Киев: Наук. думка, 1981. – 152 с.

Одержано 15.03.2013