

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РИШЕНЬ

Представлена агрегированная имитационная модель страховой компании, базирующаяся на реальной финансовой отчетности. Модель включена в систему параллельного имитационного моделирования, использующую графический ускоритель для проведения расчетов (NVIDIA CUDA). Система реализует идеологию динамического финансового анализа. Она позволяет прогнозировать будущие результаты работы компании в зависимости от параметров управления.

© Б.В. Норкин, 2013

Теорія оптимальних рішень. 2013

УДК 519.8; 368; 65.0

Б.В. НОРКИН

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С ПОМОЩЬЮ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

Введение. В работе представлена система параллельного имитационного моделирования, реализующая идеологию динамического финансового анализа страхового бизнеса [1]. Система основана на имитационной модели страховой компании, использующей реальную финансовую отчетность. Она позволяет прогнозировать будущие результаты работы компании в зависимости от параметров управления. В частности, она позволяет строить зависимости вероятности разорения, суммарных дивидендов, остаточного резерва как функции разнообразных параметров (начального капитала, страховой премии, постоянных платежей, дивидендных отчислений и др.). Система позволяет сопоставлять риск (вероятность разорения) и чистый доход компании (суммарные дивиденды). Использование графических ускорителей для проведения расчетов (технология NVIDIA CUDA) позволяет получать результаты приемлемой точности в реальном времени.

Суть страхового бизнеса состоит в получении максимума чистой прибыли при достаточных страховых резервах для покрытия страховых требований. Для формального описания деятельности страховой компании часто используется случайный процесс риска (модель Крамера – Лундберга), моделирующей стохастическую эволюцию капитала страховой компании [2]. В этой модели, с одной стороны капитал монотонно и линейно

возрастает с течением времени за счет непрерывно поступающих премий, а с другой – в случайные моменты времени (прихода страховых требований) он убывает на случайную величину (требования). Компания разоряется, если капитал становится меньше нуля. Очевидно, что данный процесс не может адекватно отображать динамику капитала реальной компании.

В данной работе наряду с классическим процессом рассматривается процесс риска с дискретным временем с постоянными квартальными премиями, случайными квартальными требованиями и вычитанием дивидендов, зависящих от текущего резерва.

Оценка вероятности разорения и других показателей функционирования страховой компании может быть проведена методом статистического моделирования Монте-Карло. Во многих случаях это единственно применимый метод. Учитывая то, что вероятность разорения достаточно мала, для достижения приемлемой точности может быть необходимо астрономическое число испытаний. Независимость испытаний в методе Монте-Карло позволяет распараллелить вычисления и передать их выполнение графическому процессору. Это позволяет получить достаточно точный результат за разумное время. В работе представлены результаты численных экспериментов на разработанной системе актуарного моделирования RMS 0.2, использующей GPU с архитектурой NVIDIA CUDA 4.2 [3].

В работах [4 – 6] параллельная версия метода Монте-Карло наряду с параллельным методом последовательных приближений, реализованные на кластере из нескольких персональных компьютеров, применялись для нахождения вероятности разорения как функции от начального капитала и других параметров управления страховой компанией. В работе [7] обсуждаются близкие вопросы параллельного моделирования случайных блужданий на графических ускорителях с архитектурой NVIDIA CUDA. В данной работе метод Монте-Карло для решения актуарных задач реализован на графическом ускорителе с архитектурой NVIDIA CUDA 4.2 [3], за счет чего время расчетов сократилось на один-два порядка по сравнению с расчетами на центральном процессоре. Более того, скорость вычислений делает возможным изучать зависимости вероятности разорения и других показателей не только от начального капитала, а от нескольких других параметров работы компании.

Процесс риска как модель страховой компании. Страховая компания получает деньги от страхователей, покрывает страховые требования, платит налоги и другие обязательные платежи и, по возможности, выплачивает дивиденды. Кроме того, она обязана поддерживать некоторый уровень страховых резервов для покрытия текущих случайных страховых требований.

