УДК 519.81

В.М. МИХАЛЕВИЧ

ОПТИМАЛЬНОСТЬ, СОЧЕТАЮЩАЯ ПРИНЦИПЫ ГАРАНТИРОВАННОГО И НАИЛУЧШЕГО РЕЗУЛЬТАТА, В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Предлагается модель субъективной ожидаемой полезности по аддитивной вероятностной мере, формализм которой, в отличие от SEU модели Энскомба-Aуманна, определяемой в бихевиористских традициях, основывается на формально-логических принципах оптимальности.

Когда рассматривается задача принятия решений, (ЗР), в системе принятия решения (СПР), представляющей собой пару – того, кто принимает решение (ТПР) и ситуацию принятия решения (см. [1]), то возникает вопрос о критерии, согласно которому ТПР реализует процедуру выбора этого решения из множества возможных. Этот вопрос порождает проблему неопределенности процедуры выбора решений, которую решает ТПР, опираясь на свои принципы оптимальности. Для решения проблемы неопределенности исследователем необходима формализация СПР. Под ситуацией задачи выбора решений (СЗВ) будем понимать механизм возникновения причины последствия действия, т. е. состояния СЗВ, называемого ненаблюдаемым параметром СЗВ, где дейстие принадлежит заданному множеству, называемому множеством решений СЗВ, а последствие принадлежит заданному множеству для каждого действия из множества решений СЗВ. Множество элементарных событий указанных последствий множества решений СЗВ будем называть множеством последствий СЗВ. При этом задача выбора решений (ЗВ) формулируется как выбор действия или отношение предпочтения на действиях множества решений СЗВ, состоящем хотя бы из двух элементов, в зависимости от отношения предпочтения в множестве последствий СЗВ. ЗВ выбора действия будем называть ЗР, а ЗВ выбора отношения предпочтения на действиях – задачей предпочтений (ЗП).

Тогда решение исследователем проблемы неопределенности выбора для ЗП заключается в доказательстве теоремы существования и единственности решения ЗП, исходя из определенных принципов оптимальности на множестве решений сответствующей СЗВ. Последнюю, в случае известного множества значений ненаблюдаемого параметра, будем называть параметрической. Ее можно описывать вербально, а также абстрактно с помощью схем СЗВ.

Определение 1. Схемой ситуации (СС) называется упорядоченная четверка вида (X,Θ,U,g), где для произвольных непустых множеств X,Θ,U, а g является отображением $\Theta\times U$ на X.

При этом множество X называется множеством последствий с алгеброй под-множеств Ξ, Θ – множеством значений ненаблюдаемого параметра с алгеброй подмножеств Σ, U множеством решений, а g – отображением последствий СС (X,Θ,U,g). Класс всех параметрических СС вида (X,Θ,U,G) будем обозначать Z, а $\mathrm{Z}(X,\Theta):=\{(X,\Theta,\cdot,\cdot)\in \mathrm{Z}\}$.

Рассмотрим класс СС с заданными отношениями предпочтений на соответствующих множествах последствий. Тогда каждой параметрической СС этого класса соответствует упорядоченная четверка вида $((X,\mu),\Theta,U,g)$, где (μ) – соответствующее отношение предпочтения на множестве последствий этой СЗВ. $\mathbf{Z}$ обозначим класс всех СС вида $((X,\mu),\Theta,U,g)$, а также $\mathbf{Z}(X,\Theta):=\{((X,\cdot),\Theta,\cdot,\cdot)\in \mathbf{Z}\}$.

Определение 2. Проекцией СС класса $\mathbf{Z}$ называется такое отображение $Пр:\mathbf{Z}\to \mathrm{Z}$, что для любой СС $((X,\mu),\Theta,U,g)\in \mathbf{Z}$ имеет место $Пр(((X,\mu),\Theta,U,g))=(X,\Theta,U,g)$.

Продолжая изучение неопределенности путем «перехода явным образом к рассмотрению бесконечного числа «испытаний» ... иными словами задачи принятия «массовых» решений» (см. [1], стр. 42), рассмотрим многократный выбор решений $(u_1,\ldots,u_n), n\in N$ в параметрической ситуации ЗР, заданной своей СС $Z= \;=(X,\Theta,U,g)\in \mathrm{Z}(X,\Theta)$. При этом соответствующий вектор последствий $(x_1,\ldots,x_n)$, в зависимости от соответствующих значений ненаблюдаемого параметра $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$, удовлетворяет условиям $x_i=g(\theta_i,u_i), i=\overline{1,n}$.

Для любого непустого множества A через A^∞ всюду далее будем обозначать множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A^n$.

Под ЗП при многократном выборе, называемой задачей многократных предпочтений (ЗМП) в ситуации с СС $Z=(X,\Theta,U,g)\in \mathrm{Z}(X,\Theta)$, в классе СС $\mathrm{Z}(X,\Theta)$ будем понимать зависимость отношения на множестве U^∞ от предпочтений на множестве X^∞.

Определение 3. Правилом выбора предпочтений (ПВП) для ЗМП в классе $\mathrm{Z}' \subseteq \mathrm{Z}$ будем называть всякое отображение $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, определенное на Z' и сопоставляющее каждой $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathrm{Z}'$ некоторую пару бинарных отношений $\pi_{1Z} = (X^{\infty}, \mu_Z)$ и $\pi_{2Z} = (U^{\infty}, \mu_Z^{*})$. Класс всех ПВП для ЗМП в Z' будем обозначать $\Pi^{\infty}(\mathrm{Z}')$.

Рассмотрим так называемые необайесовские ЗР (см. [2]), расширив множество последствий X до множества Y случайных последствий, представляющих собой множество распределений на X следующего вида:

$$Y = \{(y : X \to [0,1]) : card\{x : y(x) \neq 0,\ x \in X\} < \infty,\ \sum_{x \in X : y(x) \neq 0} y(x) = 1\}. \quad (1)$$

Расширим необайесовскую форму параметрических ЗР, дополнив множество случайных последствий Y до множества случайных в широком смысле последствий $P_0(X)$, представляющих собой множество статистических закономерностей на множестве последствий X вида $P_0(X) := \{P \in P(X) : : card\ P < \infty, P \subseteq Y\}$, где Y – множество случайных последствий, определяемое соотношением (1).

Рассмотрим ЗМП в классе СС $\mathrm{Z}(P_0(X), \Theta)$. Введем некоторые понятия и обозначения по аналогии с используемыми в [2].

Обозначим $L_0(A, \Theta)$ множество всех Σ-измеримых конечнозначных отображений на множестве Θ со значениями в множестве A.

Определение 4. СС $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathrm{Z}(P_0(X), \Theta)$ будем называть определяющей, если $L_0(P_0(X), \Theta) \subseteq g(\cdot, U) = co[g(\cdot, U)] \subseteq [P_0(X)]^{\Theta}$.

Определение 5. Для произвольных непустых множеств X, Θ и нестрогого порядка (X, μ), отображение $f \in [P_0(X)]^{\Theta}$ будем называть ограниченным относительно (X, μ), если отображения на Θ $\underline{f}(\theta) := \min\{x \in X : \min_{p \in f(\theta)} p(x) \neq 0\}$ и $\overline{f}(\theta) := \max\{x \in X : \max_{p \in f(\theta)} p(x) \neq 0\}$ являются ограниченными относительно (X, μ).

Обозначим $L_{\mu}(P_0(X), \Theta)$ множество всех ограниченных и Σ-измеримых относительно нестрогого порядка (X, μ) отображений на множестве Θ со значениями в множестве $P_0(X)$.