В классической модели Крамера – Лундберга (с непрерывным временем t , с постоянной интенсивностью премий c , вычитанием постоянных операционных расходов e и дивидендов d) уравнение эволюции резервов имеет вид:

$$x_t = u + (c - e - d)t - \sum_{k=1}^{N_t} z_k, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где $\{z_k, k = 1, 2, \dots\}$ – независимые одинаково распределенные наблюдения случайной величины требований с общей функцией распределения $F(\cdot)$ и средним

μ , N_t – целочисленная случайная величина с распределением Пуассона с параметром α (временная интенсивность прихода требований в экспоненциальном распределении).

На практике финансовое состояние компании регистрируется в дискретные моменты времени, например, поквартально. В этом случае математическая модель стохастической эволюции резервов x_t страховой компании имеет вид:

$$x_{t+1} = x_t + c_t(1 - \xi_t) - e_t - d_t = u + \sum_{i=1}^t c_i(1 - \xi_i) - \sum_{i=1}^t (e_i + d_i), \quad (2)$$

где $t = 0, 1, \dots, T - 1$ – дискретный временной параметр; $x_0 = u \geq 0$ – начальный капитал (резерв); x_t – текущий страховой резерв в момент t ; c_t, e_t, d_t, ξ_t – соответственно суммарные квартальные премии, обязательные платежи, дивидендные выплаты и случайные нормализованные страховые требования за период t . Распределение величин ξ_t считается стационарным и находится из страховой статистики. На практике дивидендные выплаты d_t ограничены законодательно [8, статья 30], например, при величине текущего резерва x выплаты $d_t \geq 0$ не могут превосходить величины $\beta(x - b_t)$, где

$$b_t = \max \left\{ b, 0.18 \sum_{i=1}^4 c_{t-i}, 0.26 \sum_{i=1}^4 c_{t-i} \xi_{t-i} \right\},$$

где $b \geq 0$ – минимальная дивидендная граница; β – дивидендный параметр ($0 \leq \beta \leq 1$). В случае постоянных премий $c_t \equiv c$ и обязательных операционных расходов $e_t \equiv e$ уравнение (2) принимает вид

$$x_{t+1} = u + (c - e)t - c \sum_{i=1}^t \xi_i - \sum_{i=1}^t d_i. \quad (3)$$

Рассмотрим вероятность разорения $\Psi(\cdot) = \Pr \left\{ \inf_{0 \leq t \leq T} x_t < 0 \right\}$ как функцию от параметров процесса. Эта вероятность может быть использована как мера риска при управлении страховой компанией. Например, вероятность разорения (на бесконечном интервале времени) $\Psi(u, c, e, d, \alpha, \mu)$ в классической модели страховой компании (1) с экспоненциальным распределением требований известна в явном виде [2]. В более общей модели (2) такая зависимость не известна и может быть получена только методом Монте-Карло. Проблема состоит в том, что для оценки малых вероятностей разорения требуется промоделировать астрономическое число траекторий процесса (2). В данной работе эта проблема решается с помощью параллельного метода Монте-Карло, реализованного на графическом процессоре с большим числом вычислительных ядер. Кроме вероятности разорения нас может интересовать распределение капитала в некоторый момент времени и собранные дивиденды, их средние значения и дисперсии в этот момент, а также зависимость этих величин от разнообразных параметров.

Параллельный метод статистического моделирования (метод Монте-Карло). Метод состоит в параллельном моделировании большого числа N траекторий стохастической эволюции резервов x_t страховой компании на заданном интервале времени $[0, T]$ для заданного набора параметров $(u, c, e, d, \alpha, \mu, T)$ процесса (1), параметров (u, c, e, b, T) процесса (3) и вычисления доли $p_N(t)$ не разорившихся траекторий к моменту времени t , а также среднего чистого дохода (собранных дивидендов) $D_N = (1/N) \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{\tau_j} d_i^j$, где d_i^j – дивиденды в момент i в испытании j , τ_j – момент разорения в j -ом испытании или $\tau_j = T$, если разорения до момента T не произошло. Для оценки работы компании важное значение имеет также остаточный резерв в конце планового периода. Он вычисляется в системе и отображается на том же графике, что и суммарные дивиденды. В процессе параллельного моделирования вычислительные ядра не общаются, а по завершении моделирования информация о траекториях собирается на одном ядре и строятся зависимости величин p_N и D_N от тех или иных параметров процесса. Результаты моделирования отображаются в плоскости «изменяемый параметр – вероятность разорения», «изменяемый параметр – собранные дивиденды» и в пространстве «риск – доход», т. е. в плоскости «вероятность разорения – собранные дивиденды». Точность метода Монте-Карло может быть оценена с помощью экспоненциального неравенства Хефдинга, $\Pr\{|p_N - \psi| \geq \delta\} \leq 2e^{-N\delta^2/2}$, откуда (10^{-k}) – доверительная граница для $|p_N - \psi|$ имеет вид $\delta_k(N) = \sqrt{2(k \ln 10 + \ln 2)} / \sqrt{N}$. Для $k = 3$ получаем $\delta_3(10000) = 2.3 / \sqrt{10000} = 0.023$.