Определим класс ПВП в ЗМП для $\mathrm{Z}'(P_0(X), \Theta) \subseteq \mathrm{Z}(P_0(X), \Theta)$, который будем обозначать $\Pi_0^{\infty}(\mathrm{Z}'(P_0(X), \Theta)$, как в подклассе всех таких ПВП $\pi \in \Pi^{\infty}(\mathrm{Z}'(P_0(X), \Theta)$, что для любой определяющей СС $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in$

$\in Z'(P_0(X),\Theta)$ выполняются условия **Y1 – Y5**, а также условия **P6 – P9**, где каждое из соответствующих условий **Y6 – Y9** получается путем замены множества *Y* на множество $P_0(X)$ (см. [3]).

Обозначим $Z_1'(P_0(X),\Theta)$ любой подкласс СС класса $Z(P_0(X),\Theta)$, в котором для любой СС $Z' = (P_0(X),\Theta,U',g') \in Z_1'(P_0(X),\Theta)$ и любых $u_i' \in U'$, $i=\overline{1,2}$ найдется такая определяющая СС $Z=(P_0(X),\Theta,U,g)\in Z_1'(P_0(X),\Theta)$ и $u_i \in U, i=\overline{1,2}$, что $g'(\theta,u_i')=g(\theta,u_i)\ \forall\theta\in\Theta, i=\overline{1,2}$.

Обозначим $Z_0'(P_0(X),\Theta)$ любой такой класс $Z_1'(P_0(X),\Theta)$, что если $Z=(P_0(X),\Theta,U,g)\in Z_1'(P_0(X),\Theta)$ – определяющая, фигурирующая в определении $Z_1'(P_0(X),\Theta)$, то для нее должно выполняться условие $g(\cdot,U)=L_0(P_0(X),\Theta)$.

А через $\mathbf{Z}_1'(P_0(X),\Theta)$ будем обозначать любой подкласс СС класса $\mathbf{Z}(P_0(X),\Theta)$, элементы которого задают первую компоненту некоторого ПВП для $Z_1'(P_0(X),\Theta)$. При этом, если $((P_0(X),\mu),\Theta,U,g)\in Z_1'(P_0(X),\Theta)$, а $(P_0(X),\Theta,U,g)\in Z'_1(P_0(X),\Theta)$ является определяющей СС, фигурирующей в определении $Z'_1(P_0(X),\Theta)$, то для нее также должно выполняться условие ограниченности и Σ-измеримости относительно сужения $(P_0(X),\mu)$ на X для отображения $g(\cdot,u)$ при всех $u\in U$, т. е. $g(\cdot,U)\subseteq L_\mu(P_0(X),\Theta)$.

Для любого класса $\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)$ определим класс $Z'_0(P_0(X),\Theta)$, обозначая его $Z'_{01}(P_0(X),\Theta)$, так что $Z'_{01}(P_0(X),\Theta):=\{(P_0(X),\Theta,U',g'):$

$$:(P_0(X),\Theta,U,g)\in \mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta),$$
$$U'=\{u:u\in U, g(\cdot,u)\in L_0(P_0(X),\Theta)\},\ U'=\{u:u\in U, g(\cdot,u)\in L_0(P_0(X),\Theta)\},$$
$$g'(\theta,u)=g(\theta,u)\ \forall\theta\in\Theta\ \ \forall u\in U'\}.$$

Для произвольного непустого множества A определим в пространстве R^A действительных функций на A отношение эквивалентности $(\overset{m}{\approx})$ так, что для любых $f,g\in R^A$ $f\overset{m}{\approx}g \Leftrightarrow f=mg,\ m\in R,\ m>0$.

Для произвольного векторного пространства V введем отношение эквивалентности $(\overset{co}{\approx})$ на 2^V так, что для любых $X,Y\subseteq V$ $X\overset{co}{\approx}Y\Leftrightarrow coX=coY$.

Если в соотношении, задающем условие **P9**, знак (μ^{*}_{Z}) заменить на знак обратного соответствия, то полученное условие обозначим **P9'**. Условие **P9'**, в отличие от условия **P9**, представляющего собой форму принципа гарантированного результата в статистической форме (интерпретируемой как условие непринятия участия в антагонистических играх [3]), является статистической формой принципа наилучшего результата (интерпретируемой как условие склонности к антагонистическим играм). Тогда $\overline{\Pi}_0^{\infty}(\mathrm{Z}'(P_0(X),\Theta))$ обозначим подкласс всех таких ПВП класса $\Pi^{\infty}(\mathrm{Z}'(P_0(X),\Theta))$, что для любой определяющей СС $Z=(X,\Theta,U,g)\in \mathrm{Z}'(X,\Theta)\subseteq \mathrm{Z}(X,\Theta)$ выполняются условия **Y1 – Y5, P6 – P8, P9'**.

$B_0(a,b)$, где $a,b\in R,\ 0\in \operatorname{int}(a,b)$ будем обозначать множество всех конечнозначных Σ-измеримых функций на Θ, со значениями в интервале (a,b).

Пусть L – произвольное выпуклое множество таких Σ-измеримых ограниченных функций на Θ (обозначаемых обычно $B_{\Sigma}(\Theta)$ или просто B), что найдутся $a,b\in R$, для которых множество $B_0(a,b)$ содержится в L, т. е. $B_0(a,b)\subseteq L = co\,L\subseteq B$.

Теорема 1. Для произвольного непустого множества Θ функционал υ на L удовлетворяет для любых $f_1, f_2\in L$ условиям:

V1. Если $f_1(\theta)\leq f_2(\theta)\ \ \forall\theta\in\Theta$, то $\upsilon(f_1)\leq\upsilon(f_2)$;

V2. Если $a',b'\in R,\ a'\geq 0$ и $f_1(\theta)=a'f_2(\theta)+b'\ \ \forall\theta\in\Theta$,

то $\upsilon(f_1)=a'\upsilon(f_2)+b'$;

V3. $\upsilon(f_1)+\upsilon(f_2)=2\upsilon(\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_2)$

тогда и только тогда, когда найдется аддитивная вероятностная мера p на Θ, что $\forall f\in L\quad \upsilon(f)=\int\limits_{\Theta} f(\theta)\ p(d\theta)$. При этом мера p единственная.

Доказательство. Из теорем 1, 3 [3] следует, что найдутся две выпуклые статистические закономерности P_1 и P_2 на Θ (см. [1]), что $\forall f\in L$ имеет место соотношение

$$\max_{p\in P_1}\int\limits_{\Theta} f(\theta)\ p(d\theta)=\upsilon(f)=\min_{p\in P_2}\int\limits_{\Theta} f(\theta)\ p(d\theta). \tag{2}$$

Предположим, что закономерности P_1 и P_2 не совпадают. В силу симметрии, без уменьшения общности, можно считать, что найдется $p_1\in P_1\setminus P_2$. Тогда, согласно теореме отделимости ([4], V.2.10) и теореме о представлении элементов пространства $B^*(\Theta,\Sigma)$ ([4], VI.5.1), найдется такой элемент $f \in B$, что $\int\limits_{\Theta} f(\theta)\, p_1(d\theta) > \max\limits_{p \in P_2} \int\limits_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta)$. Также, не уменьшая общности, можно считать, что $f \in B_0(a,b)$. Отсюда следует, что существует такой элемент $f \in B_0(a,b)$, для которого $\max\limits_{p \in P_1} \int\limits_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta) >$ $> \max\limits_{p \in P_2} \int\limits_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta) \ldots \min\limits_{p \in P_2} \int\limits_{\Theta} f(\theta)\, p(d\theta)$, что противоречит соотношению (2). Следовательно закономерности P_1 и P_2 совпадают. Отсюда, в силу соотношения (2), $\forall p_1, p_2 \in P_1$, $\forall f \in L$ $\int\limits_{\Theta} f(\theta)\, p_1(d\theta) = \int\limits_{\Theta} f(\theta)\, p_2(d\theta)$. Тогда $\forall A \in \Sigma$ при $f(\theta) = (\frac{b}{2})_A$ имеем $\frac{b}{2} p_1(A) = \int\limits_{\Theta} (\frac{b}{2})_A\, p_1(d\theta) = \int\limits_{\Theta} (\frac{b}{2})_A\, p_2(d\theta) =$ $= \frac{b}{2} p_2(A)$, т. е. $p_1 = p_2$.