Программная реализация параллельного метода Монте-Карло на GPU. Для проведения расчетов была создана программная система страхового моделирования “RMS 0.2”. Графический интерфейс системы позволяет изучать зависимость функции полезности (к примеру, величины собранных дивидендов и остаточного резерва) от различных параметров работы компании. Можно также строить зависимость вероятности разорения (используемой в качестве меры риска) от выше указанных параметров. Для написания интерфейса был использован язык C#, расчетная часть написана на CUDA C [3].

Для реализации параллельного метода Монте-Карло ключевое значение имеет проблема параллельного генерирования большого числа длинных независимых числовых последовательностей, состоящих из независимых случайных чисел. В CUDA эта проблема решается с помощью библиотеки CUDA CURAND [9]. В данной системе каждая «нить» (thread) в цикле генерировала от 10 до 1000 траекторий, 256 нитей объединялись в блоки. Проводились эксперименты с одинарной и двойной точностью представления числовых данных.

Программная система реализует следующие функции:

- выбор модели (классическая или модель с дискретным временем);
 - загрузку статистических данных и стандартный анализ данных;
 - задание интервалов для изменяемых параметров модели;
 - задание параметров статистического моделирования;
 - задание параметров для распараллеливания вычислений;
 - сохранение и загрузку параметров;
- построение и графическое представление зависимостей вероятности разорения, суммарных дивидендов и остаточного резерва от исследуемого параметра;
- отображение результатов моделирования (эффективной границы) в плоскости «вероятность разорения – суммарные дивиденды»;
- вывод результатов на печать.

Результаты численных экспериментов. Рассмотрена практическая задача нахождения вероятности разорения и чистого дохода некоторой реальной страховой компании на конечном интервале времени $[0, T]$. Численные эксперименты производились на конфигурации AMD Athlon 64 3200+ 1.5Gb Ram, графический ускоритель – Nvidia GeForce GTX 560 2Gb.

Разработанная система страхового моделирования RMS 0.2 позволяет в реальном времени исследовать зависимость вероятности разорения и чистого дохода (суммарных дивидендов) страховой компании как функцию от любого (но одного) параметра модели. Для этого достаточно в окне интерфейса системы задать минимальное и максимальное значение изменяемого параметра, а также число промежуточных значений параметра. Для остальных параметров используется минимальное значение и число промежуточных значений устанавливается равным единице. Сокращение времени вычислений достигается за счет массивного распараллеливания метода статистического моделирования с помощью GPU.

Эффективная граница (рисунок) отображает результаты моделирования работы компании в плоскости «доходность-риск». Она позволяет выбрать те значения изменяемого параметра, которые дают приемлемое для менеджера компании соотношение доходности и риска. Соответствующее значение изменяемого параметра появляется на экране в системе при наведении курсора на точку эффективной границы.