В обратную сторону доказательство очевидным образом следует из теорем 1.3 [3]. Теорема доказана.

Функционал, удовлетворяющий условиям теоремы 1, аналогичный критерию в известной теореме Энскомба – Ауманна, которая формулируется для задач в небайесовской форме ([5, 6]). Чтобы сформулировать аналог теоремы Энскомба – Ауманна введем в рассмотрение отображение $\vartheta^{\infty}_{Z'_0(P_0(X),\Theta)}$ из $R^X / \overset{m}{\approx} \times PF(\Theta)$, где $PF(\Theta)$ – семейство всех аддитивных вереятностных мер на (Θ, Σ), определяемое аналогично соответствию $\chi^{\infty}_{Z'_0(P_0(X),\Theta)}$ (см. [3]), с той лишь разницей, что статистическая закономерность *P* состоит из одного элемента.

Теорема 2. Для любого класса СС $\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)$

$$\vartheta^{\infty}_{Z'_{01}(P_0(X),\Theta)}(R^X / \overset{m}{\approx} \times PF(\Theta)) = \Pi^{\infty}_0(Z'_{01}(P_0(X),\Theta)) \cap \overline{\Pi}^{\infty}_0(Z'_{01}(P_0(X),\Theta))$$

и всякое ПВП $\pi \in \Pi^{\infty}_0(Z'_{01}(P_0(X),\Theta)) \cap \overline{\Pi}^{\infty}_0(Z'_{01}(P_0(X),\Theta))$ можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП $\overline{\pi} \in \Pi^{\infty}_0(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)) \cap$ $\cap \overline{\Pi}^{\infty}_0(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta))$, при этом соответствие $\vartheta^{\infty}_{\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1}(P_0(X),\Theta)$ инъективно и

$$\vartheta^{\infty}_{\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)}(R^X / \overset{m}{\approx} \times PF(\Theta)) = \Pi^{\infty}_0(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)) \cap \overline{\Pi}^{\infty}_0(\mathit{Пр}\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)).$$

Доказательство следует из теорем 1, 2 [7] и теоремы 1.

В.М. Михалевич

ОПТИМАЛЬНІСТЬ, ЩО СПОЛУЧАЄ ПРИНЦИПИ ГАРАНТОВАНОГО
ТА НАЙКРАЩОГО РЕЗУЛЬТАТІВ У ЗАДАЧАХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Пропонується модель суб'єктивної очікуваної корисності за адитивною ймовірнісною мірою, формалізм якої, на відміну від SEU моделі Енскомба – Ауманна, визначеної в біхевіористських традиціях, базується на формально-логічних принципах оптимальності.

V.M. Mykhalevich

OPTIMALITY COMBINING THE PRINCIPLES OF GUARANTEED
AND BEST RESULTS IN THE PROBLEM OF DECISION MAKING

Proposed is a model of expexted utility on probability mass, whose formalism is based on the formally-logical principles of optimality, unlike the SEU model by Anscombe ans Aumann defined in behaviouristic traditions.

1. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. – Киев: Наук. думка, 1990. – 135 с.
2. *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior // J. of Mathematical Economics. – 1989. – **18**. – P. 141–153.
3. *Михалевич В.М.* О двух критериях при поэтапном выборе решений // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 2. – С. 68–79.
4. *Данфорд Н., Шварц Д.Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962. – 896 с.
5. *Anscombe F.J., Aumann R.J.* A defnition of subjective probability // The Annals of Mathematics and Statistics. – 1963. – **34**. – P. 199–205.
6. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений: Пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
7. *Михалевич В.М.* К параметрической задаче решения с денежными доходами // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 5. – С. 163–169.

Получено 15.05.2012