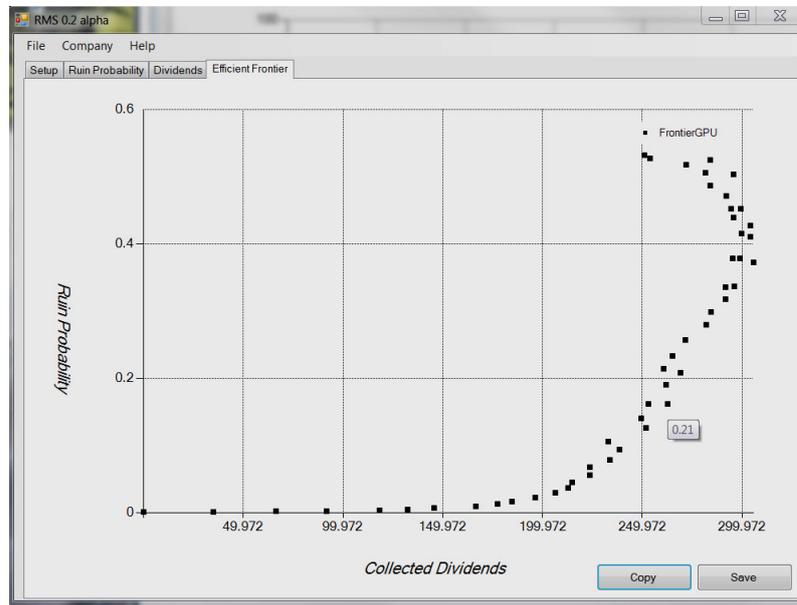


РИСУНОК. Результаты моделирования в плоскости «доходность-риск»

Выводы. Разработанная система актуарного моделирования RMS 0.2 позволяет в режиме реального времени за счет ускорения вычислений на графическом процессоре исследовать зависимость вероятности разорения, ожидаемого чистого дохода остаточного резерва страховой компании как функцию любого параметра управления компанией. Тем самым она позволяет количественно исследовать влияние факторов управления на функционирование страховой компании. Система позволяет также сопоставлять в реальном времени доходность и риск при выборе параметров управления компанией.

Система RMS 0.2 работает на реальных статистических данных компании, полученных из ее квартальной финансовой отчетности.

Использование графических ускорителей позволяет производить численные расчеты в сложных общих актуарных моделях методом Монте-Карло, при этом приемлемая относительная точность порядка 1 % на вероятностях разорения порядка 10^{-3} достигается практически в режиме реального времени.

Б.В. Норкин

ОПТИМІЗАЦІЯ РОБОТИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАРАЛЕЛЬНОГО ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА ГРАФІЧНИХ ПРИСКОРЮВАЧАХ

Представлено агреговану імітаційну модель страхової компанії, що базується на реальній фінансовій звітності. Модель включено до системи паралельного імітаційного моделювання, що використовує графічний прискорювач для проведення розрахунків (NVIDIA CUDA). Система реалізує ідеологію динамічного фінансового аналізу, дозволяє прогнозувати майбутні результати роботи компанії залежно від параметрів керування.

B.V. Norkin

OPTIMIZATION OF AN INSURANCE BUSINESS USING PARALLEL GPU ACCELERATED SIMULATIONS

The paper considers the simulation model of an insurance company, based on the real-world financial statistics. The model is included in a risk modeling system RMS, that utilizes NVIDIA CUDA technology for GPU acceleration. The system is based on dynamic financial analysis principals. It allows to predict the future performance of the company, depending on the control parameters.

1. *Kaufmann R., Gadmer A., Klett R.* Introduction to dynamic financial analysis // ASTIN Bulletin. – 2001. – Vol. 31, N 1. – P. 213 – 249.
2. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
3. *Боресков А.В., Харламов А.А.* Основы работы с технологией CUDA. – М.: ДМК Пресс, 2010. – 232 с.
4. *Norkin B.* Parallel computations in insurance business optimization // Proceedings of the 1-st International Conference on High Performance Computing. October 12–14, 2011, Kyiv, Ukraine. – P. 33 – 39.
5. *Норкин Б.В.* Распараллеливание методов оценки риска банкротства страховой компании // Теорія оптимальних рішень. – 2010. – № 9. – С. 33 – 39.
6. *Норкин Б.В.* О вероятности разорения управляемого процесса авторегрессии // Компьютерная математика. – 2011. – № 2. – С. 142 – 150.
7. *Haizhen Wu.* Parallel Computing Using GPUs. – March 1, 2011.
<http://ecs.victoria.ac.nz/twiki/pub/EResearch/EcsTeslaResource/Parallel.Computing.Using.Graphics.Cards.pdf>
8. Закон України «Про страхування». <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/85/96-вр>

Получено 28.01.2013